

CAPÍTULO 8

Escalado Multidimensional.

III. 8.1 Introducción.

Este capítulo se basa en la referencia [9]. El Escalado Multidimensional ("Multidimensional Scaling", MDS) es un método de análisis multivariante, englobado dentro de los métodos de interdependencia, según vimos en la introducción a técnicas multivariantes. Permite analizar matrices de proximidad (similitud o disimilitud), para proporcionar una representación visual entre los datos dentro de un espacio de dimensiones reducidas.

Constituye una alternativa mucho más flexible a otros métodos de análisis multivariante, puesto que únicamente necesita de una matriz que contenga la (di)similitud entre los datos de entrada. Como contrapartida mencionar el análisis factorial, el cual requiere como punto de partida el cálculo de una matriz de correlación entre todas las variables que intervienen en el problema. El cálculo de este tipo de matrices es menos intuitivo.

Por tanto, MDS hace referencia a técnicas que permiten a un investigador, partiendo de unos valores de proximidad entre los datos de entrada, descubrir ciertas estructuras ocultas en estos datos. El descubrimiento de estas estructuras sería más complicado con el uso de técnicas de análisis tradicionales.

Una proximidad es un valor que indica cómo de similares o distintos son dos objetos, de cualquier clase, de aquí la enorme flexibilidad de este tipo de técnicas.

La salida es una representación espacial, consistente en una configuración geométrica de puntos, como en un mapa. Cada punto de la configuración corresponde a uno de los objetos. Esta configuración refleja la "estructura oculta" de los datos, y a menudo hace más fácil la comprensión y el entendimiento de los datos. Para reflejar esta estructura decimos que si la disimilitud es más grande (o la similitud más pequeña) entre dos objetos, como muestra su valor de proximidad, éstos deberían estar más apartados en el mapa de puntos.

III. 8.2 Antecedentes históricos.

Esta técnica de análisis matemático es relativamente nueva, puesto que nació a mediados del siglo XX. Se pueden distinguir 4 fases o etapas en la evolución de MDS [11]:

1. En esta primera fase, el nacimiento de MDS, los trabajos se concentraron en lo que se conoce como "Metric MDS". La primera proposición o estudio conocido en relación con estas técnicas se atribuye a Torgerson, W.S. que en 1952 propuso utilizar modelos Euclídeos para resolver el problema. Ya antes, en 1950 Attneave sugirió usar modelos no Euclídeos.
2. La segunda etapa que se puede apreciar, destaca sobre todo por trabajos y estudios encaminados a lo que se conoce como "Non-Metric MDS". Los investigadores más importantes que contribuyeron al desarrollo de "Non-Metric MDS" fueron, Shepard, R.N. (1962), Kruskal, J.B. (1964), Torgerson, W.S. (1962) y Guttman, L. (1968), especial importancia los estudios de Guttman en relación con el proceso de identificar las dimensiones y buscarles un significado.
3. En la tercera etapa se sientan las bases para una variante importante de la teoría de MDS, puesto que hasta ahora se había trabajado únicamente con una matriz de similitud. Ahora entran en juego las diferentes percepciones que se pueden tener frente a los mismos objetos en estudio, es lo que se conoce como "Individual Differences MDS". Los investigadores destacados en esta etapa han sido: Tucker, G. y Messick, S.J. (1963), Mcgee, V.C. (1968) y Carrol, J.D. y Chang, J.J., estos últimos aportaron el primer algoritmo para trabajar con WMDS (Weighted-Multidimensional Scaling)
4. En esta última etapa, los trabajos más importantes fueron dirigidos a la consolidación de estas nuevas técnicas como métodos eficaces para el análisis multivariante y estuvieron encaminadas a la unión de los distintos métodos mencionados anteriormente: Metric/Non-Metric MDS/WMDS. Los científicos más destacados, Ramsay, J.O. (1977) y de Leeuw, J. (1977)

III. 8.3 Aplicaciones.

La potencia de MDS deriva de su enorme flexibilidad puesto que se puede analizar cualquier clase de matriz de distancia o similitud. Estas similitudes pueden representar valoraciones de las personas, parecido entre objetos, el porcentaje de acuerdo entre juicios, el número de veces que un sujeto falla en discriminar entre estímulos, etc. Las posibilidades son muy diversas, siempre y cuando la matriz contenga alguna información de (di)similitud entre los objetos. Por ejemplo, los métodos de MDS fueron muy populares en investigaciones psicológicas humanas para descubrir las dimensiones que rigen los rasgos de la personalidad (Rosenberg, 1977).

