

**UNIVERSIDAD DE SEVILLA
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
Departamento de Matemática Aplicada II**

**ANÁLISIS DEL SISTEMA TFTS:
REPARTO DE BENEFICIOS USANDO
LA TEORÍA DE JUEGOS**

Rubén Mena Pavón

PROYECTO FIN DE CARRERA

**Tutores:
Andrés Jiménez Losada
Encarnación Algaba Durán**

Sevilla, Abril de 2006

Sumario	I
----------------------	---

Capítulo 1. Teoría de Juegos Cooperativos

1.1. Introducción.....	1
1.2. Juegos cooperativos de n personas de utilidad transferible.....	2
1.3. El core y el ε -core. Estabilidad.....	5
1.4. El conjunto de negociación.....	10
1.5. El núcleo y el prenúcleo.....	11
1.6. El nucleolus.....	16
1.7. El valor de Shapley.....	20
1.8. El valor de Tijs.....	23

Capítulo 2. Descripción y análisis del sistema TFTS

2.1. Introducción.....	25
2.2. Sistemas terrenales versus sistemas por satélite.....	26
2.3. Otros estándares.....	27
2.3.1. Sistema japonés.....	28
2.3.2. Sistema de EE.UU. y Canadá.....	28
2.4. Desarrollo del sistema <i>TFTS</i>	29
2.4.1. Preparación del estándar.....	29
2.4.2. Protocolos de acuerdo.....	30
2.5. Características del sistema <i>TFTS</i>	30
2.6. Arquitectura del sistema <i>TFTS</i>	31
2.6.1. Subsistema de estaciones de tierra <i>GSS</i>	33
2.6.1.1. Estación <i>GS</i>	34

2.6.1.2. Centro <i>GSC</i>	39
2.6.2. Subsistema de explotación.....	41
2.6.2.1. Centro <i>NMC</i>	41
2.6.2.2. Centro <i>OMC</i>	41
2.6.3. Subsistema de tarificación.....	42
2.6.4. Proceso de establecimiento de una llamada.....	43
2.6.5. Criterios para la planificación de estaciones.....	44
2.7. Interfaz radioeléctrica.....	45
2.8. Interfaces e interconexión con las redes.....	49
2.9. Disponibilidad.....	51
2.10. Características de la estación de avión <i>AS</i>	51
2.11. Estudio de las pérdidas en la propagación.....	54
2.12. Estado actual del sistema <i>TFTS</i>	64

Capítulo 3. Sistema TFTS y reparto de beneficios.

3.1. Introducción.....	66
3.2. El problema de la implantación del sistema TFTS y la Teoría de Juegos.....	67
3.3. Justificación de la propuesta equitativa.....	73
3.4. <i>k</i> -juegos.....	90

Referencias	98
--------------------------	----

Sumario

El sistema *TFTS* surge con la necesidad manifiesta de los pasajeros de aeronaves de mantenerse comunicados durante los vuelos de larga o media duración, tal y como sucede en la mayoría de los vuelos europeos. Para ofrecer dicho servicio de telefonía y datos, es necesario el despliegue de una amplia infraestructura ya sea en tierra con la instalación de estaciones base que proporcionen cobertura o ya sea en el equipamiento electrónico de las propias aeronaves. Se trata pues, de un proyecto que involucra numerosos actores de varios países europeos los cuales han de decidir sobre diversas cuestiones como, por ejemplo, el número de estaciones base a instalar, su ubicación o la inversión realizada por cada país. Todos estos problemas fueron resueltos, quedando como escollo final para poder ofrecer el servicio el reparto de los beneficios generados de la explotación del sistema. Es lo que llamamos el problema del sistema *TFTS*. Es aquí donde usamos la teoría de juegos y donde, como se verá en el capítulo tercero, nos será de gran ayuda para encontrar un reparto de los beneficios que satisfaga a todos los países.

En el capítulo primero se hace una exposición de los principales conceptos de solución de la Teoría de Juegos Cooperativos que nos serán de utilidad para resolver nuestro problema. Es de carácter teórico e introduce primero las definiciones básicas de la Teoría de Juegos Cooperativos para luego exponer los diversos conceptos de solución.

El capítulo segundo describe el sistema *TFTS*, comparándolo primero con otros sistemas y describiendo su arquitectura. Se reflejan además aspectos técnicos como son la interfaz radioeléctrica o la descripción de los componentes electrónicos. Por último,

se hace un estudio de la propagación radioelétrica y de las pérdidas que una señal sufre en el trayecto. Gracias a la ayuda del programa matemático *Maple* se han podido representar gráficas que nos dan una idea de cómo se produce la propagación de la señal.

El tercer y último capítulo, hace una descripción detallada del problema del *TFTS* acompañando la exposición en todo momento de un ejemplo clarificador que nos ayuda a comprender el problema. Por último, se hace uso de los conceptos introducidos en el primer capítulo para aplicarlos al problema del sistema *TFTS*. Se analizan cuáles son las soluciones aportadas por los distintos conceptos de solución para el caso específico de nuestro problema. Se concluye que los conceptos de solución analizados llegan a una solución similar, aunque el enfoque del problema haya sido diferente en cada uno de ellos. Todo ello prueba que la solución aportada es una solución óptima para el problema planteado y que dicha solución establece un reparto que satisfará a todos los participantes del juego.

Capítulo 1

Teoría de Juegos Cooperativos

1.1. Introducción

La teoría de juegos es la rama de las matemáticas que estudia la toma de decisiones por parte de los individuos, contando para ello con una fuente limitada de información. Múltiples son los ámbitos en la vida diaria en los que el individuo ha de decidir entre varias opciones a tomar siempre teniendo como objetivo la satisfacción de su propio interés.

Ahora bien, por propia conveniencia el individuo se plantea la coalición, es decir, la cooperación con otros individuos para maximizar su propio beneficio, estableciéndose una interrelación entre ellos en la que todos salen beneficiados y obteniendo unos resultados mejores a los que hubieran conseguido en caso de haber actuado de forma individual.

Llegado este punto convendría aclarar el significado de la palabra “juego”. Con juego nos referimos a la situación en la que el individuo ha de tomar una decisión y en función de dicha decisión llevar a cabo una serie de acciones destinadas a la consecución de un objetivo.

Se puede hacer la distinción entre teoría de juegos cooperativos y teoría de juegos no cooperativos. En la primera los participantes en el juego establecen relaciones entre ellos en las que se comprometen a colaborar y en las que prima el beneficio común. En

los juegos no cooperativos prima el interés individual y se persigue éste sin ningún tipo de relación con otras partes.

Desde el punto de vista matemático, ambos tipos de juegos difieren entre si en el concepto de solución. Por concepto de solución entendemos las diferentes formas que hay para llegar a un reparto de los beneficios. Para el caso cooperativo, el concepto de solución tiene en cuenta diversos aspectos como son los intercambios (de información, de dinero, etc.) entre los participantes del juego o los compromisos y acuerdos entre ellos. Dichos aspectos son los que propician que al final del juego un participante en el mismo resulte más beneficiado que en el caso de haber actuado de forma individual y razonablemente satisfecho. Este capítulo está dedicado a los juegos cooperativos de utilidad transferible.

1.2. Juegos cooperativos de n personas de utilidad transferible

Sea $N = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de jugadores o entidades, una **coalición** es un subconjunto de N , y la denotamos por S . A la coalición constituida por todos los n jugadores, la llamamos la **gran coalición** (coalición N) y a la coalición sin ningún miembro, coalición vacía. Una coalición es formada mediante acuerdos entre sus miembros y, cuando un miembro pertenece a ella, no puede establecer posibles acuerdos con miembros pertenecientes a otra coalición. La formación de coaliciones es la acción que determina la cooperación entre los jugadores.

En resumen, la característica fundamental de una coalición es el acuerdo y el compromiso entre los miembros para permanecer en esa coalición constituyendo una entidad coordinada cuyo fin es optimizar el beneficio de todos los miembros pertenecientes a ella. Cuando el concepto de beneficio conlleva la idea positiva de ganancias entonces la optimización es maximizar. Sin embargo, si se estiman costos para desarrollar proyectos entonces buscamos minimizarlos. Consideraremos en este trabajo sólo juegos cooperativos de repartos de ganancias.

El término función característica fue introducido por primera vez por Von Neumann y Morgenstern [15], padres de la teoría de juegos. Para cada subconjunto S del total N , la **función característica** v de un juego nos da el máximo beneficio $v(S)$ que los miembros de S están seguros de poder recibir si actúan conjuntamente formando dicha coalición, sin establecer relación alguna con ningún miembro no perteneciente a S . Esto es, la utilidad de la coalición S .

Definición 1.1: Un **juego cooperativo de utilidad transferible** es un par (N, v) donde N es un conjunto de jugadores y v una función característica sobre las coaliciones de dichos jugadores verificando que $v(\emptyset) = 0$. El conjunto de juegos de utilidad transferible se denota por G^n . Se identificará $v \in G^n$ con el hecho de que (N, v) es un juego cooperativo de utilidad transferible.

La exigencia de condiciones sobre la función característica establece propiedades importantes de los juegos. Éstas se definen a continuación.

Definición 1.2: Sea (N, v) un juego cooperativo de utilidad transferible, decimos que es:

a) **Monótono** si para todo $S, T \subseteq N$ con $S \subseteq T$ entonces $v(S) \leq v(T)$.

b) **Superaditivo** si para todo $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$ se verifica que

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

c) **Convexo** si para todo $S, T \subseteq N$ se satisface que

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

De forma más intuitiva esta inecuación se expresa de la forma $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T)$.

d) **0-normalizado** si para todo $i \in N$ entonces $v(\{i\}) = 0$.

Estas definiciones dan una idea de que el aumento de cooperación siempre es beneficioso para los jugadores. Así, la monotonía obliga a que cuanto mayor sea la coalición mayor ganancia se consigue.

El cumplimiento del principio de superaditividad asegura que el beneficio obtenido por una coalición formada por la unión de dos coaliciones S y T sin ninguna relación entre ellas, ha de ser mayor al obtenido si ambas coaliciones hubieran actuado por separado.

Del mismo modo que la suma de los beneficios obtenidos por dos jugadores actuando de forma independiente ha de ser menor que la suma de los beneficios obtenidos si actúan de forma asociada.

Los juegos superaditivos en los que al menos es posible establecer una coalición que consiga aumentar el beneficio total de sus miembros son llamados **esenciales** y aquellos en los que no es posible establecer coalición alguna que mejore los beneficios totales son los **no esenciales**. De forma matemática, para que un juego sea esencial se ha de cumplir que $v(S \cup T) > v(S) + v(T)$ al menos una vez.

La convexidad generaliza la propiedad de superaditividad a todos los pares de coaliciones indicando que la intersección sólo puede actuar en una de ellas. El beneficio de dos coaliciones por separado a lo que se le resta obviamente el beneficio obtenido por jugadores pertenecientes a las dos coaliciones (para no sumarlos dos veces) es siempre menor que el beneficio de las dos coaliciones trabajando unidas.

Por otra parte, la 0-normalización nos indica que no es beneficioso para un jugador no cooperar con ningún otro.

Todo juego termina en un estado final, resultado de las acciones llevadas a cabo por los distintos jugadores y coaliciones. Este estado final, se expresa de forma cualitativa mediante el **vector de pagos** $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde cada x_i representa el beneficio obtenido por cada jugador de la gran coalición N al final del juego. Con beneficio hace referencia al resultado obtenido por cada participante, y dependiendo de la naturaleza del juego, este puede ser desde dinero obtenido por ejemplo, por una empresa, escaños obtenidos por un partido político o número de llamadas cursadas por un operador de telefonía. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que el beneficio vendrá dado en unidades monetarias. Dado un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq N$ una coalición, entenderemos por $x(S)$ el beneficio obtenido por S con dicho vector, esto es,

$$x(S) = \sum_{j \in S} x_j.$$

Definición 1.3: Una **solución** para un subconjunto $G \subseteq G^n$ de juegos establece para cada jugador de G^n un conjunto razonable de vectores de pagos basándose en reglas matemáticas.

Suponiendo que todos los jugadores llegan a un acuerdo, es decir, se establece la gran coalición, el beneficio total de ésta viene representado por $v(N)$. Si reciben al final del juego el vector de pagos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ parece lógico exigir el **principio de eficiencia**:

$$v(N) = \sum_{j \in N} x_j = x(N).$$

Ésta afirmación indica que el valor de la gran coalición será repartido en su totalidad entre los miembros que la forman.

Por otro lado, el **principio de individualidad racional** establece

$$x_j \geq v(\{j\}), \text{ para cada } j \in N.$$

La afirmación indica que el pago al jugador j , x_j , sea como mínimo la cantidad $v(\{j\})$, es decir, la cantidad que el jugador j conseguiría por si mismo en el juego.

