CAPÍTULO 3
SEPARACIÓN DE SEÑALES CON ESTRUCTURA TEMPORAL Y ESTUDIO DE LOS MODELOS PARA ICA

3.1 Métodos de separación basados en la estructura temporal

3.1.1 Introducción

Hasta ahora, en el modelo básico de ICA planteado se consideraba una mezcla lineal de variables aleatorias estadísticamente independientes. En este modelo básico, el orden de las muestras del vector $\mathbf{x}$ no tiene especial relevancia. Se puede alterar el orden de las muestras del vector y el modelo seguirá siendo igualmente válido.

En el presente proyecto, a partir de ahora, nos centraremos en el caso en que tenemos una mezcla de señales con dependencia temporal, $s_i(t)$ con $t = 1,...,T$. Las señales recibidas pueden expresarse matricialmente de la forma:

$$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{As}(\mathrm{t}) \qquad (3.1)$$

En este caso, el orden de las muestras tiene especial relevancia. Tendremos una estructura temporal que nos permitirá obtener información adicional para la resolución del problema de separación. Las componentes independientes son señales con dependencias temporales. Así la matriz de autocovarianzas de una señal temporal será distinta si se evalúa para distintos retardos de la señal. Con lo cual, podremos obtener varias matrices de autocovarianzas a partir de los datos y conseguir a partir de ellas información adicional para la resolución del problema. De esta forma se evitará el uso de estadísticos de orden superior.

Para poder hacer uso de esta información adicional, deben darse dos condiciones:

- Las componentes independientes deben tener distintas autocovarianzas. Además las autocovarianzas deben ser distintas de cero.

- Las varianzas de las componentes independientes son no estacionarias.

En la inmensa mayoría de los casos de interés, estas suposiciones se cumplen y no resultan ser demasiado restrictivas.

3.1.2 Ilustración de las técnicas de separación mediante matrices de autocovarianzas

En el modelo básico de ICA sólo podemos separar las señales temporales originales a partir de las señales de mezcla usando la matriz de autocovarianzas en el caso de que los datos recibidos no estén correlados, es decir, $E\left\{x_i(t)x_j(t)^T\right\}=0$ si $i \neq j$. En ese caso particular, tendremos que:

$$C_{\boldsymbol{xx}} = E\left\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^T\right\} = E\left\{A\boldsymbol{ss}^T A^T\right\} = AC_{\boldsymbol{ss}}A^T \quad (3.2)$$

Donde la matriz $C_{\boldsymbol{xx}}$ es diagonal porque las fuentes son estadísticamente independientes. Las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ serán iguales a los autovectores de la matriz $C_{\boldsymbol{xx}}$.

En el caso de los datos recibidos estén correlados, no podemos determinar la matriz $\mathbf{A}$ de la forma anterior. Podríamos multiplicar los datos recibidos por una matriz de preblanqueo $\mathbf{V}$ y decorrelarlos, sin embargo, existen infinitas matrices de preblanqueo que nos permiten obtener los datos, por lo que el método propuesto sólo nos permitiría determinar la matriz $\mathbf{VA}$ (matriz de mezclas). Esto es lo que ocurre cuando se intenta separar variables gaussianas. Para variables gaussianas, decorrelación implica independencia. Las fuentes recibidas nunca serán independientes puesto que son una combinación lineal de las señales originales que queremos separar, por tanto, las señales recibidas serán correladas y por la razón antes expuesta, sólo se podrá determinar la matriz $\mathbf{VA}$, pero no la matriz $\mathbf{A}$. Esto no supone una limitación a la hora de obtener las fuentes originales a partir de sus mezclas puesto que para ello sólo se necesita conocer la matriz de mezclas $\mathbf{VA}$.

En estos casos, tendrían que usarse estadísticos de orden superior para determinar la matriz $\mathbf{A}$. Una alternativa al uso de estadísticos de orden superior es utilizar otra matriz de covarianzas en un instante de tiempo distinto al cero y así poder determinar la matriz de separación, ya que se cumplirá que:

$$C_\tau^x = E\left\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)\right\} = E\left\{A\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T A^T\right\} = AC_\tau^s A^T \quad (3.3)$$

C_τ^s es una matriz diagonal, debido a que se cumple que $E\{x_i(t)x_j(t-\tau)\}=0$ para todo $i \neq j$ porque el valor de la señal recibida en el *i-ésimo* receptor en un instante t no depende de la señal recibida en el receptor *j-ésimo* en un instante $t-\tau$ distinto al anterior. Así con el uso de matrices de autocovarianzas evaluadas en distintos instantes de tiempo, se obtiene información adicional que nos permite no tener que recurrir al uso de estadísticos de mayor orden.