Existen también numerosas aplicaciones en el campo del marketing, para detectar el número y la naturaleza de las dimensiones que subyacen de la percepción de las diferentes marcas o productos (Carmone, 1970)

Nuestro trabajo se basa precisamente en un estudio realizado sobre patrones de tela [2] y [3], en el que se usan tanto MDS como la técnica que explicaremos a continuación, análisis de conglomerados (HCA). Por tanto, se puede comprobar la flexibilidad de estas técnicas, aplicables en campos tan dispares como el marketing, psicología, ingeniería, etc.

III. 8.4 Análisis MDS.

MDS es usado en ciertas ocasiones de forma indirecta para analizar datos que no son proximidades. Es necesario, por tanto, obtener las proximidades como paso intermedio al análisis.

Un análisis MDS requiere de la realización de distintas etapas:

0. Fase previa. Preparar los valores de entrada.
1. Obtener los datos de proximidad. Este paso no es necesario realizarlo en todas las ocasiones. Si los datos ya son proximidades este paso se puede omitir.
2. Aplicar técnicas MDS.
3. Interpretación de la configuración obtenida.

III. 8.4.1 Preparación de los valores de entrada.

La preparación de los datos de entrada hace referencia, en última instancia, a cómo introducir los datos en el programa informático que se va a utilizar en el análisis MDS. En nuestro trabajo hemos utilizado el programa informático SPSS 12.0 para Windows, tanto para el análisis MDS como para el análisis posterior HCA.

Algunas de estas consideraciones son elementales, como se podrá comprobar:

- Por ejemplo, si los datos ya son proximidades, están listos para ser introducidos dentro de una matriz, ya sea completa o bien como matriz triangular superior/inferior. Si no son proximidades hay que crearlas antes de realizar el análisis.
- Hay que indicar si la diagonal principal forma parte o no de los datos de entrada. La diagonal principal representa la proximidad entre un objeto y sí mismo, por tanto siempre tendrá la misma valoración, esto es, máxima si se consideran similitudes y mínima en caso contrario.

- Si existen algunas proximidades perdidas, "missing", hay que indicar al programa qué debe hacer con estos casos. En nuestro proyecto no existe esta posibilidad, por tanto, no tuvimos que hacer un tratamiento especial para estos casos.
- Hay que simetrizar la matriz de los datos de entrada, esto es, la proximidad entre los estímulos "i" y "j" δ_{ij} debe ser lo más parecida posible a la proximidad recíproca δ_{ji} . Al igual que ocurría con la consideración anterior, nosotros no tuvimos que realizar este paso previo, pues los datos de entrada eran perfectamente simétricos, ya que no podía ser de otra forma según se preparó el experimento.

A continuación vamos a ver distintos métodos mediante los que podríamos obtener los datos de proximidad.

III. 8.4.2 Métodos para obtener los datos de proximidad.

El procedimiento más común para obtener datos de proximidad es preguntar directamente a las personas acerca del parecido entre dos objetos. Cuando se habla de parecido nos referimos a una "distancia psicológica" entre los estímulos presentados. Aunque "similitud" y "disimilitud" son los términos usados más frecuentemente para obtener la valoración de la proximidad, otros términos alternativos que pueden ser utilizados son: relación, dependencia, asociación, complementariedad, sustitución y muchos más.

Es importante a la hora de realizar este cuestionario no hacer referencia a las características en las que deben fijarse los encuestados, ya que son precisamente estas características las que nos interesan averiguar en el estudio. Se pueden dar, sin embargo, ciertas pautas o criterios para que sean también valorados, con el motivo de hacer más fácil la interpretación de la configuración resultante, esto es, los encuestados pueden ser preguntados por clases específicas de similitud. Sin embargo, en nuestro trabajo esta opción se descartó para dejar cualquier posibilidad abierta a estudio.

