2. Introducción.

Cada vez más, la comunicación se hace indispensable entre personas y ciudades. En los últimos años ha sido donde el progreso se ha acentuado como nunca lo había hecho antes. A partir de la invención de la electricidad la tecnología de todo tipo y el nivel de vida no han dejado de mejorar. En el momento que nacieron las telecomunicaciones, como por ejemplo el telégrafo, la información empezó a tener vía libre entre las personas, las nuevas tecnologías podían transmitirse de tal manera que otras personas podían continuar con las investigaciones.

El tránsito de información, ya sea en forma de libro o por cable, es necesaria para el progreso. Lo que hoy se llamaría trabajo en equipo.

Poco después, fueron apareciendo otro tipo de redes de transporte. Las carreteras, por las que podían circular mercancías y personas. Una amplia red que permite que se puedan fabricar todo tipo de cosas con materiales de otros sitios o que se puedan enviar cosas a otros sitios en un tiempo aceptable.

Al cabo de unos años, el uso de las redes resulta indispensable en cualquiera de sus formas. No sería concebible la vida actual si no fuese porque existen gran cantidad de redes de todo tipo a nuestro servicio.

Están las redes de agua corriente, las de gas, las de alcantarillado, las de cable telefónico, Internet, fibra óptica, la instalación de climatización en un edificio, la electricidad, porteros electrónicos, redes locales de información por cable, la red de carreteras, la de ferrocarril y metro, otras no tan tangibles como la televisión, la radio o la telefonía móvil, y un largo etcétera.

La construcción de estas redes lleva consigo unos costes de despliegue elevadísimos a tener en cuenta, por ello aparece la necesidad de plantear el problema como uno de optimización. Al construir una red, mejor. Pero hay que tener en cuenta que la red debe asistir a todos los puntos que se precise. Este dilema lleva a Jacob Steiner a plantear uno de los problemas más relevantes en la construcción de redes de todo tipo.

Este problema es bien conocido desde hace tiempo como un problema de optimización del que todavía no se conoce ningún algoritmo que lo resuelva de manera exacta. En este documento se realiza un estudio basado en un algoritmo para resolverlo de forma aproximada. Como se verá, multitud de autores han intentado atajar el problema con resultados cada vez mejores, pero todavía ninguno es efectivo. Se comprobará la calidad del algoritmo propuesto y su funcionalidad.

2.1. El Problema de Steiner.

Jacob Steiner, matemático alemán de comienzos del siglo XIX, propuso un problema de importancia fundamental dentro del campo de la optimización.

El problema de Steiner en redes considera la conexión de un subconjunto de nodos en un grafo $G=(N,A)$, llamados nodos terminales, pudiendo utilizar, para ello, el otro subconjunto complementario de nodos, nodos denominados Steiner. El problema de Steiner busca establecer la red de mínimo coste que interconecta el subconjunto de nodos terminales del grafo G . Esto es:

DADO: Un grafo no-dirigido, $G=(N,A)$, con n nodos, m arcos, con coste asociado a cada arco c_m , y una partición de los nodos en un subconjunto $I \subseteq N$ con p nodos, quedando los restantes nodos, $n-p$ caracterizados como nodos Steiner o subconjunto J .

ENCONTRAR: Una subred G_1 de G tal que exista un camino posible entre todo par de nodos pertenecientes al subconjunto I , (esto es, entre todo par de terminales), y de forma que la suma del coste de los arcos asociados a G_1 sea mínima.

Diferentes formulaciones y técnicas de solución han sido desarrolladas, así se pueden encontrar formulaciones de cobertura, formulaciones basadas en flujos multicommodity, técnicas basadas en programación dinámica, algoritmos de enumeración implícita, relajación lagrangiana, etc. Sin embargo, la obtención del óptimo no es alcanzable en tiempo polinomial puesto que el problema de Steiner ha sido probado NP-Duro en *Garey et al(1979)*.

Se puede encontrar una amplia bibliografía en torno a este problema, tanto por la dificultad del mismo como por la diversidad de algoritmos que intentan buscar la solución óptima. Hasta la fecha no se conoce ningún algoritmo que resuelva dicho problema de manera exacta en tiempo polinomial. Existen multitud de algoritmos que se aproximan bastante a la solución óptima, incluso llegan a ella en buena parte de los casos propuestos.