3.1.3 El algoritmo AMUSE

El algoritmo AMUSE [14] es uno de los métodos de separación ciega más significativos entre aquellos que obtienen la matriz de separación haciendo uso de matrices de autocovarianzas. Además guarda una profunda similitud con otros algoritmos de separación de fuentes, como el que posteriormente se describirá para la separación de fuentes con pequeños retrasos, de ahí, que se describa con detalle en el presente capítulo.

El algoritmo utiliza un solo retardo temporal, τ, para el cálculo de las matrices de autocovarianzas. Usualmente, por simplicidad, se hace $\tau = 1$.

Sean $\mathbf{z}(t)=\mathbf{V}\mathbf{x}(t)$ las fuentes recibidas y preblanqueadas. Para ellas se cumplirá:

$$\mathbf{Wz}(\mathrm{t})=\mathbf{s}(\mathrm{t}) \qquad (3.4)$$

$$\mathbf{Wz}(\mathrm{t}-\tau)=\mathbf{s}(\mathrm{t}-\tau) \qquad (3.5)$$

Donde $\mathbf{W}^{-1}=\mathbf{VA}$ y $\mathbf{V}$ es la matriz de preblanqueo. Consideremos la matriz

$$\overline{\boldsymbol{C}}_{\tau}^{z}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{C}_{\tau}^{z}+\left(\boldsymbol{C}_{\tau}^{z}\right)^{T}\right] \quad (3.6)$$

Donde $C_{\tau}^{z}=\mathbf{W}^{\mathrm{T}}E\left\{\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}(t-\tau)^{T}\right\}\mathbf{W}=\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{DW}$ es la matriz de covarianzas en el instante τ (generalmente se hace $\tau=1$). Esta matriz es simétrica puesto que la matriz $\mathbf{D}$ es diagonal, pues se asume que las fuentes a separar son estadísticamente independientes. Por tanto, podemos escribir:

$$C_{\tau}^{z}=\frac{1}{2}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\left[E\left\{\boldsymbol{s}(t)\boldsymbol{s}(t-\tau)^{T}\right\}+E\left\{\boldsymbol{s}(t-\tau)^{T}\boldsymbol{s}(t)\right\}\right]\mathbf{W}=\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{C}}_{\tau}^{s}\mathbf{W} \qquad (3.7)$$

La matriz $\overline{\boldsymbol{C}}_{\tau}^{s}$ es diagonal puesto que las fuentes son independientes. De (3.7) podemos deducir que las filas de la matriz $\mathbf{W}$ vienen dadas por los autovectores de la matriz $\overline{\boldsymbol{C}}_{\tau}^{z}$.

En resumen, para el cálculo de la matriz $\mathbf{W}$ se siguen los siguientes pasos:

- Los datos recibidos $\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$ se preblanquean y se obtiene $\mathbf{z}(\mathrm{t})=\mathbf{Vx}(\mathrm{t})$
- A partir de $\mathbf{z}(\mathrm{t})$, se obtiene $C_{\tau}^{z}=E\left\{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t-\tau)^{T}\right\}$, normalmente para $\tau=1$, y posteriormente $\overline{\boldsymbol{C}}_{\tau}^{z}=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{C}_{\tau}^{z}+\left(\boldsymbol{C}_{\tau}^{z}\right)^{T}\right]$

- Se calculan los autovectores de la matriz $\overline{\boldsymbol{C}}_{\tau}^{z}$. Las filas de la matriz $\mathbf{W}$ serán iguales a los autovectores.

- Finalmente se obtienen las fuentes sabiendo que $\mathbf{s}(\mathrm{t}) = \mathbf{Wz}(\mathrm{t})$

3.1.4 Limitaciones del algoritmo

El algoritmo sólo funciona bien en el caso de que la matriz $\overline{\boldsymbol{C}}_{\tau}^{z}$ no tenga autovectores repetidos. En este caso, no podrán determinarse las fuentes correspondientes a autovalores repetidos. Escogiendo un retardo τ adecuado podemos resolver el problema si las señales $s_i(t)$ tienen distintas autocovarianzas (densidad espectral).