Los métodos más utilizados para averiguar las proximidades se comentan a continuación. Se diferencian principalmente en el número de objetos en estudio y la forma en que son presentados los estímulos a los encuestados.

- **Método 1.** Para un número elevado de estímulos (de 50 a 100 objetos). Las instrucciones típicas son colocar los estímulos en categorías exhaustiva y mutuamente excluyentes de tal manera que estímulos que estén en la misma categoría son más similares que otros que no lo están.

- **Método 2.** Se presentan dos a dos estímulos y los encuestados deben contestar si son iguales o son diferentes. Las medidas se tomarán del número de personas que se inclinen en una u otra dirección. Una variante podría ser que indicaran un valor, por ejemplo, de 0-100, para indicar cómo de parecidos son.
- **Método 3.** Se presenta un único estímulo y debe decir a qué categoría pertenece. El número de veces que los sujetos contestan "j" cuando se les presenta el estímulo "i" es la medida buscada.

Nuestro experimento podría englobarse dentro del método 2.

Para poder aplicar las técnicas MDS los datos de entrada deben ser proximidades. Si tras la aplicación de alguno de estos métodos, los resultados obtenidos no son proximidades, es necesario hacer un paso intermedio para obtenerlas.

Las matrices de proximidad son fuertemente simétricas. No son necesariamente simétricas al 100% puesto que se forman a partir de datos experimentales. Las variaciones de esta simetría anunciada pueden ser también objeto de estudio y se obtendrían importantes conclusiones, debido a que siguen patrones interesantes.

MDS es un procedimiento sistemático para obtener una configuración de objetos que tienen esta relación de proximidad. Sin embargo, una vez la configuración ha sido obtenida es muy importante interpretarla. El proceso de interpretar la configuración es el paso central en muchas aplicaciones.

III. 8.4.3 Análisis MDS.

III. 8.4.3.1 Notación y terminología.

Antes de comenzar a explicar las técnicas que conforman MDS vamos a hacer una introducción acerca de la notación y la terminología que vamos a utilizar.

- Los datos pertenecerán a alguna colección de objetos, ellos podrían ser caras, colores, países, candidatos políticos o estímulos de cualquier clase (reales o conceptuales). En nuestro estudio los objetos son fotografías de quemaduras.

Tendremos, por tanto, una colección de objetos I . Utilizaremos para indexar los objetos, primeramente por el índice "i" y en segundo lugar por el índice "j", ambos índices van de 1 ... I .

- Los valores de proximidad conectarán el objeto "i" con el objeto "j" que representaremos por los valores δ_{ij} . Estos valores se incluirán dentro de una matriz, que denominaremos matriz de similitud y se representará por Δ .

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix}$$

En muchas situaciones no hay diferencia entre δ_{ij} y δ_{ji} , y no tienen significado δ_{ii} , así que no es necesario tener una matriz completa, sino que basta con una matriz triangular y excluyendo la diagonal principal.

- Cada objeto es representado por un punto x_i en el espacio dimensional de puntos resultantes. La configuración de puntos tendría por tanto x_1, \dots, x_I puntos. El número de coordenadas de los puntos dependen del número de dimensiones **R**.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1r}, \dots, x_{1R}) \\ x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ir}, \dots, x_{iR}) \\ x_I = (x_{I1}, \dots, x_{Ir}, \dots, x_{IR}) \end{bmatrix} \quad \text{Sistema de R-dimensiones}$$

- La distancia entre dos puntos de X juega el papel principal en MDS. Se define la distancia entre dos puntos x_i y x_j y se denota como d_{ij} . En el caso de ser la distancia Euclídea y un sistema con R dimensiones como el de arriba sería:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + \dots + (x_{iR} - x_{jR})^2}$$

Al igual que con las proximidades, estas distancias se pueden introducir dentro de una matriz de distancias D.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}$$

Además es fácil verificar que:

$$d_{ii} = 0 \quad \text{para todo } i,$$

$$d_{ij} = d_{ji} \quad \text{para todo } i \text{ y } j \text{ (simetría)}$$

III. 8.4.3.2 Diferentes tipos de MDS.

El concepto principal de MDS gira en torno a la idea de que las distancias d_{ij} entre los puntos de la configuración X deberían corresponder a las proximidades δ_{ij} . Esta correspondencia se puede observar a través de un scatter diagram (o diagrama de Shepard). Se puede observar la función que se ha seguido para hacer MDS.