Una de las mejores heurísticas conocidas para los STP es la Heurística del Camino Mínimo(MPH) por Takahashí y Matsuyarna (1980), la cual es rápida y llega a buenas soluciones. Otras heurísticas clásicas para el STP incluyen la Heurística de la Distancia Media (ADH) por Rayward-Smith (1983), el cual encuentra soluciones incluso mejores que MPH pero es más lento. Otras heurísticas son la de la Distancia de Red (DNH) y la de la Contradicción de Plesnik (CHR).

En la implementación de cualquier solución al problema se plantea el problema del tiempo de ejecución de la heurística escogida, que puede llegar a ser del orden de semanas, según la complejidad del grafo. La solución óptima será un árbol mínimo expandido (*minimum spanning tree*) que incluya todos los nodos terminales y algunos o ninguno de los nodos Steiner. De todos los árboles mínimos expandidos se desea encontrar el de coste menor.

En este Proyecto se busca la implementación de un algoritmo para la resolución del problema de Steiner. Este algoritmo se basa en, a partir del grafo completo, buscar una “primera solución admisible”, y a partir de esta solución empezar a iterar en un bucle que en cada ejecución busca una nueva solución admisible y recalcula el coste de los arcos gracias a la aplicación de diferentes funciones de Integridad. El objetivo de utilizar estas funciones a la hora de recalcular el coste consiste en que “premiaremos” a aquellos arcos de la solución por los que circula mucho tráfico. Para “premiar” a estos arcos se disminuirá su coste proporcionalmente al tráfico que circula por ellos.

Los aspectos a tratar son, por tanto, el algoritmo para calcular una solución admisible en cada iteración, el algoritmo para hallar una “primera solución admisible”, la forma de calcular el flujo que circula por cada arco (una vez conocemos la solución), la forma de recalcular el coste de los arcos que corresponda (función de Integridad a usar y forma de utilizarla).

2.2. Aplicaciones prácticas del problema de Steiner.

El STP encuentra su aplicación en muchos problemas de localización, fiabilidad, logística, transportes y de planificación de red. Las telecomunicaciones es un campo particularmente rico en problemas que han desembocado en el tradicional problema de Steiner. Entre ellos, podemos citar el Problema del diseño de Red Jerárquica; Dynamic Predicate Stashing Copy Problem que constituye una aplicación para entregar información y distribución de información en sistemas computadores (como por ejemplo Internet) y el Multicast Asymmetric Routing, problema que está también presente en sistemas computadores de distribución o en redes generales de ATM.

En definitiva, resolver el problema de Steiner es de gran utilidad para la constitución de cualquier red, ya sea de telecomunicaciones, de abastecimiento, de transportes, etc.

En la actualidad, estamos rodeados de redes de todo tipo, desde el agua, los residuos, las carreteras,

el teléfono, la telefonía móvil, el gas, televisión, radio, incluso redes más particulares como las que encontramos en oficinas (LANs) o en edificios inteligentes. Desgraciadamente, el despliegue de cualquiera de estos elementos no resulta gratuito, por tanto, surge la necesidad de optimizar costes, de colocar el menor número de tramos de red o el menor número de antenas posibles.

En el caso de redes de telecomunicación, encontramos que la mayor inversión por parte de las empresas se basa en la infraestructura de red que tienen que desplegar. Minimizar el coste de esa red es fundamental.

A continuación se describen varios posibles escenarios que pueden ser abordados haciendo uso del problema de Steiner:

Ejemplo 1

Considérese una red que contiene i nodos, los cuales son origen o destino de comunicación y que han de ser interconectados. Además existe otro conjunto de nodos $, j$, que representan puntos en la red que no reciben flujo de información pero que pueden ser, convenientemente utilizados para conectar los nodos i .

Los nodos origen-destino representan centros de comunicación, siendo típicamente núcleos urbanos, mientras que los arcos uniendo las ciudades harían referencia a las vías de comunicación posible, ya fueran carreteras, vías de ferrocarril, etc. Finalmente, los nodos Steiner representarían aquellas uniones físicas en la red que no fueran nodos de comunicación. Por ejemplo, cruces de carreteras.