3.2 Estudio de los diferentes modelos de señal en ICA

3.2.1 Modelo de señal para mezclas instantáneas

Se trata del modelo básico considerado hasta ahora. Es el caso en el que las fuentes en su propagación desde el transmisor hasta el receptor sólo sufren una mezcla lineal entre ellas y la multiplicación por un factor constante. En dicho modelo denotamos como $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_N(t))^T$ con $t = 1, \ldots, T$ al vector de fuentes independientes entre sí y de media cero. $\mathbf{A}$ es una matriz de dimensión MxN que permite modelar la combinación lineal de las señales cuando se transmite por el canal. En el receptor tenemos M observaciones que denotamos mediante el vector $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))^T$ con $t = 1, \ldots, T$.

Matricialmente podemos expresar el vector de observaciones de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{As}(t) \qquad (3.8)$$

En la siguiente figura aparece representado el modelo básico:

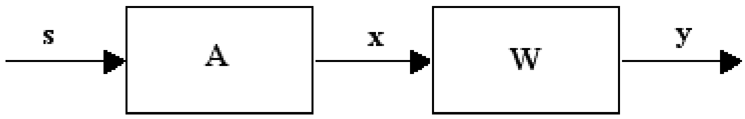

Figura 3.1: Modelo para el proceso de mezcla y separación

La matriz $\mathbf{W}$ es la matriz de separación. Al multiplicar dicha matriz por la de mezclas, debe obtenerse el producto de una matriz diagonal por una matriz permutación, es decir, $\mathbf{WA} = \mathbf{DP}$. Ello se debe a las limitaciones de ICA, comentadas en el capítulo 2, para determinar el orden de las componentes independientes y su amplitud. Por último, el vector $\mathbf{y}$ es la estimación de las fuentes originales que queremos separar.

A este modelo, al igual que los otros dos que se expondrán a continuación, se les puede añadir ruido. Por simplicidad, no se ha hecho, ya que en el estudio de los diferentes modelos de señal para ICA, nos centraremos en el tipo de respuesta impulsiva del canal.

3.2.2 Modelo de señal para mezclas convolutivas

En este caso las señales se propagan por un canal con memoria caracterizado por una respuesta impulsiva, que se supone desconocida. Las señales recibidas ya no sufren una simple combinación entre ellas como en el caso anterior. Este modelo es especialmente útil en los casos donde la propagación entre las fuentes y los sensores se ve afectada por la existencia de multitrayectos. Se trata de un modelo matemáticamente más complejo, ya que es necesario manejar secuencias de matrices tanto en el sistema de mezclas como en el de separación. El modelado matemático es el siguiente:

Sean $s_i(t)$ con $i = 1, 2, ..., N$, $t = 1, ..., T$ los procesos generadores de la secuencia de fuentes $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_N(t))^T$. Se supone que se cumplen las siguientes hipótesis:

- Los procesos $s_i(t)$ son estacionarios en sentido amplio (WSS) y mutuamente independientes entre sí.

- Cada uno de los procesos $s_i(t)$ está constituido de variables aleatorias temporalmente independientes e idénticamente distribuidas.

- Se supone que el sistema de mezcla es MIMO y lineal e invariante en el tiempo (LTI). Por tanto, está caracterizado por una respuesta al impulso matricial $\mathbf{A}(\mathrm{t})$. El esquema del proceso de mezclas es el mismo que el de la *figura 3.1*, pero ahora las observaciones son el resultado de la convolución de la secuencia de fuentes con la respuesta al impulso del sistema de mezcla, es decir:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) * \mathbf{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(k)\mathbf{s}(t-k) \qquad (3.9)$$

Se supone que el sistema de separación también es LTI y, por tanto, queda determinado por la respuesta al impulso matricial $\mathbf{W}(t)$ de longitud $T = 2l_w + 1$. Así el vector de salidas se construye como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t) * \mathbf{x}(t) = \sum_{k=-l_w}^{l_w} \mathbf{W}(k)\mathbf{x}(t-k) \qquad (3.10)$$