Scatter diagram. Si los datos son disimilitudes el diagrama de scattering será decreciente, mientras que si los datos son similitudes el diagrama de scattering será creciente. Todos estos conceptos se verán de forma más clara cuando comentemos y representemos gráficamente los resultados obtenidos en un apartado posterior.

La forma tradicional de describir una relación deseada entre proximidades y distancias es:

$$d = a + b\delta,$$

donde los valores a y b, para una serie de datos, deben ser descubiertos mediante procedimientos numéricos o con la utilización de cualquier tipo de herramienta informática. Esta fórmula en particular describe una relación lineal entre δ y d.

Un caso particular de la relación anterior es,

$$d = b\delta,$$

que describe una relación lineal entre δ y d mediante una línea recta que pasa por el eje de coordenadas del gráfico.

Se puede obtener cualquier tipo de relación que nosotros deseemos ajustando los valores numéricos anteriormente mencionados, donde cada tipo de relación correspondería a un tipo diferente de MDS. Se pueden distinguir, en general, dos grandes grupos de MDS:

- **MDS métrico.** Engloba aquellas relaciones $d=f(\delta)$ descritas por una fórmula que sigue las relaciones de la métrica. Por ejemplo, para una relación $d=b\delta$ si doblamos δ se dobla d (Torgerson).
- **MDS no-métrico.** Es posible también alcanzar una relación que no es descrita por ninguna fórmula métrica y que se define sólo por el hecho de que $d=f(\delta)$ describe un patrón creciente o decreciente. En este caso sólo depende del orden de las proximidades pero no hay relación métrica (Ordinal).

III. 8.4.3.3 Definiendo una función objetivo.

En este punto, es apropiado decir algo acerca del procedimiento computacional usado para obtener la configuración de los datos. Existen diferentes aproximaciones computacionales de MDS. Algunas de éstas separan claramente la definición de la configuración deseada del procedimiento computacional usado para obtenerla. Otras aproximaciones hacen esta separación menos visible.

Aquí, se ha adoptado, como aconseja en [9], hacer una separación clara de la definición y del procedimiento computacional, pues esto tiene importantes ventajas.

Comenzamos definiendo una *función objetivo*. Ésta adopta distintos nombres en la literatura, como pueden ser: función de error, función de evaluación, función de mérito, el propio de función objetivo y muchos otros. En cualquier caso ésta proporciona un valor que muestra cómo de bien (o de mal) la configuración representa a los datos. Para formar esta función vamos a seguir los pasos que proponen en [9].

1. El concepto fundamental es que las proximidades se conviertan en distancias a través de una cierta función, esto es:

$$d_{ij} = f(\delta_{ij})$$

donde "f()" debe ser de algún tipo específico.

2. El siguiente paso para formar dicha función, y puesto que estamos viendo cómo de bien se ajusta la configuración a los datos, parece evidente que será la diferencia entre ambas cantidades, o sea:

$$f(\delta_{ij}) - d_{ij}$$

3. Puesto que a nosotros nos interesan todas las discrepancias que surjan de la ecuación anterior, esto es, positivas o negativas, tomamos el cuadrado de la cantidad anterior.

$$[f(\delta_{ij}) - d_{ij}]^2$$

4. Ahora hacemos una suma para todas las proximidades.

$$\sum_i \sum_j [f(\delta_{ij}) - d_{ij}]^2$$

5. El siguiente paso es dividir la cantidad anterior por un factor de escala para hacer del error una medida relativa. El factor de escala usado más habitual es:

$$\sum_i \sum_j d_{ij}^2$$

6. Finalmente, se toma la raíz cuadrada de todo lo anterior, resultando:

$$f - stress = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j [f(\delta_{ij}) - d_{ij}]^2}{\sum_i \sum_j d_{ij}^2}}$$

Esta ecuación se conoce como "stress formula 1" y fue desarrollada por Joseph B. Kruskal, autor de [9]. Existen variantes a esta fórmula pero únicamente en el factor de escala, como por ejemplo la "stress formula 2".