Partiendo de este escenario de una red ya formada deseamos crear otra, que utilice a la primera. Es evidente que resulta más económico extender cable o tuberías junto a una carretera que cruzando campo través. Resolver adecuadamente el problema ahorraría mucho dinero en la construcción de la red.

Ejemplo 2.

Otro posible escenario representa un modelo de comunicación en el cual se tiene en funcionamiento una red de fibra óptica operando mediante tecnología ATM. En esta situación el conjunto de nodos, denominados nodos terminales, representarían centros de origen o destino de comunicación. Para interconectar estos nodos usuarios se dispone de otros nodos que tienen capacidad de conmutación y multiplexación, a los cuales se denominará, y en ausencia de una mejor elección, mediante el término en inglés *hub*. La red se dispone mediante una topología jerárquica, estableciéndose dos niveles diferenciados. En el nivel superior se tiene una red de alta velocidad en árbol que interconecta los hubs, y en el nivel inferior se dispone una red de menor velocidad en estrella que conecta a todos los nodos terminales de una determinada región con su correspondiente *hub*.

Los nodos candidatos a ser nodos *hubs* determinarían el conjunto de nodos Steiner, conformando el

de terminales los denominados nodos usuarios.

La situación expuesta representa el habitualmente referido en la literatura problema de Steiner *Tree-Star*, el cual es un caso especial del problema de Steiner.

Ejemplo 3.

Por otro lado, son habituales en telecomunicaciones los sistemas de multidifusión, caso de televisión, vídeo conferencia, aprendizaje a distancia, etc., en ellos una única fuente difunde contenidos a múltiples receptores. Se puede considerar una red formada por una serie de nodos configurando la fuente suministradora de contenidos y los distintos destinos, mientras que los arcos representan a los distintos enlaces de la red.

Esta situación, propia del proceso de gestión en tiempo real, dispondría de las tablas de encaminamiento o routing determinando las posibles conexiones del canal virtual entre todo par de nodos, como datos procedentes de la etapa del diseño topológico.

Dentro de esta situación es habitual considerar como primer objetivo alcanzar la máxima utilización de los recursos de la red con el fin de conseguir el mejor balance posible de carga que permita el encaminamiento de las comunicaciones. Se podría asignar un determinado peso a los arcos que representara el coste de utilización del arco.

Un coste elevado iría asociado a arcos con escasa capacidad disponible. De esta forma se intentaría encontrar el mejor balance de carga que asegurara el encaminamiento de futuras comunicaciones.

El contexto parte de una situación con un nivel de congestión en cada enlace establecido. En función de la capacidad disponible se impone un coste (a menor capacidad disponible, mayor coste). Para la comunicación, la solución óptima sería un árbol que incluyera necesariamente a todos los destinatarios, a la vez que al emisor, y que fuera de coste mínimo. Este árbol se conoce como árbol de Steiner.

Ejemplo 4.

Supongamos una ciudad, con problemas de tráfico, en la que ir de una zona a otra lleva una cantidad de tiempo demasiado elevada. Se desea conectar varios grandes centros de tránsito de la ciudad para agilizar los desplazamientos.

Estos centros pueden ser universidades, centros comerciales, hospitales, etc. Se desean comunicar con una línea de metro para agilizar el transporte entre estos centros o bien construir una autopista, ya sea a partir de la ampliación de carreteras ya existentes o de nueva construcción.

El distrito metropolitano necesita construir un conjunto de líneas que conecten esos centros con un mínimo coste. Las nuevas líneas deben cumplir dos características:

- Admisibilidad de que se puedan construir.

- Que el coste de la línea sea el mínimo posible.

A partir de ahí, se construye un grafo con todos los posibles caminos entre esos centros y entre otros puntos que puedan resultar interesantes desde el punto de vista económico. En la multitud de caminos posibles existirían cruces o puntos por los que resulte más económico pasar, esos serían los nodos Steiner. A cada tramo se le asocia el coste de construcción, esto proporciona un problema de Steiner.

2.3. Introducción a las técnicas heurísticas.

Dada la dificultad práctica para resolver de forma exacta (simplex, “ramificación y acotación”, teoría de grafos, etc) toda una serie de importantes problemas combinatorios para los cuales, es necesario ofrecer alguna solución dado su interés práctico. Comenzaron entonces a aparecer algoritmos que proporcionan soluciones factibles (que satisfacen las restricciones del problema), las cuales, aunque no optimicen la función objetivo, se supone que al menos se acercan al valor óptimo en un tiempo de cálculo razonable. Podríamos llamarlas en lugar de óptimas, “satisfactorias”, pues sirven a nuestros objetivos.