Definición 1.4: Los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen el principio de eficiencia son llamados vectores de pago eficientes o **preimputaciones** para el juego de n -personas. Denotaremos por $I^*(v)$ al conjunto de todas las preimputaciones del juego v :

$$I^*(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\}.$$

Las preimputaciones que cumplen además el principio de individualidad racional visto anteriormente, son llamadas **imputaciones** para un juego cooperativo (N, v) . El conjunto de todas las imputaciones se denota por $I(v)$:

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N\}.$$

Una vez realizada esta introducción a los juegos cooperativos de N personas y su notación matemática, ahora se van a analizar los diferentes conceptos de solución para hacer el reparto de los beneficios entre los participantes del juego. Cada uno de ellos responde a una filosofía diferente de entender una forma razonable de establecer repartos.

1.3. El *core* y el ε -*core*. Estabilidad.

La idea de *core* fue introducida en la teoría de juegos por primera vez por Gillies (1953) [9] y completada posteriormente por Shapley y Shubik (1971) [20] que introdujeron la noción de ε -*core*, para los casos en los que el *core* de un juego fuese vacío. A continuación se introducen algunas definiciones:

Definición 1.5: Para cualquier $v \in G^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, el ε -*core* $C_\varepsilon(v)$ de un juego v está dado por:

$$C_\varepsilon(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S) - \varepsilon, \forall S \neq \emptyset, N\}.$$

Particularmente, el *core* $C(v)$ de un juego $v \in G^n$ viene dado por el caso $\varepsilon = 0$, es decir,

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S), \forall S \neq \emptyset, N\}.$$

El *core* de un juego puede ser interpretado como el conjunto de todas las preimputaciones que no pueden ser mejoradas por el valor de ninguna otra coalición, cumpliéndose en particular el principio de eficiencia, esto es, hemos extendido el principio de racionalidad a todas las coaliciones. Pero ésta puede ser una condición muy restrictiva sobre las preimputaciones para que puedan formar parte de este conjunto pudiendo llegar a ser el *core* un conjunto vacío. Por ello, se suavizan las condiciones añadiendo un coste ε , de tal forma que las preimputaciones que formen parte de este nuevo conjunto no deban suponer un reparto de beneficios tan elevado para la coalición S como exige el *core*. Esta idea permite justificar la introducción de ε -*cores* con $\varepsilon \geq 0$.

Por otro lado, el *core* no es en general un sólo vector de pagos y puede ser entonces un conjunto demasiado grande. Tiene sentido entonces, que las coaliciones puedan aumentar sus exigencias respecto a lo racional (si $S \subseteq N$, $x(S) \geq v(S)$ en un vector de pagos x). Eso lleva a entender la existencia de ε -cores con $\varepsilon < 0$.

Se verá ahora otra forma de entender el *core* de un juego. Pero, antes de exponer el siguiente teorema, definimos el concepto de **dominación**: sea $v \in G^n$, $x, y \in I(v)$ y sea

$S \subset N$ con $S \neq \emptyset$, decimos que x domina a y ($x \text{ dom } y$) si existe una coalición no vacía S tal que

$$x_i > y_i, \forall i \in S \text{ y } x(S) \leq v(S).$$

La interpretación del enunciado es que si $x \text{ dom } y$, el pago que x asigna a cada uno de los componentes de la coalición S es siempre mayor que el que asigna y . Por otra parte, la condición $x(S) \leq v(S)$, se exige para indicar que no está en el *core*, es decir, el reparto que asigna x es más desfavorable que el que obtendrían los miembros de S formando coalición. Es por tanto una condición menos restrictiva que la que exige el *core*.

El siguiente teorema es consecuencia directa de la definición de *core* y dominación. Se expone, además, una nueva forma equivalente para definir el *core*.

Teorema 1.6: Sea $v \in G^n$

- (i) Si $x \in C(v)$, entonces no existe $y \in I(v)$ tal que $y \text{ dom } x$.
- (ii) Si el juego v es superaditivo, entonces

$$C(v) = \{x \in I(v) : \text{no existe } y \in I(v) \text{ con } y \text{ dom } x\}.$$

Se adjunta, a continuación, la definición de conjunto estable, es decir, aquellos conjuntos de pagos más exigentes desde el punto de vista de la dominación.

Definición 1.7: Sea $v \in G^n$. Un conjunto $V \subset I(v)$ se dice un **conjunto estable** para el juego v si satisface las dos condiciones siguientes:

- (i) Si $x \in V$ e $y \in V$, entonces x no domina a y .
- (ii) Si $x \in I(v) \setminus V$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \text{ dom } x$.

A un conjunto estable pertenecen por tanto las imputaciones que no pueden establecer relaciones de dominación entre ellas. Una imputación que pertenezca a un conjunto estable si puede, sin embargo, establecer relación de dominación sobre otra no perteneciente a un conjunto estable.

En general no es cierto que el *core* sea estable, aunque sí existe una fuerte relación como pone de manifiesto el siguiente teorema.

Teorema 1.8: Sea (N, v) un juego cooperativo. Si $C(v)$ es estable entonces es el único conjunto estable del juego.

A continuación, se expone un ejemplo para ilustrar los conceptos anteriores y que puede encontrarse en el texto de T. Driessen (1988) [5].

Ejemplo 1.9. Consideremos una economía consistente en varios comerciantes de dos tipos y de dos artículos A y B complementarios que son utilizables sólo en iguales cantidades. Además, el conjunto N de comerciantes se divide en dos subconjuntos disjuntos no vacíos P y Q , donde los comerciantes en P tienen inicialmente una unidad del artículo A y los comerciantes en Q tienen inicialmente $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $\alpha \geq 0$, unidades del artículo B . La función ganancia neta v que describe, para cualquier subconjunto de comerciantes, el valor monetario más grande posible de la salida de los artículos por el subconjunto implicado de comerciantes está dada por

$$v(S) = \min\{|S \cap P|, \alpha |S \cap Q|\}, \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Esta situación económica puede ser modelada como un juego cooperativo (N, v) donde su conjunto de jugadores $N = P \cup Q$ consiste en comerciantes y su función característica v es precisamente la función de ganancia neta. Notar que $v(\{i\}) = 0$ para todo $i \in N$, pues un comerciante no posee por si solo ningún artículo utilizable.

Trataremos el caso de tres comerciantes donde $P = \{1\}$, $Q = \{2, 3\}$ y $0.5 \leq \alpha \leq 1$. En este caso,

$$\begin{aligned} v(N) &= 1, \\ v(\{1, 2\}) &= v(\{1, 3\}) = \alpha, \\ v(S) &= 0, \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Para este caso,

$$\begin{aligned} C(v) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_2 \leq 1 - \alpha, x_3 \leq 1 - \alpha\} \\ &= \text{conv}\{(1, 0, 0), (\alpha, 1 - \alpha, 0), (\alpha, 0, 1 - \alpha), (2\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)\}. \end{aligned}$$

El *core* es un cuadrilátero dentro del conjunto de imputaciones, que es degenerado (es decir, se trataría de un solo punto) sólo si $\alpha = 1$.

Para estudiar la estabilidad, notemos que la dominación sólo es posible a través de las coaliciones $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$. Para toda $x, y \in I(v)$ tenemos

x *dom* y a través de $\{1,2\}$ si y sólo si $x_1 > y_1, x_2 > y_2, x_3 \geq 1 - \alpha$,

x *dom* y a través de $\{1,3\}$ si y sólo si $x_1 > y_1, x_3 > y_3, x_2 \geq 1 - \alpha$.

Se sigue que el conjunto de todas las imputaciones que son dominadas por algún elemento del *core* a través de las coaliciones $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$ respectivamente es igual a

$$\{y \in I(v) : y_2 < 1 - \alpha < y_3\} \text{ y } \{y \in I(v) : y_3 < 1 - \alpha < y_2\}.$$

Obtenemos que $domC(v) = I(v) - W$ donde el conjunto W está dado por

$$W = C(v) \cup conv\{(0, \alpha, 1 - \alpha), (0, 1 - \alpha, \alpha), (2\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)\}.$$

Donde $domC(v)$ es el conjunto de todas las imputaciones las cuales son dominadas por imputaciones del *core*, es decir,

$$domC(v) = \{x \in I(v) : \text{existe } y \in V \text{ tal que } y \text{ dom } x\}.$$

Si $\alpha = 0.5$, $W = C(v)$ y además, el *core* es el único conjunto estable.

En el caso $0.5 < \alpha \leq 1$, el juego posee una inmensa colección de conjuntos estables de la forma

$$C(v) \cup conv\{(0, \beta, 1 - \beta), (2\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)\}.$$

Donde β es cualquier número real satisfaciendo $1 - \alpha \leq \beta \leq \alpha$.

Una descripción gráfica del problema es la que sigue:

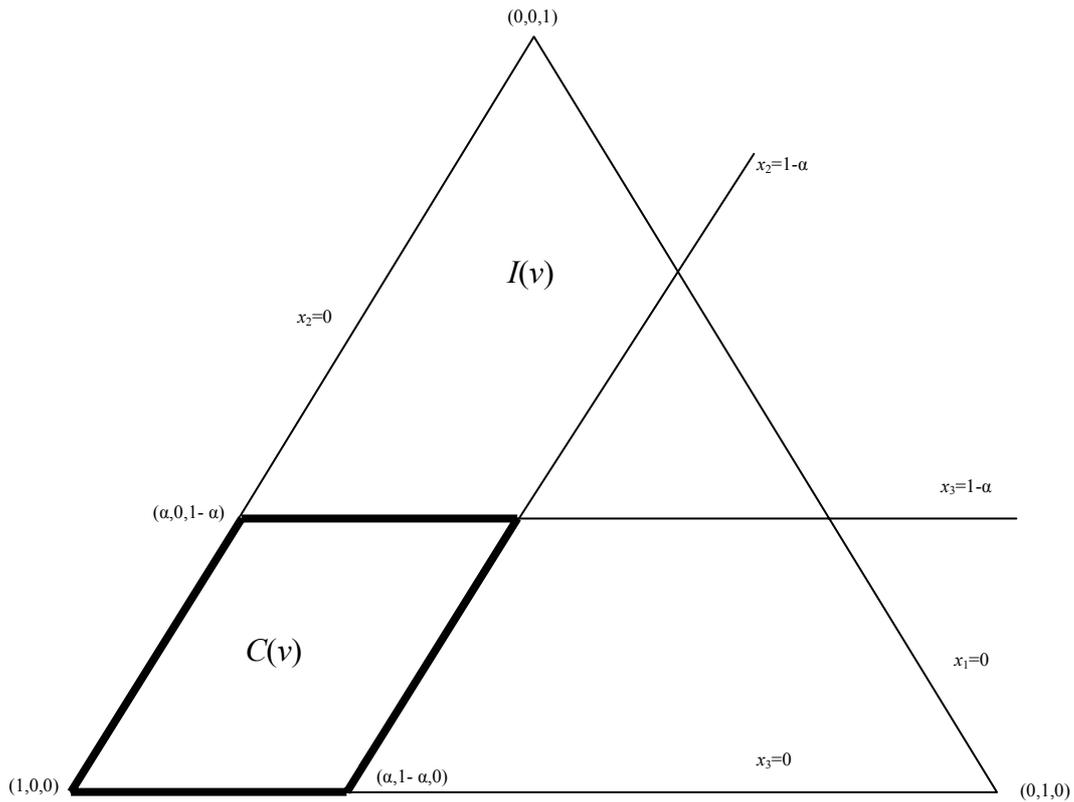


Figura 1.1

1.4. El conjunto de negociación

Hasta ahora no se han considerado las posibles negociaciones entre los miembros de una misma coalición en el transcurso del juego. Puede ocurrir que uno de los jugadores tenga mayor poder que otros y pueda influir sobre ellos mediante posibles amenazas y modificar así los posibles repartos. La idea del conjunto de negociación fue introducida por Aumann (1964) [2].

Se denota como Γ_{ij} al conjunto de todas las coaliciones que contienen al jugador i pero no al j , en el supuesto de que $i \neq j$.

Sea $v \in G^n$ y $x \in I(v)$. Una **objeción** del jugador i contra otro jugador j con respecto a la imputación x en el juego v es un par (y, S) donde $S \in \Gamma_{ij}$ e $y = (y_k)_{k \in S}$ es una $|S|$ -upla de números reales satisfaciendo

$$y(S) = v(S) \text{ y } y_k > x_k, \text{ para } k \in S.$$

El jugador i está planteando al j el hecho de que puede formar una nueva coalición S independiente de la gran coalición donde no esté j y ofrecer un vector de pagos eficiente y que mejore la oferta que x supone para los jugadores de S . Por tanto, los jugadores de S verían esta situación ventajosa y mostrarían su aprobación a formar parte de S y separarse de la gran coalición, dejando j a un lado.