Una interpretación rápida de la fórmula anterior es la siguiente, si f-stress crece cuando aumentamos el número de dimensiones, esa configuración es peor. Lo que buscamos por tanto es la función f que minimice f-stress, esto es:

$$\text{stress}(\Delta, X) = \min_{\text{all } f} f\text{-stress}(\Delta, X, f) \quad \rightarrow \text{Hay que usar la mejor } f.$$

Por otro lado señalar que f-stress es siempre ≥ 0 . Si f-stress = 0, entonces hemos conseguido la representación perfecta puesto que se cumple exactamente la igualdad $d_{ij} = f(\delta_{ij})$, para todos los valores de proximidad δ_{ij} . Por supuesto, esto no es posible conseguir en la mayoría de los casos.

III. 8.4.3.4 Procedimiento computacional.

- El primer paso consiste en encontrar la mejor f. Esto significa minimizar el f-stress para Δ y X fijas.
- Una vez que la función f esté fija y decidamos cuál será nuestra función objetivo, sólo nos quedará encontrar la mejor configuración X partiendo de los datos Δ . Hay que ver la configuración que alcanza el mejor valor posible de la función objetivo. Procedimiento steepest descent.
- Hay que encontrar un punto de partida para la búsqueda. Existen varias opciones para elegir el punto de partida, que serán tratadas cuando expliquemos los resultados obtenidos. Desde este punto de partida buscamos un camino que haga disminuir el stress y seguimos por ahí hasta que no podamos disminuirlo más, así sucesivamente hasta que no podamos descender de ninguna manera.

Hay que señalar que en la práctica estos pasos no se han seguido puesto que el programa informático SPSS hace todos esos pasos automáticamente y sólo muestra el cómo varía el stress con respecto a un aumento en la dimensionalidad.

III. 8.4.3.5 Dimensionalidad.

Hay que diferenciar entre “la mejor dimensión” y “la dimensión más apropiada”. A simple vista parece sencillo elegir entre estas dos expresiones, pero vamos a aclarar su significado.

- Mejor dimensión. Hace referencia al número de dimensiones que obtiene un valor más pequeño del error (stress).
- Dimensión más apropiada. Hace referencia al número de dimensiones interpretables. Este número puede ser menor o mayor que el número de dimensiones reales. Se pueden dar los dos casos siguientes:
 - Que haya más direcciones interpretables que dimensiones reales. Puede haber, en un espacio bidimensional por ejemplo, cuatro direcciones interpretables. Esto puede suceder por muchas razones: que un atributo aunque se hace presente en la interpretación su efecto no sea tan fuerte como para crear una nueva dimensión, que una característica está relacionada con otra o bien porque sólo es relevante para unos pocos estímulos, etc.
 - Se puede dar el caso contrario, en el que haya por ejemplo, tres dimensiones reales pero sólo dos sean interpretables. Además una interpretación puede concernir a dos dimensiones reales.

En cualquier caso elegir el número de dimensiones tal, que proporcione un menor error, no es garantía de obtener los mejores resultados. En nuestro trabajo, la elección del número de dimensiones se ha realizado atendiendo al criterio subjetivo a la hora de interpretar la configuración, esto es, viendo cuántas dimensiones somos capaces de interpretar y considerando la fórmula que explicaremos en un apartado posterior, que especifica el número máximo de dimensiones interpretables para un conjunto finito de objetos de entrada.

III. 8.4.3.6 Diagrama de Scattering o diagrama de Shepard.

En el diagrama de Scattering para cualquier configuración se representan las distancias frente a las proximidades y la función f que mejor se adapta a dicha configuración. El diagrama contiene puntos (δ_{ij}, d_{ij}) para cada proximidad.

Los valores $f(\delta_{ij})$ no son realmente distancias sino “cantidades” que simulan distancias.

Examinando un diagrama de Scattering lo primero que se puede observar es cómo se ajustan los puntos del Scattering a la función f .

Además se pueden ver también la interpretación de la fórmula de stress 1 y 2.