Este tipo de algoritmo se denomina heurística, del griego *heuriskein*. Una posible manera de definir estos métodos es como “procedimientos simples, a menudo basados en el sentido común, que se supone ofrecerán una buena solución (aunque no necesariamente la óptima) a problemas difíciles, de un modo fácil y rápido” (Zanakis y Evans, 1981).

Los métodos heurísticos son interesantes cuando:

- No existe un método exacto de resolución o éste requiere mucho tiempo de cálculo o memoria.
- Cuando no precisamos necesariamente la solución óptima. En casos en los que la función objetivo adquiera valores relativamente pequeños puede no merecer la pena esforzarse.
- Cuando los datos son poco fiables. En este caso, o bien cuando el modelo es una simplificación de la realidad, puede carecer de interés buscar una solución exacta, dado que de por sí ésta no será más que una aproximación de la real, al basarse en datos que no son los reales.

- Cuando limitaciones de tiempo, espacio (para almacenamiento de datos), etc. obliguen al empleo de métodos de rápida respuesta, aún a costa de la precisión.
- Como paso intermedio en la aplicación de otro algoritmo. A veces son usadas soluciones heurísticas como punto de partida de algoritmos exactos de tipo iterativo.

Una importante ventaja que presentan las técnicas heurísticas respecto a las técnicas que buscan soluciones exactas es que, por lo general, permiten una mayor flexibilidad para el manejo de las características del problema. No suele resultar complejo diseñar algoritmos heurísticos que en lugar de considerar funciones lineales utilicen no linealidades. Además, generalmente ofrecen más de una solución, lo cual permite ampliar las posibilidades de elección del que decide, sobre todo cuando existen factores no cuantificables.

Por el contrario, presenta algunos inconvenientes. Uno de ellos es que por lo general no es posible conocer la calidad de la solución, es decir, como de cerca estamos del óptimo.

Afortunadamente, existen métodos para realizar acotaciones que nos den una orientación respecto a la calidad de la solución obtenida. Un procedimiento consistente en relajar el problema de modo que así el problema sea más fácil de resolver. Si el óptimo del problema relajado es x' , sabemos que $x_{heu} \leq x_{opt} \leq x'$, ya que al eliminar restricciones aumenta el conjunto de soluciones, y puede entonces aparecer un nuevo óptimo mejor que el original. De este modo, valores x_{heu} cercanos a x' nos garantizan que la heurística está dando una buena aproximación.

Cuando este tipo de procedimientos evaluadores de la calidad de la heurística no son posibles, siempre cabe utilizar métodos sencillos que detectan simplemente que la heurística no es buena. Así, si pudieran generarse aleatoriamente varias soluciones que fuesen similares a la x_{heu} , cabría poner en duda la efectividad de la heurística.

No obstante, y a pesar de todas sus ventajas, no cabe duda de que cuando una técnica exacta esté disponible debe ser preferida a cualquier tipo de heurística, sobre todo cuando los volúmenes económicos manejados sean importantes y, por tanto, pequeñas variaciones respecto al óptimo representan grandes pérdidas.

Más adelante, aparecieron otro tipo de búsqueda orientada de soluciones basados en métodos heurísticos, éstos fueron llamados metaheurísticas. Algunos de éstos utilizan en su algoritmo componentes de aleatoriedad. Las metaheurísticas están siendo utilizadas en la actualidad, y en la mayoría de los casos dan mejor resultados que las heurísticas, ya que dentro de los algoritmos de las metaheurísticas, a veces, se incluyen heurísticas útiles anteriormente probadas.

Una característica de las metaheurísticas es que su estructura de búsqueda es independiente del

problema, es decir, las metaheurísticas pueden ser aplicadas a cualquier tipo de problema independientemente del problema o la estructura de datos. Sin embargo, las heurísticas suelen ser más bien aplicables al tipo de problema para el que fueron pensadas. Suelen estar basadas en procesos naturales y lógicos de búsqueda de soluciones. Y el pseudocódigo no suele ser muy complejo.