La respuesta al impulso del sistema conjunto de mezcla y separación viene dada por

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{W}(t) * \mathbf{A}(t) \qquad (3.11)$$

Es trivial comprobar que el modelo de mezcla instantánea es un caso particular del convolutivo en el que los sistemas de mezclas y de separación no tienen memoria:

$$\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}(0)\delta(t) \text{ y } \mathbf{W}(t)=\mathbf{W}(0)\delta(t) \qquad (3.12)$$

3.2.3 Modelo de señal para pequeños retardos

Este será el modelo utilizado en los algoritmos que posteriormente se expondrán con detalle. Se trata de un caso intermedio entre los dos anteriores. En dicho modelo se supone que en el receptor se recibe una mezcla de las señales idénticas a las transmitidas, con la salvedad de un retardo y una atenuación debido a su propagación por el medio. Podemos considerar este modelo como una extensión del modelo básico ICA en el cual se consideran, además, los retardos debido a la propagación de las señales transmitidas.

La respuesta impulsiva del medio de propagación desde la fuente j hasta el receptor i es de la forma:

$$h_{ij}(t)=a_{ij}\delta\left(t-\tau_{ij}\right) \text{ con } i=1,\ldots,M \quad j=1,\ldots,N \text{ y } \left|a_{ij}\right|<1 \qquad (3.13)$$

Al igual que en el modelo convolutivo, el sistema estará caracterizado por una respuesta al impulso matricial $\mathbf{A}(t)$. Las observaciones pueden expresarse matemáticamente de la forma:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{A}(t)*\mathbf{s}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(k)\mathbf{s}(t-k) \qquad (3.14)$$

$$\text{con } \mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}\delta(t-\tau_{11}) & \cdots & a_{1N}\delta(t-\tau_{1N}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1}\delta(t-\tau_{M1}) & \cdots & a_{MN}\delta(t-\tau_{MN}) \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

El sistema de separación podrá expresarse de la misma forma que en el modelo anterior. Supondremos que es LTI y, por tanto, queda determinado por una respuesta al impulso matricial $\mathbf{W}(t)$ de dimensiones NxM y de longitud $T = 2l_w + 1$. El valor de las salidas se obtiene como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t) * \mathbf{x}(t) = \sum_{k=-l_w}^{l_w} \mathbf{W}(k)\mathbf{x}(t-k) \qquad (3.16)$$

La respuesta al impulso del sistema conjunto de mezcla y separación viene dada por

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{W}(t) * \mathbf{A}(t) \qquad (3.17)$$

En el algoritmo que se implementó para la separación de fuentes con retardos, tal como se describe en este modelo, pero la resolución del mismo se hace utilizando el modelo de ICA instantáneo. Para ello, se verá en el capítulo siguiente que, bajo ciertas condiciones, es posible la resolución del modelo con pequeños retardos considerando que las mezclas se producen de forma instantánea, y a la vez, considerando el efecto de los retardos.

3.3 Resumen del capítulo

En el modelo básico de ICA se considera una mezcla lineal de variables aleatorias estadísticamente independientes. En este capítulo, se ha extendido el modelo básico al caso de una mezcla de señales temporales. Se tendrá entonces una estructura temporal que permitirá obtener información adicional para la identificación de las fuentes a partir de las mezclas. Así las matrices de autocovarianzas serán distintas si las evaluamos para distintos retardos de la señales recibidas.

El uso de estas matrices de autocovarianzas permitirá idear algoritmos que eviten el uso de estadísticos de orden superior, consiguiéndose así mayor simplicidad en la resolución del modelo. De entre todos estos algoritmos, se ha destacado el algoritmo AMUSE, debido al gran parecido que presentan con él los algoritmos que usan matrices de autocovarianzas evaluadas en distintos instantes temporales. En el capítulo posterior, se verá la profunda similitud que presenta con el algoritmo AMUSE el algoritmo propuesto para la separación de fuentes con pequeños retardos.

Finamente se han presentado los diversos modelos de mezclas que existen en ICA y se ha introducido el modelo con retardos, que modela el proceso de mezclas para el cual se ha desarrollado el algoritmo de separación que se describirá en el capítulo siguiente.