Interpretación geométrica de f-stress 1

$$\frac{\text{raíz_cuadrada_de_la_discrepancia_vertical_entre_el_punto_y_la_curva}}{\text{raíz_cuadrada_de_la_distancia_entre_el_punto_y_el_eje}}$$

Interpretación geométrica de f-stress 2

$$\frac{\text{raíz_cuadrada_de_la_discrepancia_vertical_entre_el_punto_y_la_curva}}{\text{raíz_cuadrada_de_la_distancia_del_punto_a_la_línea}}$$

Una ventaja que posee MDS es que es una técnica muy robusta, en el sentido que si una configuración es obtenida usando una función f determinada, ésta no será muy diferente de usar otra configuración con otra f . Esto ocurre cuando el número de objetos I es elevado, o al menos cuando cumple cierta condición que veremos a continuación. Si el número de objetos I no es elevado dicha robustez desaparece.

Otro fenómeno importante denominado "degeneración" se muestra también de forma clara en el diagrama de Scattering. Este fenómeno significa que los puntos se sitúan en un pequeño número de localizaciones, esto ocurre si se cumplen las condiciones siguientes:

- Se usa MDS no métrico.
- Los objetos tienen una agrupación propia que proviene de su naturaleza. Normalmente en tres o menos grupos, donde las (di)similitudes dentro de estos grupos son (menores)mayores que con respecto a los demás grupos.

III. 8.4.3.7 Interpretación de la configuración.

Tomada una decisión acerca de la configuración elegida y, por tanto, del número de dimensiones, el siguiente paso consiste en interpretar estas dimensiones, esto es, darles un nombre sobre conceptos que tengan relación con los datos de entrada. Esto no es una tarea fácil y, en nuestro caso, nos hemos ayudado de otra técnica de análisis multivariante, como es el Análisis Jerárquico de Grupos (HCA), que será explicada en un apartado posterior.

Un aspecto importante a tener en cuenta es, dado un número de objetos, qué número máximo de dimensiones podrá explicar de forma coherente ese conjunto de datos de entrada. Existe una regla que nos proporciona esta elección.

$$(I-1) \geq 4R$$

donde I es el número de estímulos y R el número de dimensiones.

Hay que mirar en la frontera de la configuración.

Como dijimos anteriormente los ejes de la configuración deben tener un significado dentro del campo de aplicación tratado. Debido a que en muchas ocasiones el número de dimensiones obtenidas es mayor a tres, se hace imposible su representación espacial. Para solucionar esto se pueden ver las proyecciones de los puntos en dichos ejes representados dos a dos.

Hay que hacer notar que estos ejes pueden ser rotados, ya que lo que se mantiene y, en lo que se basa MDS, es en las distancias existentes entre los puntos, las cuales se conservan incluso cuando se rotan los ejes, sin embargo las proyecciones cambian drásticamente.

En algunas ocasiones la interpretación de las dimensiones no es nada fácil y como solución a esto se intentan agrupar los objetos de entrada en grupos o regiones que tengan características compartidas. Esto ocurre a menudo cuando se representa la solución 2-D para datos cuya dimensionalidad óptima es mayor.

III. 8.4.3.8 Escalado multidimensional ponderado WMDS (Weighted Multidimensional Scaling)

Si bien esta técnica no ha sido utilizada a lo largo de este proyecto, la explicaremos brevemente porque considera aspectos que antes no fueron tratados. Toda la teoría explicada hasta ahora se conoce con el nombre de CMDS (Classical MDS) pues fue la que se desarrolló en los inicios. Sólo considera una matriz de proximidades, lo que a efectos prácticos significa que los valores incluidos en esta matriz son resultado de la media de los distintos valores individuales proporcionados por los diversos individuos.

Ahora bien, consideremos que para cada uno de los K individuos que establecen los criterios de proximidad entre los objetos de entrada, se construye una matriz distinta. Existirán por tanto K matrices de proximidades distintas.

La característica principal de cada una de esas matrices es que contienen rasgos distintivos del criterio similitud de cada individuo, puesto que cada uno de ellos verá los objetos de entrada según su juicio.

La notación explicada en un apartado anterior sigue siendo válida, pero ahora hay que introducir esos rasgos diferenciadores en las fórmulas, para ello se hace uso de unos pesos "Weighted" que contienen esta información. Habrá por tanto K pesos distintos " w_k "