Una **contraobjeción** a la objeción anterior (y, S) es un par (z, T) , donde $T \in \Gamma_{ji}$ y $z = (z_k)_{k \in T}$ es una $|T|$ -upla de números reales satisfaciendo

$$z(T) = v(T), z_k \geq x_k, \text{ para } k \in T \text{ y } z_k \geq y_k \text{ para } k \in T \cap S.$$

La contraobjeción es la reacción del jugador j ante la objeción planteada por i . En este caso, j también propone formar una nueva coalición T donde no esté i y ofrecerle un vector de pago z más ventajoso para los miembros de T de lo que es x . Objeción y contraobjeción pueden ser interpretados como oferta y contraoferta.

Definición 1.10: Sea $v \in G^n$. Una imputación $x \in I(v)$ se dice que pertenece al **conjunto de negociación** $M(v)$ del juego v si para cualquier objeción de un jugador contra otro con respecto a la imputación x en el juego v , existe una contraobjeción.

Si a la objeción y han respondido con una contraobjeción z nos quedamos con la imputación inicial x que es una solución de compromiso que perjudica menos a los jugadores.

El *core* de un juego consiste en imputaciones x verificando que

$$v(S) \leq x(S), \text{ para toda } S \subseteq N, \text{ con } S \neq \emptyset.$$

Por tanto, no hay objeciones posibles con respecto a cualquier elemento del *core* (es absurdo que haya quejas u objeciones por parte de los miembros de S a la imputación x pues ésta los está favoreciendo) y en consecuencia, el *core* siempre está incluido en el conjunto de negociación, siendo éste útil en casos en los que el *core* es un conjunto

vacío (ya que en otro caso, nos quedamos con el *core* que es un conjunto más útil pues nos acota o aproxima más a una solución única). Por tanto, se verifica que:

$$C(v) \subset M(v), \text{ para todo } v \in G^n .$$

1.5. El núcleo y el prenúcleo

El núcleo fue introducido por primera vez por Schmeidler en 1969 [18] y se trata de un subconjunto del conjunto de negociación al igual que el *core*. Por su parte, el prenúcleo fue introducido por Maschler, Peleg y Shapley (1979) [14] y es una simplificación del núcleo y se usa para determinar el núcleo de ciertos tipos de juegos. Ambos conceptos se basan en la idea de exceso, que también aparece en otras definiciones de solución.

Definición 1.11: Sea $v \in G^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $S \subset N$. El **exceso** de la coalición S con respecto al vector x en el juego v está definido por

$$e^v(S, x) = v(S) - x(S) .$$

En caso de ser positivo el exceso representa la ganancia que obtendría la coalición S si sus miembros abandonan el vector de pago x . Si el exceso es negativo, los miembros de S en este caso obtendrían pérdidas si abandonasen x es decir, el reparto dado por x les es más favorable.

Daremos ahora las definiciones que nos llevarán al núcleo.

Sea $v \in G^n$ y $x \in I^*(v)$. El **máximo excedente** del jugador i sobre otro jugador j con respecto a la preimputación x en el juego v está dado por

$$s_{ij}^v(x) = \max\{e^v(S, x) : S \in \Gamma_{ij}\} .$$

Si $x_j > v(\{j\})$ y $s_{ij}^v(x) > s_{ji}^v(x)$, el jugador i pesa más que el jugador j con respecto a la imputación $x \in I(v)$.

Para el juego v y para una imputación x fijada, buscamos cuál es la coalición que excluye al jugador j en la que más se pierde (en la que el exceso es más grande).

El máximo excedente puede ser interpretado entonces como una medida del poder que tiene el jugador i para influir en el jugador j con respecto a la preimputación x .

Si tomásemos la imputación x , el jugador i tiene más razones para negarse a admitir dicha imputación que j pues sus pérdidas son mayores (j está quedando beneficiado pues la imputación x le asigna una ganancia mayor a la que conseguiría si jugara de forma individual). Es por ello por lo que se dice que i pesa más que j .

El núcleo se define como el conjunto de todas las imputaciones para las cuales ningún jugador pesa más que otro, es decir, ningún jugador tiene más poder que otro y por tanto no puede amenazarlo. El prenúcleo consiste en las preimputaciones para las cuales dos jugadores tienen el mismo poder respecto a sus mutuas amenazas:

Definición 1.12: Sea $v \in G^n$. El **núcleo** $K(v)$ de un juego v es el conjunto de todas las imputaciones $x \in I(v)$ satisfaciendo que para todo $i, j \in N$, $i \neq j$

$$(s_{ij}^v(x) - s_{ji}^v(x))(x_j - v(\{j\})) \leq 0 \quad \text{y} \quad (s_{ji}^v(x) - s_{ij}^v(x))(x_i - v(\{i\})) \leq 0.$$

El **prenúcleo** $K^*(v)$ de un juego v es el conjunto de todas las preimputaciones $x \in I^*(v)$ satisfaciendo

$$s_{ji}^v(x) = s_{ij}^v(x) \quad \text{para todo } i, j \in N, i \neq j.$$

Estas condiciones expresan matemáticamente el hecho de que ningún jugador puede pesar más que otro.

Podemos afirmar entonces que $K(v) \subset M(v)$ para todo $v \in G^n$, es decir, el núcleo impone mayores restricciones a las imputaciones que son solución que el conjunto de negociación. Además se cumple que

$$K(v) \cap C_\varepsilon(v) = K^*(v) \cap C_\varepsilon(v), \quad \text{para todo } v \in G^n \text{ y todo } \varepsilon \leq 0.$$

Teorema 1.13: Sea $v \in G^n$ y $x \in K(v) \cup K^*(v)$, se verifica:

(i) Propiedad de sustitución del (pre)núcleo. Si dos jugadores i y j están en **sustitución** en un juego v , es decir, si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$, entonces $x_i = x_j$.

(ii) Sea $i \in N$ un jugador **dummy** en el juego v , esto es, $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = v(\{i\})$ para todo $i \in S$, $S \subseteq N$, entonces $x_i \leq v(\{i\})$. En particular, el núcleo posee la propiedad del jugador dummy: $x_i = v(\{i\})$ siempre que $x \in K(v)$.

Ejemplo 1.14: Consideramos el juego (N, v) del Ejemplo 1.9 donde $N = \{1, 2, 3\}$. Los jugadores 2 y 3 están en sustitución (y por tanto, el pago asignado a ambos debe ser el mismo) en el juego v y de ahí, se sigue que el (pre)núcleo del juego v sólo contiene preimputaciones de la forma $x = x(\beta) = (1 - 2\beta, \beta, \beta)$ donde $\beta \in \mathbb{R}$.

Entonces tenemos

$$s_{12}(x) = \max\{2\beta - 1, \alpha - 1 + \beta\},$$

$$s_{21}(x) = \max\{-\beta, -2\beta\},$$

$$s_{23}(x) = s_{32}(x), \quad s_{13}(x) = s_{12}(x), \quad s_{31}(x) = s_{21}(x).$$

Así,

$$s_{12}(x) - s_{21}(x) > 0, \quad \text{si } \beta > \frac{1}{2}(1 - \alpha),$$

$$s_{12}(x) - s_{21}(x) < 0, \quad \text{si } \beta < \frac{1}{2}(1 - \alpha),$$

$$s_{12}(x) - s_{21}(x) = 0, \quad \text{si } \beta = \frac{1}{2}(1 - \alpha).$$

Se obtiene que $K(v) = K^*(v) = \left\{ \frac{1}{2}(2\alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha) \right\}$.

Ejemplo 1.15: Consideremos un juego de 8-personas cuyo conjunto de jugadores N está particionado en dos subconjuntos distintos $P = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Q = \{5, 6, 7, 8\}$. Sea la función característica v dada por

$$v(N) = 40, \quad v(N - \{i\}) = 34, \quad \text{para todo } i \in N,$$

$$v((P \cup \{q\}) - \{p\}) = \alpha, \quad \text{para todo } p \in P \text{ y todo } q \in Q,$$

$$v((Q \cup \{p\}) - \{q\}) = \alpha, \quad \text{para todo } p \in P \text{ y todo } q \in Q,$$

$$v(S) = 0, \quad \text{en otro caso,}$$

donde $\alpha \geq 0$.

Por la propiedad de sustitución del (pre)núcleo aplicado a los miembros de P y Q respectivamente en el juego v , deducimos que el (pre)núcleo del juego v contiene preimputaciones de la forma

$$x = x(\beta) = (\beta, \beta, \beta, \beta, 10 - \beta, 10 - \beta, 10 - \beta, 10 - \beta),$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$. Evidentemente, $x(\beta) \in I(v)$ sii $0 \leq \beta \leq 10$ pues si no habría jugadores que recibirían pagos negativos algo que no estarían dispuestos a aceptar. El máximo excedente queda determinado para todo $p \in P$, $q \in Q$ por

$$s_{pq}(x) = \max\{-4\beta, -2\beta - 10 + \alpha, -\beta + 4, \beta - 20, 2\beta - 30 + \alpha\},$$

$$s_{qp}(x) = \max\{-2\beta - 10 + \alpha, -\beta - 10, \beta - 6, 2\beta - 30 + \alpha, 4\beta, -40\}.$$

Estamos interesados en el signo positivo o negativo de la diferencia $s_{pq}(x) - s_{qp}(x)$ para cualquier $p \in P$ y cualquier $q \in Q$ (ver la tabla adjunta). Podemos concluir que

$$\begin{aligned} K^*(v) &= \left\{ x(\beta) : 5 - \frac{\alpha}{2} \leq \beta \leq 5 + \frac{\alpha}{2} \right\}, & \text{si } \alpha \geq 19, \\ &= \left\{ x(\beta) : 5 - \frac{\alpha}{2} \leq \beta \leq \alpha - 14 \text{ ó} \right. \\ &\quad \left. \beta = 5 \text{ ó } 24 - \alpha \leq \beta \leq 5 + \frac{\alpha}{2} \right\}, & \text{si } \frac{38}{3} \leq \alpha < 19, \\ &= \{x(\beta) : \beta = 5\}, & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(v) &= \{x(\beta) : 0 \leq \beta \leq 10\}, & \text{si } \alpha \geq 19, \\ &= \{x(\beta) : 0 \leq \beta \leq \alpha - 14 \text{ ó} \\ &\quad \beta = 5 \text{ ó } 24 - \alpha \leq \beta \leq 10\}, & \text{si } 14 \leq \alpha < 19, \\ &= \{x(\beta) : \beta = 5\}, & \text{si } 0 \leq \alpha < 14. \end{aligned}$$

En particular, $K(v) = K^*(v) \cap I(v)$ y así, el núcleo del juego v donde $\alpha \geq \frac{38}{3}$ está estrictamente contenido en el prenúcleo porque una parte del prenúcleo se sitúa fuera

del conjunto de imputaciones. Si el número real no negativo α es suficientemente grande ($\alpha \geq 19$), entonces el (pre)núcleo del juego v consiste en un segmento recto.

Si el número α es ó demasiado grande ó demasiado pequeño, entonces el (pre)núcleo de v consiste en dos segmentos rectos desconectados y un punto simple.

Notar que el núcleo (prenúcleo respectivamente) degenera en tres puntos siempre que $\alpha = 14$ ($\alpha = \frac{38}{3}$). La imputación $x(\beta)$ cuando $\beta = 5$ ocupa una posición central dentro del núcleo y de hecho, representará el llamado **nucleolus** del juego v , que será introducido a continuación.

Para el caso $\frac{38}{3} \leq \alpha < 19$ tenemos,

β	$s_{pq}(x)$		$s_{qp}(x)$	β
$\beta \leq 5 - \frac{\alpha}{2}$	-4β		$-2\beta - 10 + \alpha$	$\beta \leq \frac{1}{3}(\alpha - 4)$
$5 - \frac{\alpha}{2} \leq \beta \leq \alpha - 14$	$-2\beta - 10 + \alpha$		$\beta - 6$	$\frac{1}{3}(\alpha - 4) \leq \beta \leq 24 - \alpha$
$\alpha - 14 \leq \beta \leq \frac{1}{3}(34 - \alpha)$	$-\beta + 4$		$2\beta - 30 + \alpha$	$24 - \alpha \leq \beta \leq 5 + \frac{\alpha}{2}$
$\beta \geq \frac{1}{3}(34 - \alpha)$	$2\beta - 30 + \alpha$		$4\beta - 40$	$\beta \geq 5 + \frac{\alpha}{2}$

Tabla 1.2

Para el caso $\alpha \geq 19$ tenemos,

β	$s_{pq}(x)$		$s_{qp}(x)$	β
$\beta \leq 5 - \frac{\alpha}{2}$	-4β		$-2\beta - 10 + \alpha$	$\beta \leq 5$
$5 - \frac{\alpha}{2} \leq \beta \leq 5$	$-2\beta - 10 + \alpha$		$2\beta - 30 + \alpha$	$5 \leq \beta \leq 5 + \frac{\alpha}{2}$
$\beta \geq 5$	$2\beta - 30 + \alpha$		$4\beta - 40$	$\beta \geq 5 + \frac{\alpha}{2}$

Tabla 1.3

Para el caso $0 \leq \alpha < \frac{38}{3}$ tenemos,

β	$s_{pq}(x)$		$s_{qp}(x)$	β
$\beta \leq -\frac{4}{3}$	-4β		$-2\beta - 10 + \alpha$	$\beta \leq \frac{1}{3}(\alpha - 4)$
$-\frac{4}{3} \leq \beta \leq \frac{1}{3}(34 - \alpha)$	$-\beta + 4$		$\beta - 6$	$\frac{1}{3}(\alpha - 4) \leq \beta \leq \frac{34}{3}$
$\beta \geq \frac{1}{3}(34 - \alpha)$	$2\beta - 30 + \alpha$		$4\beta - 40$	$\beta \geq \frac{34}{3}$

Tabla 1.4

1.6. El nucleolus

Una demostración algebraica de que el núcleo es un conjunto no vacío fue presentada por Maschler y Peleg en 1966 [13]. De la misma forma, se demostró que el núcleo $K(v)$ de un juego v siempre interseca cualquier conjunto no vacío de $C_\epsilon(v) \cap I(v)$. En base a este resultado, Schmeidler en 1969 [18] definió el nucleolus.

Primeramente se introducirán unas definiciones previas, basándonos en la definición 1.11 de exceso:

Sea $v \in G^n$. Para cualquier n -upla $x \in \mathbb{R}^n$, sea $\theta(x)$ la 2^n -upla cuyas componentes son los excesos $e(S, x)$, $S \subset N$ dispuestos en orden no creciente. Así,

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x) \text{ siempre que } 1 \leq i \leq j \leq 2^n.$$

Los excesos implicados son normalmente no positivos (es decir, elementos del *core*) y así, los excesos son considerados como pérdidas o reclamaciones, mientras que los vectores $\theta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ son interpretados como **vectores reclamación**.

Usamos el orden lexicográfico para ordenar los vectores reclamación teniendo en cuenta su reclamación más grande o, su segunda reclamación más grande y así sucesivamente. Añadimos el subíndice L al signo de desigualdad para indicar que estamos usando orden lexicográfico.

Por tanto, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, escribimos,

$\theta(x) <_L \theta(y)$ si existe un entero $1 \leq k \leq 2^n$
 tal que $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ para $1 \leq i \leq k$,
 mientras que $\theta_k(x) < \theta_k(y)$;
 $\theta(x) \leq_L \theta(y)$ si ó bien $\theta(x) = \theta(y)$ ó $\theta(x) < \theta(y)$.

El hecho de que las componentes de $\theta(x)$ estén ordenadas en orden no creciente y que los vectores reclamación se comparen por orden lexicográfico, indica que se está dando más importancia a los jugadores con un mayor exceso, es decir, a los jugadores con mayor peso (los jugadores que más perderían si abandonasen la coalición S).

Definición 1.16: El **nucleolus** $\eta(v)$ de un juego $v \in G^n$ es el conjunto de todas las imputaciones $x \in I(v)$ satisfaciendo

$$\theta(x) \leq_L \theta(y), \text{ para todo } y \in I(v).$$

Por tanto, el nucleolus consiste en las imputaciones que minimizan los vectores reclamación $\theta(x)$ en el orden lexicográfico sobre el conjunto de imputaciones. El nucleolus contiene por tanto los vectores $x \in I(v)$ que establecen un reparto entre los miembros de una coalición de forma que las reclamaciones o quejas sean mínimas, es decir, el grado de conformidad de los miembros de la coalición sea el mayor posible.

Schmeidler en 1969 [18] dio una prueba algebraica y topológica de la existencia del nucleolus en términos de funciones continuas y conjuntos compactos no vacíos. El algoritmo que se expondrá a continuación corresponde a una prueba constructiva de existencia y unicidad del nucleolus presentada por Maschler, Peleg y Shapley en 1979 [14].

Los pasos en la construcción del nucleolus son los siguientes: primero determinamos el conjunto compacto convexo no vacío de las imputaciones que minimizan el máximo exceso sobre las coaliciones no triviales. Entonces apartamos las coaliciones cuyo exceso con respecto a las imputaciones de este conjunto no pueda ser reducido. Después, minimizamos el máximo exceso sobre las coaliciones restantes. El subconjunto resultante compacto convexo del conjunto de imputaciones previo es en general no vacío y de nuevo, apartamos las coaliciones cuyo exceso con respecto a las

imputaciones de este segundo conjunto no puede ser inferior. Este procedimiento continúa, y se termina cuando todas las coaliciones no triviales son apartadas. Formalmente describimos el proceso como sigue:

Algoritmo: Sea $v \in G^n$ donde $n \geq 2$. Definimos

$$X^0 = I(v), \quad \Sigma^0 = \{S \subset N : S \neq N, \emptyset\},$$

y para $j=1,2,\dots,\kappa$, definimos recursivamente

$$e^j = \min_{x \in X^{j-1}} \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x),$$

$$X^j = \left\{ x \in X^{j-1} : \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x) = e^j \right\},$$

$$\Sigma_j = \left\{ S \in \Sigma^{j-1} : e(S, x) = e^j \text{ para todo } x \in X^j \right\},$$

$$\Sigma^j = \Sigma^{j-1} - \Sigma_j,$$

donde $\kappa = \min\{j : j \geq 1, \Sigma^j = \emptyset\}$.

Ejemplo 1.17: Aplicaremos el procedimiento anterior al juego del Ejemplo 1 de tres personas donde $0.5 \leq \alpha \leq 1$. Se tiene que $I(v) = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ y también

$$e^1 = \min_{x \in I(v)} \max\{-x_1, -x_2, -x_3, x_3 + \alpha - 1, x_2 + \alpha - 1\}$$

Notar que $-x_3 \leq \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ si y sólo si $x_3 + \alpha - 1 \geq \frac{1}{2}(\alpha - 1)$. De esta equivalencia y las

definiciones anteriores se obtiene:

$$e^1 = \frac{1}{2}(\alpha - 1),$$

$$X^1 = \left\{ \frac{1}{2}(2\alpha, 1 - \alpha, 1 - \alpha) \right\},$$

$$\Sigma_1 = \{\{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\},$$

$$\Sigma^1 = \{\{1\}, \{2, 3\}\},$$

$$e^2 = \max\{-\alpha, \alpha - 1\} = \alpha - 1,$$

$$X^2 = X^1,$$

$$\Sigma_2 = \{\{2, 3\}\},$$

$$\Sigma^2 = \{\{1\}\},$$

$$e^3 = -\alpha,$$

$$X^3 = X^1,$$

$$\Sigma_3 = \{\{1\}\},$$

$$\Sigma^3 = \emptyset \text{ y } \kappa=3.$$

Pasamos ahora a enunciar una serie de proposiciones que se derivan de la definición de nucleolus.

Proposición 1.18: Sea $v \in G^n$ donde $n \geq 2$.

- (i) Los números reales e^j están bien definidos para $1 \leq j \leq \kappa$, y forman una sucesión decreciente.
- (ii) Los conjuntos X^j son subconjuntos compactos convexos no vacíos de \mathbb{R}^n para $1 \leq j \leq \kappa$ tales que $I(v) \supset X^1 \supset X^2 \supset \dots \supset X^\kappa$.
- (iii) Los conjuntos Σ_j de coaliciones son no vacíos para $1 \leq j \leq \kappa$.
- (iv) Sea $1 \leq j \leq \kappa$, $x \in X^\kappa$ e $y \in X^{j-1} \setminus X^j$. Entonces $\theta(x) \leq_L \theta(y)$.
- (v) $\theta(x) \leq_L \theta(y)$ para todo $x \in X^\kappa$ y todo $y \in I(v) \setminus X^\kappa$.

Y a continuación el siguiente teorema:

Teorema 1.19: El nucleolus $\eta(v)$ de un juego (N, v) consiste en un único punto y coincide con el centro lexicográfico del juego X^κ .

Este teorema es una consecuencia directa de los resultados anteriores. La caracterización geométrica del nucleolus indica que el nucleolus está siempre contenido en la intersección no vacía de cualquier ε -core con el conjunto de imputaciones. También se da una prueba de la existencia del núcleo y el conjunto de negociación por el hecho de que el nucleolus siempre pertenece al núcleo. Así, obtenemos que, si $v \in G^n$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}$ entonces

$$\eta(v) \in C_\varepsilon(v) \cap I(v) \text{ siempre que } C_\varepsilon(v) \cap I(v) \neq \emptyset.$$

En particular $\eta(v) \in C(v)$ siempre que $C(v) \neq \emptyset$.

Teorema 1.20: $\eta(v) \in K(v)$ para todo $v \in G^n$, es decir, el nucleolus está incluido en el núcleo.

Por otra parte, se define el **prenucleolus** de un juego $v \in G^n$ como el conjunto de todas las preimputaciones $x \in I^*(v)$ satisfaciendo $\theta(x) \leq_L \theta(y)$ para todo $y \in I^*(v)$. Al igual

que el nucleolus consiste en un único punto, está bien definido y coincide con el nucleolus siempre que éste sea individualmente racional.

1.7. El valor de Shapley

Shapley introdujo un concepto de solución que se reduce a un solo punto en 1953 [19], basándose en una serie de axiomas razonables. Aunque inicialmente definió su valor sólo para juegos superaditivos luego se generalizó. El valor de Shapley es considerado uno de los más interesantes conceptos de solución en la Teoría de Juegos Cooperativos, ver, por ejemplo Roth (1988) [17].

Las operaciones que podemos definir sobre los juegos son:

1. Suma de juegos independientes, $v, w \in G^n$

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S).$$

2. Producto por un escalar, $c \in \mathbb{R}$

$$(cv)(S) = cv(S).$$

3. Permutación. Consideremos $\Pi(N)$ el conjunto de permutaciones sobre N . Se define $\forall \pi \in \Pi(N)$:

$$\pi v(\pi S) = v(S).$$

Un juego obtenido por la permutación de otro se le llama **juego abstracto**.

Con las dos primeras operaciones, G^n es un espacio lineal de dimensión $(2^n - 1)$, ya que podemos encontrar una base dada por los denominados **juegos de unanimidad**, $\{v_R : R \subseteq N, R \neq \emptyset\}$, dados por:

$$v_R(S) = \begin{cases} 1, & \text{si } S \supseteq R, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así todo juego cooperativo $v \in G^n$ puede escribirse como

$$v = \sum_{\{R \subseteq N: R \neq \emptyset\}} c_R v_R,$$

donde los coeficientes c_R se denominan **dividendos de Harsanyi** y se calculan como

$$c_R(v) = \sum_{T \subseteq R} (-1)^{r-t} v(T).$$

Dado un vector d cualquiera de \mathbb{R}^n , siempre podemos construir un juego aditivo definido por

$$d(S) = \sum_{i \in S} d_i.$$

Dos juegos v y w son **estratégicamente equivalentes** si existen $c \geq 0$ y $d \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$v = cw + d.$$

Definición 1.21: (N, v) es un **juego de suma constante** si se verifica que

$$v(S) + v(N - S) = v(N), \quad \forall S \subseteq N.$$

Con el valor de Shapley se trata de decidir una distribución adecuada del valor de la gran coalición entre los jugadores, teniendo en cuenta la aportación de cada jugador. El **valor** de la distribución es una aplicación Φ tal que

$$\Phi : P \subseteq G^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi[v] = (\Phi_i[v]).$$

Los axiomas que llevan al valor de Shapley son:

Axioma 1. Axioma de Simetría. Por la propiedad de permutación antes vista, sabemos que un juego y una permutación suya son el mismo juego pero ordenado de otra forma, así, si $v \in G^n$

$$\Phi_{\pi_i}[\pi v] = \Phi_i[v], \quad \forall \pi \in \Pi(N), \quad \forall i \in N.$$

Axioma 2. Axioma de Eficiencia. Este axioma implica distribuir el valor de la gran coalición entre los jugadores. Para todo $v \in G^n$

$$\sum_{i \in N} \Phi_i[v] = v(N).$$

Axioma 3. Axioma de Linealidad. Si $v, w \in G^n$

$$\Phi_i[\alpha v + \beta w] = \alpha \Phi_i[v] + \beta \Phi_i[w], \quad \text{donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Axioma 4. Axioma del jugador dummy. Si i es un jugador dummy en $v \in G^n$, entonces

$$\Phi_i[v] = v(\{i\}).$$

Shapley (1953) probó que sólo existe un posible valor que verifique estos cuatro axiomas. Este único valor es el que llamamos valor de Shapley.

Para probar dicho teorema, entre otros resultados, es necesario establecer el valor de Shapley para los juegos de unanimidad.

Lema 1.22: Para $c \in \mathbb{R}$, $0 < r < +\infty$, tenemos que:

$$\Phi_i[cv_R] = \begin{cases} \frac{c}{r}, & \text{si } i \in R, \\ 0, & \text{si } i \notin R. \end{cases}$$

siendo $r = |R|$ y el conjunto R un soporte para el juego de unanimidad v_R . De esta forma se reparte equitativamente el beneficio entre todos los miembros de la coalición.

Teorema 1.23: Existe un único valor que satisface los cuatro axiomas y es llamado **valor de Shapley**. Viene dado por la fórmula:

$$\Phi_i[v] = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \gamma_n(S) [v(S) - v(S \setminus i)],$$

donde para $s = |S|$,

$$\gamma_n(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

Corolario 1.24: Si v y w son estratégicamente equivalentes, es decir, $w = cv + d$, entonces se tiene que:

$$\Phi_i[w] = c\Phi_i[v] + d_i.$$

Corolario 1.25: Si v es un juego de suma constante, es decir, se verifica que

$$v(S) + v(N - S) = v(N), \quad \forall S \subseteq N,$$

entonces:

$$\Phi_i[v] = 2 \left(\sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \gamma_n(S) v(S) \right) - v(N).$$

El valor de Shapley es un valor probabilística, dado a priori, y nos ofrece un vector de pagos solución que puede complacer a los miembros de la coalición.

1.9. El valor de Tijs

El valor de Tijs [21] de un juego puede interpretarse como el compromiso entre el mayor y el menor valor de un juego. El mayor valor del juego (N, v) que se puede obtener es el vector $M(v)$ con dimensión n donde

$$M_i(v) = v(N) - v(N \setminus i), \text{ para todo } i \in N.$$

Al valor $M_i(v)$, lo llamamos **utopía** para el jugador i en la gran coalición N y es el máximo pago que dicho jugador puede conseguir. Dicho valor se obtiene tal como muestra la expresión restando al valor de la gran coalición el valor de la gran coalición formada en este caso sin contar con el jugador i . El problema del vector de pagos utopía es que no es en general eficiente y sobrepasa el valor de la gran coalición.

El beneficio que le queda al jugador $i \in S$ con $S \subseteq N$, si se forma la coalición S y todos los jugadores que pertenecen a dicha coalición obtienen el máximo pago es,

$$R^v(S, i) = v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v).$$

Por otra parte, el menor valor que el jugador i puede conseguir en el juego (N, v) viene dado por,

$$m_i(v) = \max_{\{S \subseteq N: i \in S\}} R^v(S, i),$$

Esto da lugar al vector n dimensional, denotado por $m(v)$ y cuyas componentes son los valores mínimos que cada jugador puede conseguir en el juego (N, v) .

Definición 1.26: Un juego (N, v) es llamado casi-equilibrado, si se cumple

(i) $m(v) \leq M(v)$.

(ii) $\sum_{i=1}^n m_i(v) \leq v(N) \leq \sum_{i=1}^n M_i(v)$.

Para un juego casi-equilibrado v el valor de Tijs es la única preimputación (el único vector de pagos que cumple el principio de eficiencia) perteneciente al intervalo cerrado $[m(v), M(v)]$ en \mathbb{R}^n . El **valor de Tijs** para el juego v , lo denotamos por $\tau(v)$ y viene definido de la siguiente manera:

$$\tau(v) = m(v) + \lambda(M(v) - m(v)),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ satisface $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$ (principio de eficiencia).

A continuación, se adjunta una interpretación gráfica para ilustrar el valor de Tijs, en el caso en que estemos en \mathbb{R}^3 . En ella se muestra como el valor de Tijs es la intersección del segmento de recta que va desde el valor mínimo $m(v)$ al valor máximo $M(v)$ con el plano obtenido de imponer la condición de eficiencia.

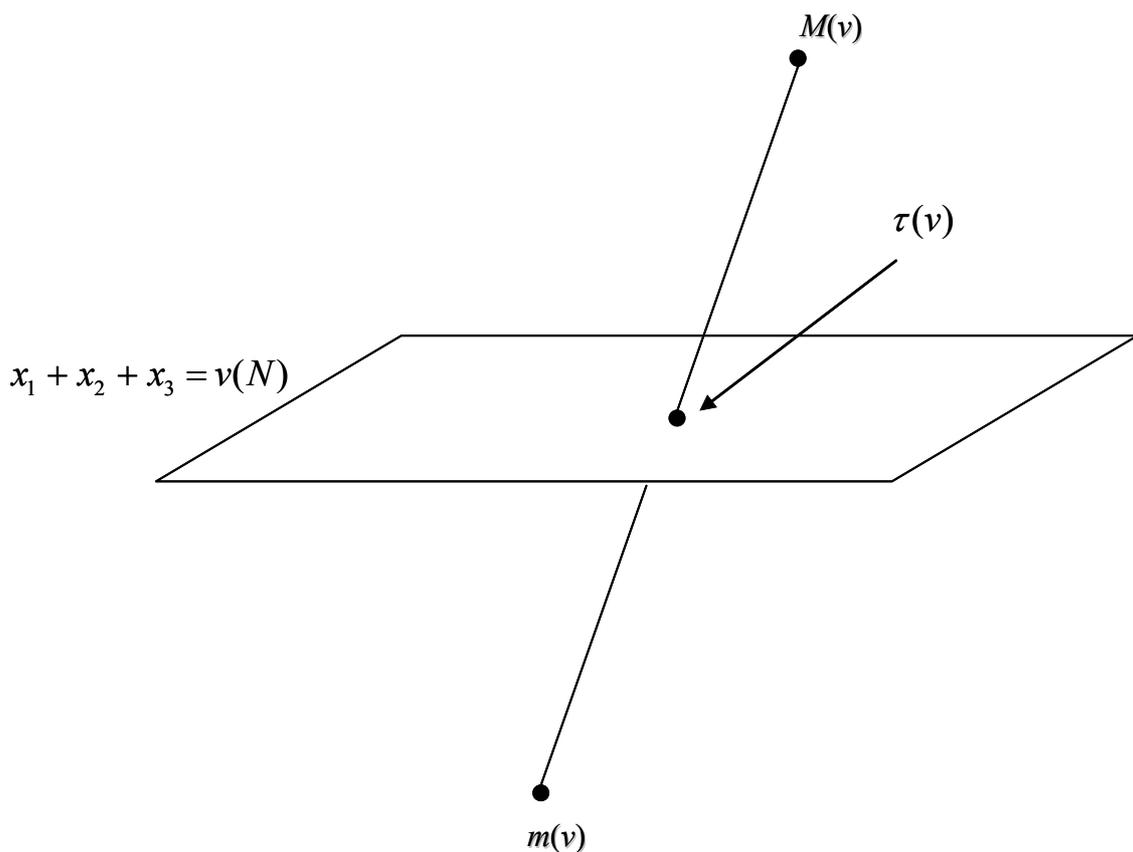


Figura 1.5

Capítulo 2

Descripción y análisis del sistema TFTS

2.1. Introducción

Durante los últimos años, se ha hecho patente la utilidad de un sistema de comunicaciones que permitiera a los pasajeros de aeronaves en vuelo comunicarse con correspondientes pertenecientes a las redes públicas. Esta necesidad, un hecho casi evidente en vuelos de larga duración, se ha visto confirmada por diversos estudios de mercado para los vuelos intra-europeos.

Por ello, los operadores de telecomunicación han tratado de ofrecer a los pasajeros de aeronaves en vuelo un servicio de telefonía de Correspondencia Pública en Aeronaves, *CPA*, basándose en diversas alternativas. La opción más inmediata para prestar este servicio sería la utilización de las redes celulares disponibles en la actualidad. Existen, sin embargo, razones que obligan a descartar esta solución. Pasamos a exponerlas a continuación:

1°. Las aeronaves se mueven sobre un área amplia, que puede abarcar distintos países cuyos sistemas celulares obedecerán a distintas normas, generalmente incompatibles entre si y con estados de desarrollo muy diferentes.

2°. Existen normativas específicas sobre la utilización de equipos radioeléctricos a bordo de las aeronaves que es necesario cumplir por razones de seguridad. La utilización de terminales móviles celulares está prohibida a bordo de los aviones.

3°. El servicio móvil terrestre tiene atribuidas bandas de frecuencias diferentes a las del servicio móvil aeronáutico.

4°. Finalmente hay que considerar que estaciones radioeléctricas operando a gran altura, pueden provocar interferencias sobre sistemas alejados, pertenecientes a otros servicios, y perturbar el funcionamiento de las redes celulares diseñadas para móviles situados en tierra.

Todo ello no permite la utilización del sistema *GSM* (Global System Mobile) para este tipo de servicio a pesar de su carácter europeo. Se impone, por tanto, que el servicio de correspondencia pública aeronáutica sea ofrecido por un sistema específico. Aún así, recientemente se han llevado a cabo diversos estudios para investigar sobre la posible compatibilidad de ambos sistemas [7].

2.2. Sistemas terrenales versus sistemas por satélite

Las opciones disponibles para la implantación de un sistema independiente son, la utilización de satélites, como por ejemplo el sistema *INMARSAT AERO*, o la utilización de sistemas terrenales (que utilizan estaciones situadas en tierra).

Los sistemas por satélite encuentran su ámbito de aplicación natural sobre grandes extensiones de agua o tierra firme desértica o deshabitada, sobre las que no se puede dar un servicio basándose en un sistema terrenal. Son, en general, sistemas cuya eficacia en la utilización del espectro, para una capacidad dada, suele ser inferior a la de un sistema terrenal. Permiten ofrecer un servicio de cobertura mundial con un equipamiento único.

Los sistemas terrenales, por el contrario, permiten una mayor reutilización de las frecuencias disponibles, mediante una organización celular, logrando una elevada capacidad, particularmente

útil en zonas del planeta densamente pobladas, con un elevado tráfico de aeronaves. Estos sistemas presentan una ventaja de tipo económico clara sobre los sistemas espaciales; el equipamiento necesario, tanto en las aeronaves como en tierra, tiene un precio inferior al que requieren los sistemas espaciales, con lo que se puede ofrecer un servicio más barato al usuario final.

Este capítulo se dedica fundamentalmente al análisis de un sistema *CPA* de tipo terrenal, basado en la norma conocida como **Terrestrial Flight Telephone System, TFTS**, especificada por el grupo *RES 5* del Instituto Europeo de Normas de Telecomunicación (*ETSI*).

2.3. Otros estándares

Desde 1989 vienen funcionando dos sistemas terrenales de correspondencia pública con aeronaves. Uno de ellos en Estados Unidos y Canadá, el otro en Japón. A continuación, se adjunta un cuadro donde se comparan las principales características de ambos sistemas con el sistema europeo, que comenzó a funcionar en 1994.

	Japón	EE.UU. y Canadá	Europa
Banda de frecuencias (MHz)	800 - 900	849 - 851/894 - 896	1.670 - 1.675/1.800 - 1.805
Tipo de modulación tierra-aire	PM	SSB	QPSK
Tipo de modulación aire-tierra	PM	SSB	QPSK
Canales de RF/MHz	40	155	32
Ancho de banda del canal (KHz)	25	6	30,3
Número de canales vocales/portadora	1	1	4 (8)
Canales vocales/MHz	40	155	128 (256)
PIRE estación terrestre (dBm)	21	20	Hasta 49
PIRE estación de avión (dBm)	8	14,8	10
Ganancia ant. estación terr. (dBi)	13	3	10

Ganancia ant. estación aer. (dBi)	0	0	0
Compensación efecto Doppler	NO	SI	NO

Tabla 2.1

PIRE: Potencia Isótropa Radiada Equivalente.

PM: Phase Modulation.

SSB: Single Side Band.

QPSK: Quadrature Phase Shift Keying.

RF: Radio Frequency.

2.3.1. Sistema japonés

El sistema japonés se basa en una explotación conjunta con la red telefónica móvil celular de aquel país, de modo que forma un sistema integrado de comunicaciones móviles, estando a disposición de la aviación en general (incluida la aviación privada). Ofrece servicios de telefonía y de datos, y admite la conmutación de llamada en curso. Se hace uso de la banda de 800-900 MHz con una separación entre canales de 25 KHz, resultando un total de 80 canales dúplex. Utiliza la modulación de fase.

2.3.2. Sistema de EE.UU. y Canadá

Conocido como *GTE-Airphone*, utiliza un ancho de banda de 4 MHz, divididos en dos bandas de 2 MHz, una para el enlace aire-tierra y otra, separada 45 MHz de la anterior, para el enlace tierra-aire, ambas en la banda de 800 MHz. Cada una de ellas se divide en 10 sub-bandas de 200 KHz lo que da como resultado un total de 310 canales y 10 frecuencias piloto con bandas de guarda. Se utiliza una modulación de banda lateral única para las comunicaciones telefónicas y de datos, sobre un canal de 6 KHz.

Las frecuencias son reutilizadas siguiendo un esquema de tipo celular. El sistema está concebido de manera que los transceptores de tierra funcionen siempre en frecuencias fijas; los transceptores de aeronaves pueden utilizar cualquier frecuencia de las prefijadas.

No soporta el traspaso de llamadas en curso entre células. El sistema está diseñado para no tener que transferir llamadas en curso, sino para asignar los canales de acuerdo con preferencias determinadas por un algoritmo de selección que maximiza el tiempo de conexión.

Los aviones van equipados con terminales que pueden ser extraídos al insertar una tarjeta de crédito; a partir de ese momento el pasajero puede hacer uso de ellos en su propio asiento.

Ya en diciembre de 1989 había 900 aeronaves equipadas para el servicio, que fueron ampliadas en 600 unidades durante el siguiente año. Por término medio, los aviones de fuselaje ancho llevan cuatro transceptores y los de cabina estrecha dos.

2.4. Desarrollo del sistema *TFTS*

2.4.1. Preparación del estándar

El sistema *TFTS* ha nacido en el seno del *ETSI* en colaboración con el *EAEC* (European Airlines Electronic Committee). La responsabilidad del *ETSI* es la especificación de la funcionalidad global del sistema y de la interfaz radioeléctrica entre las estaciones de aeronave y las situadas en tierra.

Los sistemas de telecomunicación de a bordo, incluyendo los transceptores *TFTS*, han sido normalizados para su utilización en todo el mundo por el *AEEC* (Airlines Electronic Engineering Committee).

Se definieron dos fases en la preparación del estándar: aplicación telefónica para 1992 y aplicaciones de facsímil y transmisión de datos para 1993.

La prestación de un servicio de esta naturaleza, involucra a un elevado número de actores de diversos países y con distintas competencias: Operadores de Telecomunicación de varios países

Europeos, Líneas Aéreas, *SITA* (Société Internationale de Télécommunications Aéronautique), posibles Proveedores de Servicio y numerosos Organismos de Normalización (*ETSI*, *AEEC*, *EAEC*, etc.).

2.4.2. Protocolos de acuerdo

Para coordinar todas las posturas e intereses se firmó un «Protocolo de Acuerdo sobre la Estandarización e Implementación de un Sistema Terrestre de Telefonía en Vuelo» por operadores de telecomunicación de trece países europeos. Además, se firmó un «Acuerdo de Cooperación» que involucra también a las Líneas Aéreas y a *SITA*. Telefónica suscribió ambos acuerdos durante 1991.

En estos acuerdos, y en su desarrollo posterior, se adquirieron algunos compromisos significativos encaminados a ofrecer un servicio de correspondencia pública aeronáutica con cobertura europea en 1994 utilizando la norma *TFTS*.

2.5. Características del sistema *TFTS*

Los servicios ofrecidos por el sistema *TFTS* van destinados exclusivamente a los pasajeros de las aeronaves. Se excluyen, por lo tanto, las comunicaciones operacionales y de cabina. Además, por razones operativas, los pasajeros sólo podrán iniciar llamadas, pero no recibirlas.

El sistema *TFTS* ofrece un servicio móvil aire-tierra completamente digital con acceso a las redes de comunicaciones públicas. El conjunto de facilidades y servicios prestados se implementó en dos fases:

- En la primera fase se ofreció el servicio de telefonía aire-tierra, incluyendo la posibilidad de señalización multifrecuencia DTMF. Esta fase comenzó con la apertura del servicio en 1994.
- En la segunda fase se añaden además servicios de datos (4,8 kbits/s), facsímil y algunos servicios tierra-aire (radiomensajería).

La voz se codifica inicialmente a 9,6 kbits/s, lo que proporciona al usuario una calidad subjetiva alta. En fases posteriores del desarrollo del sistema la codificación se lleva a cabo a 4,8 kbits/s, lo que permite duplicar la capacidad del sistema, manteniendo la misma ocupación de frecuencias. Los objetivos de calidad en cuanto a disponibilidad del sistema *TFTS* se pueden resumir en las siguientes probabilidades:

- i. Probabilidad de que un intento de llamada sea aceptado por el sistema: superior o igual al 93 %.
- ii. Probabilidad de terminación forzada de una llamada durante un traspaso: inferior o igual al 2 %.

El segundo objetivo de calidad se considera prioritario pues la terminación forzada de una llamada en curso es un efecto mucho más desagradable para el usuario que el hecho de no poder iniciar una comunicación.

El dimensionamiento del sistema, y en particular el número de canales vocales por estación de base, se lleva a cabo para cumplir estos objetivos teniendo en cuenta que el tráfico esperado, en las zonas de máximo tráfico de aeronaves, está comprendido entre 39 y 60 erlangs/100.000 km².

2.6. Arquitectura del sistema *TFTS*

Para la realización de éste apartado se ha seguido el texto de Telecomunicaciones Móviles [16], según el cual, el sistema *TFTS* se compone de los siguientes subsistemas y elementos funcionales:

- Un cierto número de estaciones **de aeronave *AS*** (Aircraft Station). Existirá una estación *AS* por avión, aunque puede estar equipada con varios terminales de radio, como se expone más adelante.
- Un cierto número de **subsistemas de estaciones de tierra *GSS*** (Ground Station Sub-System). El número final de subsistemas *GSS* es de algunas decenas pero depende de la arquitectura que se adopte. Cada subsistema *GSS* está integrado por:

- Un controlador de estaciones de tierra *GSC* (Ground Stations Controller).
 - Varias estaciones de tierra *GS* (Ground Station).
- Un subsistema de explotación integrado por un **centro de gestión de red *NMC*** (Network Management Center) y un cierto número de centros de operación y mantenimiento *OMC* (Operation and Maintenance Center). El número de centros *OMC*, depende de la organización final del sistema.
 - Un subsistema de administración integrado por el denominado **centro de administración *AC*** (Administrative Center).

Las estaciones *AS* podrán establecer comunicaciones aire-tierra mientras se encuentren en el interior de la zona cubierta por el sistema, denominada *área de servicio TFTS*.

Las estaciones *GS* estarán localizadas por toda el área de servicio para garantizar una cobertura lo más continua posible. Cada *GS* da cobertura a una cierta zona geográfica conocida como *área GS*.

El conjunto de todas las *áreas GS* asociadas a estaciones *GS* que están conectadas a un mismo controlador *GSC* integran la llamada *área GSC*.

Todas las *áreas GSC* integran el *área de servicio TFTS*.

Las estaciones *GS* se conectan al centro *GSC* utilizando enlaces dedicados mediante una configuración en estrella.

Los diferentes elementos y subsistemas se comunican entre sí utilizando las redes públicas *RTPC* (Red Telefónica Pública Conmutada), o alternativamente la *RDSI* (Red Digital de Servicios Integrados) y la *RPCP* (Red Pública de Conmutación de Paquetes).

Las redes *RTPC* y *RPCP* constituyen el destino de la llamadas de usuario (telefónicas, facsímil, datos por circuitos, datos por paquetes) y a ellas se conectan los *GSS*.

La *RPCP* se utiliza adicionalmente como medio de transporte para intercambio de información de sistema entre *GSS* (caso de traspasos), entre *GSS* y *OMC/NMC* (explotación), y entre *GSS* y *AC* (información de tarificación).

A continuación se adjunta un gráfico que describe la arquitectura del sistema *TFTS*:

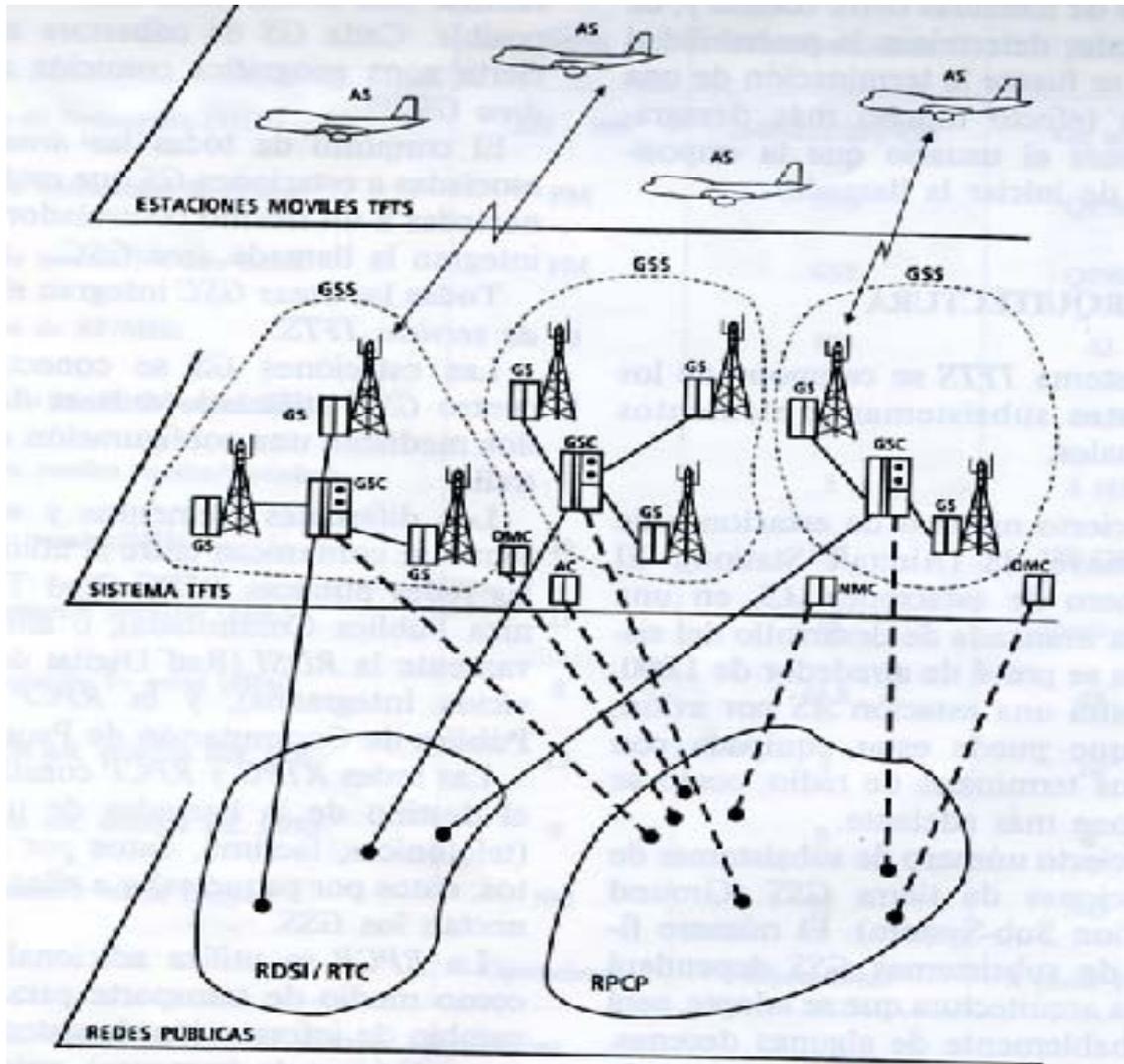


Figura 2.2

2.6.1. Subsistema de estaciones de tierra *GSS*

El subsistema *GSS* tiene asignadas las siguientes funciones:

- Posibilitar la conexión de las redes públicas con las estaciones *AS* a través de la interfaz radioeléctrica.

- Gestionar las llamadas de los usuarios hacia las redes públicas *RTPC/RDSI* y *RPCP*, interactuando con éstas.
- Recopilar datos de tarificación de las llamadas iniciadas en su área para hacer posible la facturación interactuando con el *AC* y utilizando para ello la *RPCP*.
- Gestionar la explotación (operación y mantenimiento) de los elementos que componen el propio *GSS*, registrando los datos e interactuando con el subsistema de explotación mediante la *RPCP*.

El *GSS* se compone de un centro *GSC* y un cierto número de estaciones *GS*, elementos que se reparten las funciones globales antes indicadas.

2.6.1.1. Estación *GS*

La estación *GS* tiene encomendadas las siguientes funciones:

- Transmisión/recepción en *RF*.
- Modulación/demodulación.
- Codificación y entrelazado en la interfaz radioeléctrica.
- Elaboración de la estructura TDM y manejo de la estructura TDMA.
- Gestión de la interfaz radioeléctrica (establecimiento de canales lógicos, control de flujo, etc.).
- Gestión de los recursos radio (asignación de canales a llamadas).
- Control de la potencia transmitida por la *AS* y del avance de tiempo (estos conceptos se precisan más adelante).
- Gestión autónoma de traspasos de llamadas en curso internos a la *GS*.
- Gestión coordinada con el *GSC* de los traspasos externos a la *GS*.
- Recopilación de datos de mantenimiento de la estación.
- Transcodificación 9,6 (4,8 en versiones posteriores)-64 kbits/s, esto es, adaptación de la velocidad de transmisión utilizada en la interfaz radioeléctrica con la utilizada en las redes públicas.
- Gestión de la interfaz hacia el *GSC* (control de flujo, asignación de recursos de transmisión, etc.).

- Multiplexación/demultiplexación de canales de tráfico (opcionalmente, en el caso de utilizar transcodificador remoto).
- Control remoto del transcodificador (opcionalmente, en el caso de utilizar transcodificador remoto).

De acuerdo con la descripción funcional antes indicada, una disposición típica de la estación GS se indica en la siguiente figura:

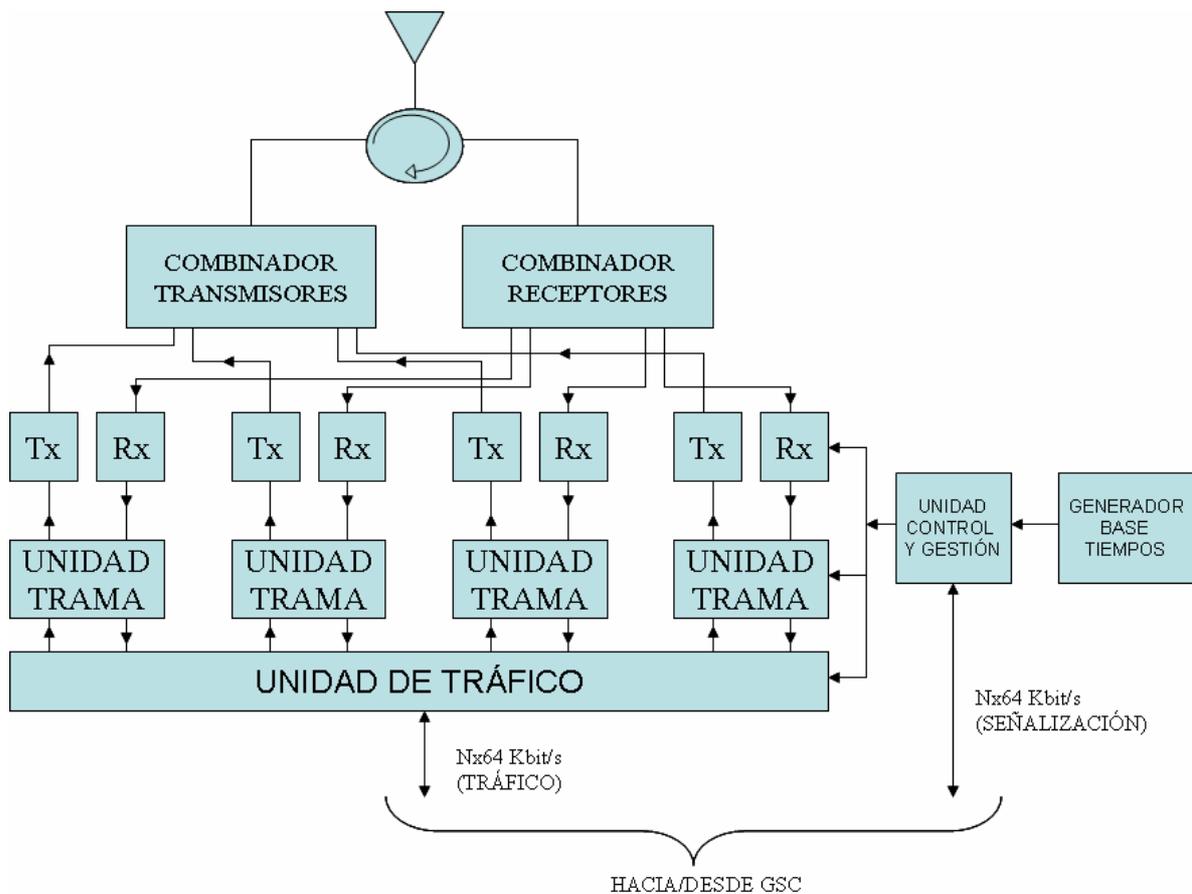


Figura 2.3

A continuación, se detallan los elementos del diagrama anterior:

- *Unidad de Control y Gestión de Señalización.* Unidad encargada del control del resto de las unidades funcionales de la estación, así como de la gestión de la señalización de control correspondiente a las interfaces con el centro GSC y con la estación AS.
- *Unidad de tráfico.* Integrada fundamentalmente por el necesario número de transcodificadores de canal telefónico (64 kbits/s Ley-A del CCITT a 9.600 bits/s según el

formato definido por el estándar *TFTS*). En versiones más avanzadas del estándar esta unidad podrá combinar transcodificadores de 9.600 bits/s y de 4.800 bits/s simultáneamente.

- *Unidad de trama*. Unidad encargada de la manipulación de la trama TDM en el sentido ascendente y de la TDMA en el sentido descendente a partir de la información recibida/transmitida desde/hacia los transcodificadores (multiplexores/demultiplexores en su caso) y de la unidad de control de la estación. El contenido y formato de estas tramas se describe en el apartado correspondiente a la interfaz radioeléctrica.

- *Transceptores*. Asociados a una unidad de trama cada uno de ellos, se encargan de procesar las señales procedentes y destinadas a estas unidades, para su transmisión por radio. Cada uno de estos transceptores opera en uno de los circuitos radioeléctricos asignados a la estación *GS*. Pueden tener una potencia de hasta 45 dBm y la sensibilidad se sitúa en torno a los -115 dBm.

- *Unidades de RF*. Son éstas las unidades encargadas de la combinación de transmisores y receptores hacia una antena común.

- *Antenas*. Específicamente diseñadas para esta aplicación, cuidan especialmente las características de radiación en el plano vertical (elevación). Tienen un patrón de radiación hemisférico [23].

- *Generador de base de tiempos*. Necesario para disponer de una referencia de tiempo muy precisa. Utiliza un dispositivo auxiliar como, por ejemplo, un receptor *GPS* (Global Positioning System).

- *Multiplexores/demultiplexores*. Unidad opcional que permite compartir un canal de 64 kbits/s por un cierto número de canales de tráfico y señalización para ahorrar medios de transmisión.

Se pueden distinguir tres tipos de estaciones, destinadas a diferentes tipos de cobertura, que se diferencian entre sí exclusivamente en la potencia de emisión y en el diagrama de radiación de la antena. Son las que se relacionan a continuación:

- Estaciones para cobertura de vuelos en altura de crucero, denominadas estaciones *ER-GS* (En-Route Ground Station) están destinadas a cubrir alturas de vuelo superiores a los 4.500 metros. Son estas estaciones de gran potencia (hasta 49 dBm de PIRE) con cobertura omnidireccional en el plano horizontal. Están destinadas a cubrir células con un radio de

hasta 240 Km aunque está permitido llegar hasta los 350 Km de radio para dar cobertura a zonas marítimas.

- Estaciones para cobertura de la zona de aproximación y maniobra en las cercanías de aeropuertos, las trayectorias usuales de despegue y aterrizaje, y las zonas de espera de los aeropuertos. Están destinadas a cubrir alturas de hasta 4.500 metros en las cercanías de los aeropuertos. Se denominan *INT-GS* (Intermediate Ground Station) y son de potencia media (hasta 39 dBm de PIRE en el plano horizontal). El radio de cobertura no deberá superar los 45 Km.
- Estaciones para cubrir el recorrido de los aviones mientras ruedan en tierra o están situados en las puertas de embarque. Se denominan *AP-GS* (Airport Ground Station), son de media potencia (hasta 39 dBm de PIRE en el plano horizontal). Se ubican en lugares estratégicos, pudiendo ser necesaria más de una estación de este tipo por aeropuerto. Sus antenas tendrán un patrón de radiación en el plano horizontal que puede no ser omnidireccional.

En la siguiente figura se muestran de forma esquemática los diferentes tipos de estaciones:

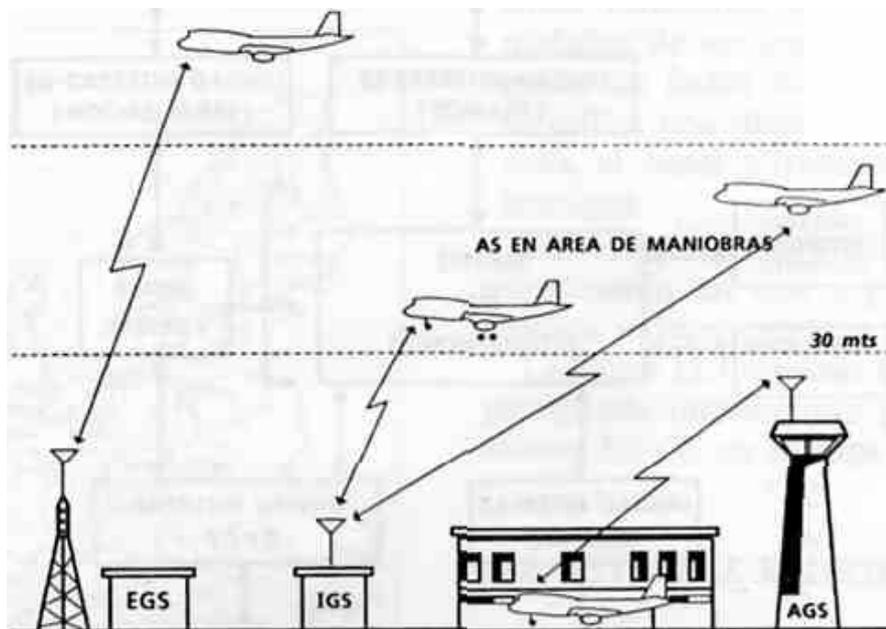


Figura 2.4

La asignación de canales a cada una de las estaciones terrenas y los emplazamientos de éstas vienen recogidos en el “Schiever Plan” (Odense, 3-7 Febrero de 1997). Dicho plan procede del *CEPT* (Conferencia Europea Postal y de Telecomunicaciones) y se trata de la decisión

ERC/DEC/(97)08. Se adjunta una tabla para todas las estaciones terrenas situadas en España, sin incluir las *AP-GS*. En ella se aprecia como las 7 primeras son *ER-GS* y las demás *INT-GS*. Se puede ver también como las *ER-GS* que están situadas cercanas a la costa (como las de Mallorca o Canarias) tienen mayor radio para dar cobertura a las zonas marítimas.

Código País	Num. GS	Nombre GS	Latitud (grados)	Longitud (grados)	Altura del emplazamiento	Altura antena	Radio (Km)
E	18	PicoTresMa/Cantabria	43.047	-4.408	2175	70	280
E	25	Bola de Mundo / Madrid	40.784	-3.985	2262	70	240
E	26	Lorri o Rubio / Lerida	42.408	1.201	2439	70	240
E	30	Pinos genil / Granada	37.164	-3.501	778	70	240
E	31	Javalambre / Teruel	40.102	-1.024	2002	70	240
E	32	Alfabia / Mallorca	39.732	2.727	1034	70	300
E	84	Montana la Gorra (Can)	27.958	-15.563	1949	70	350
E	98	Gibalbin (Cadiz)	36.833	-5.955	386	30	45
E	99	Algeciras (Cadiz)	36.147	-5.46	101	30	45
E	100	Mijas (Malaga)	36.607	-4.596	958	30	45
E	101	Altana (Alicante)	38.652	-0.273	1520	30	45
E	102	Alfabia (Baleares)	39.732	2.727	1034	30	45
E	103	M. la Gorra (Canarias)	27.958	-15.563	1949	30	45
E	104	Mont Blanch (Lerida)	41.376	1.165	353	30	45
E	105	NS de los Angeles (GE)	41.979	-2.911	500	30	45
E	106	Orduna (Vizcaya)	42.950	-3.026	920	30	45
E	107	Monte Cima (Asturias)	43.435	-5.590	733	30	45
E	108	Valladolid-radio (VA)	41.629	-4.678	844	30	45
E	109	Miravete (Caceres)	39.717	-5.767	839	30	45
E	110	La Bola del Mundo	40.784	-3.985	2262	30	45

Tabla 2.5

2.6.1.2. Centro GSC

A continuación describimos las funciones encomendadas al centro *GSC*.

- Gestión de la llamada (establecimiento, supervisión y reposición).
- Validación del proceso de acceso de las estaciones *AS*.
- Conexión con las redes públicas. Enrutamiento, funciones específicas de interconexión (inserción de tonos DTMF, conversión de protocolos para módems en banda vocal y facsímil, etc.) y cancelación de eco.
- Gestión de la operación y mantenimiento a nivel de *GSS*. Recopilación de informes desde la estación *GS*, recopilación de información del propio *GSC* y gestión del envío hacia el centro *OMC* y hacia el *NMC*.
- Almacenamiento de la información de tarificación de las llamadas iniciadas en el *GSS* y envío hacia el centro *AC*.
- Gestión de traspasos internos al *GSS*.
- Gestión de traspasos inter-*GSS* en colaboración con el *GSS* correspondiente.
- Control de la interfaz con las estaciones *GS*. Gestión del canal de señalización.

De acuerdo con la descripción funcional antes indicada, una disposición típica del centro *GSC* se muestra en la siguiente figura:

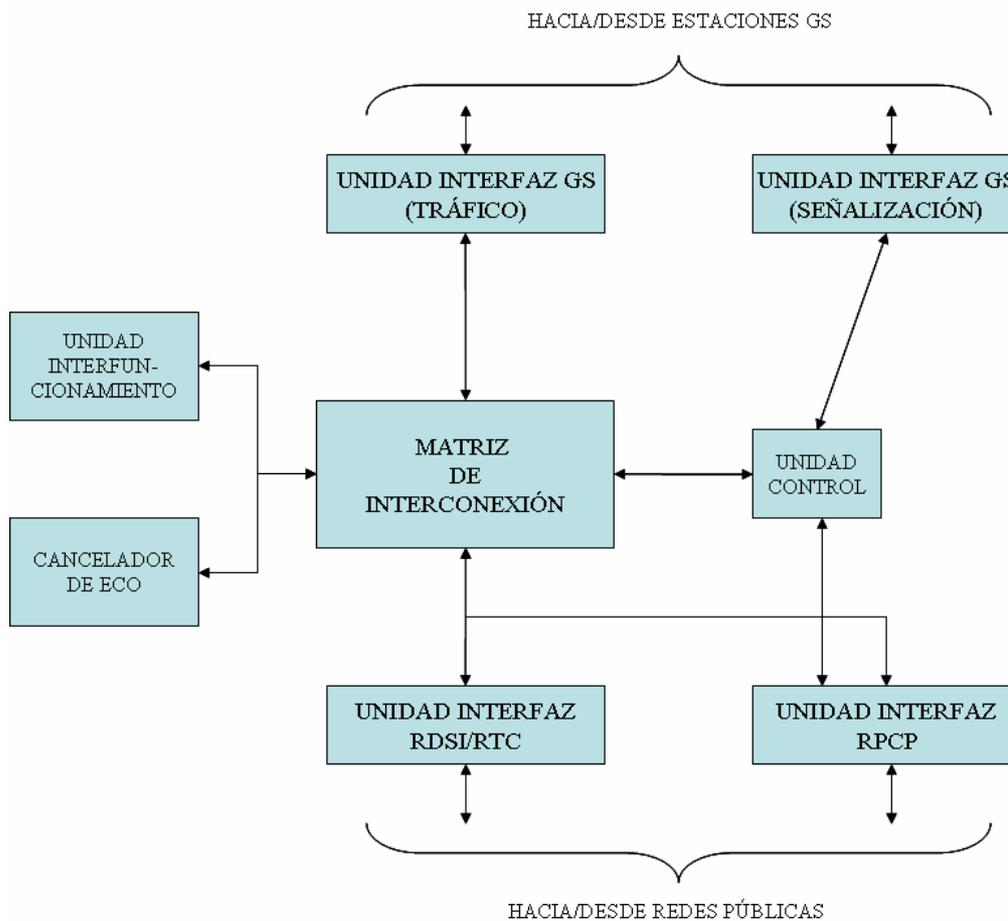


Figura 2.6

En el diagrama anterior, se pueden distinguir los siguientes elementos:

- *Unidad de Control.* Encargada de la gestión y control del resto de las unidades que componen el controlador. Dispone de medios de almacenamiento no volátiles para los distintos tipos de información: configuración, explotación, tarificación, etc.
- *Unidad de Interfaz hacia las estaciones GS.* Permite la conexión al controlador de las líneas de enlace que provienen de las estaciones GS. Se ocupa esta unidad tanto de los canales de tráfico, como de los enlaces de señalización.
- *Matriz de Interconexión.* Distribuye la información de tráfico entre los diferentes elementos del GSC. Unidad de Interconexión con la RTPC/RDSI. Se encarga de señalar con la RTPC, o alternativamente con la RDSI, para el encaminamiento de las llamadas.

- *Unidad de Interconexión con la RPCP*. Se encarga de señalar con la *RPCP* para el encaminamiento de llamadas de datos destinadas a esta red y para los circuitos de señalización del propio sistema.
- *Unidad de Interfuncionamiento*. Permite la adaptación de protocolos en los casos de comunicaciones de datos, facsímil e inyección de tonos multifrecuencia.
- *Cancelador de Eco*. Para minimizar el efecto del elevado retardo que introduce el sistema.

2.6.2. Subsistema de explotación

El subsistema de explotación tiene por misión facilitar la gestión del sistema (supervisión, reconfiguración, gestión de abonados, etc.) y se compone de una serie de centros *OMC* y un único *NMC* para todo el sistema. Pasamos a describir estos centros a continuación:

2.6.2.1. Centro *NMC*

Las funciones encomendadas al centro *NMC* son las siguientes:

- Gestión de las *AS* que utilizan el sistema (altas y bajas).
- Elaboración de las estadísticas de tráfico.
- Elaboración de las estadísticas de calidad de servicio.
- Control del estado global de la red (resumen de alarmas).
- Gestión de solicitudes de pruebas y puesta fuera de servicio de estaciones *AS*.

2.6.2.2. Centro *OMC*

Las funciones encomendadas al centro *OMC* son las siguientes:

- Recopilación de alarmas de los *GSS* a su cargo.

- Elaboración de informes de alarmas.
- Supervisión en tiempo real.
- Ejecución de rutinas de pruebas.
- Reconfiguración de la red.

Los centros *NMC* y *OMC* son ordenadores de propósito general que incorporan un software de aplicación especial, y una interfaz *X.25* con la *RPCP*.

2.6.3. Subsistema de tarificación

El subsistema de tarificación tiene las siguientes funciones:

- Validar la tarjeta de crédito del usuario.
- Almacenar los parámetros de la llamada necesarios para calcular la cantidad a pagar.
- Elaborar la información necesaria para poder emitir la factura (compañías aéreas y proveedores de servicio).
- Proporcionar a los abonados la información necesaria para que puedan elaborar los recibos de usuario.
- Dialogar con las compañías emisoras de tarjetas de crédito para mantener actualizadas las “listas negras”.

Estas funciones son realizadas por los centros *GSC*, que almacenan los parámetros correspondientes a las llamadas, y por el centro de administración *AC*.

El centro *AC* está constituido por un ordenador de propósito general. Está equipado con una puerta de conexión a la *RPCP (X.25)* para dialogar con los *GSC* y con los sistemas de las compañías aéreas y organizaciones de tarjetas de crédito. Una aplicación software específica efectúa las funciones encomendadas a este centro.

2.6.4. Proceso de establecimiento de una llamada

Supóngase que la estación *AS* no está cursando ninguna llamada (nótese que puede haber hasta cuatro llamadas simultáneas por avión), y que el avión está situado a una altura de crucero (entre 4.500 y 13.000 metros). La estación *AS* tendrá seleccionada una estación *ER-GS* según diferentes criterios: máxima señal, mínimos errores, máxima velocidad de acercamiento.

Cuando un pasajero actúa sobre un terminal de cabina para establecer una llamada telefónica, la *AS* solicitará acceso a través de la *ER-GS* al *GSS*. Se enviará hacia el *GSS* el número de abonado al que se llama, procediendo el *GSS* a señalar con la *RTPC* (o *RDSI*) para enrutar la llamada. En paralelo a este proceso se comprobará la validez de la tarjeta de crédito del abonado.

Establecida la llamada telefónica, el usuario utilizará un circuito de tráfico de 9.600 bits/s para enlazar con la *ERGS*, y un circuito de 64 kbits/s para enlazar con el *GSC*, desde donde se accederá a la *RTPC* (o la *RDSI*).

La llamada permanecerá en estas condiciones hasta su liberación, a no ser que por distanciamiento del avión o por aparición de interferencias, se degrade la calidad del circuito radioeléctrico. En estas condiciones puede ser necesario un traspaso de la llamada en curso (*handover*), operación que consiste en conmutar la llamada de un canal de tráfico a otro. Pueden darse cuatro tipos diferentes de traspasos en el sistema:

- Entre canales de tráfico de una misma portadora.
- Entre portadoras de una misma estación *GS*.
- Entre diferentes *GS* pertenecientes a un mismo *GSS*.
- Entre *GS* de diferentes *GSS*.

Los traspasos de llamadas en curso entre diferentes *GSS* se gestionan a través de la *RPCP*. La utilización de este procedimiento, que requiere algo de tiempo, es posible ya que en el *TFTS* la intensidad de las señales disminuyen lentamente cuando el avión sale de la zona de cobertura de una estación determinada, dando tiempo al intercambio de las señales.

En la siguiente figura se muestra, de forma esquemática, el encaminamiento de una llamada en un traspaso entre diferentes subsistemas *GSS*. Puede comprobarse que el control de la llamada permanece en el *GSC* donde se inició.

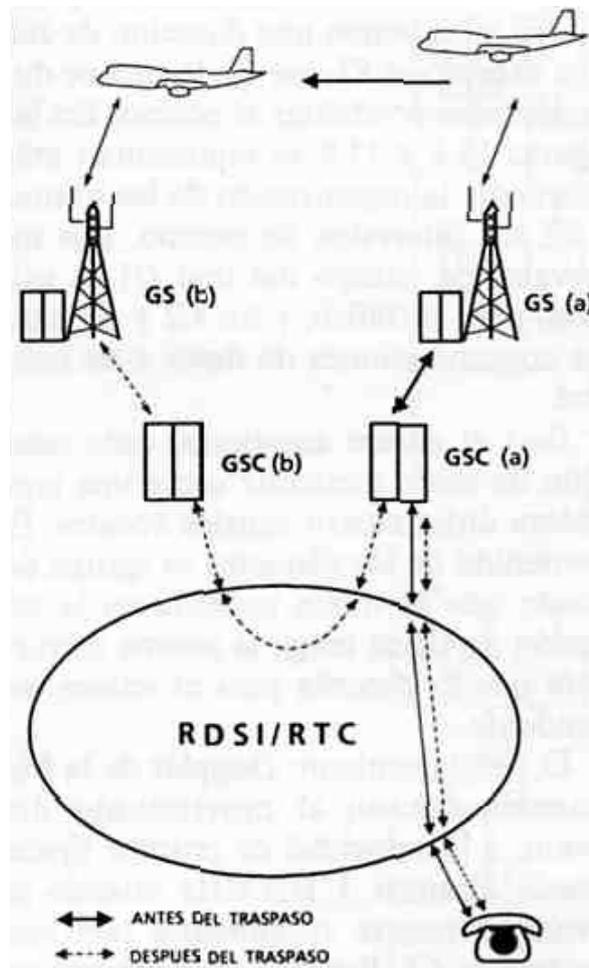


Figura 2.7

2.6.5. Criterios para la planificación de estaciones

Para la planificación de los emplazamientos de las estaciones *ER-GS* se ha seguido un esquema celular con una geometría aproximadamente hexagonal.

Las características de la modulación y codificación digital elegida permiten una distancia de reutilización teórica de 760 Km y un factor de repetición teórico de frecuencias de 4. Por razones económicas se ha distorsionado ligeramente el esquema celular regular para situar estaciones *ER-*

GS en las proximidades de aeropuertos. Se ha conseguido un factor de repetición de 7, y se utiliza una disposición especial que evita el canal adyacente en la célula contigua.

Las estaciones *INT-GS* y *AP-GS* se introdujeron en una segunda fase de manera independiente a las *ER-GS*.

La figura que viene a continuación, muestra la distribución planificada inicialmente para las estaciones *ER-GS* en Europa.



Figura 2.8

2.7. Interfaz radioeléctrica

La banda inicial reservada para este servicio fue de 1.593 a 1.594 MHz en el sentido tierra-aire y de 1.625,5 a 1.626,5 MHz en sentido aire-tierra. Sin embargo, durante la Conferencia Administrativa

Mundial de 1992 (Torremolinos) se decidió la reserva mundial de 5 MHz en la banda de 1.670 a 1.675 para el enlace tierra-aire y de 1.800 a 1.805 para el sentido aire-tierra, planificando las posibles interferencias con otros sistemas ya implantados que están próximos en la banda de frecuencia como es el servicio de Radio Astronomía que usa las frecuencias de 1.660 a 1.670 MHz [10]. Esto permitirá disponer de 164 pares de radio-canales de 30,3 KHz en los 2x5 MHz atribuidos a este servicio.

La modulación utilizada es PSK diferencial a 4 niveles a una tasa de 44,2 Kbits/s ($\pi/4$ DQPSK). Ésta modulación tolera un efecto doppler bastante intenso como es el caso y nos ofrece una gran eficiencia en el aprovechamiento del ancho de banda.

El sistema *TFTS* usa multiplexado por división en el tiempo combinada con un multiplexado por división en frecuencia para el enlace tierra-aire y un acceso múltiple por división en el tiempo para el enlace aire-tierra.

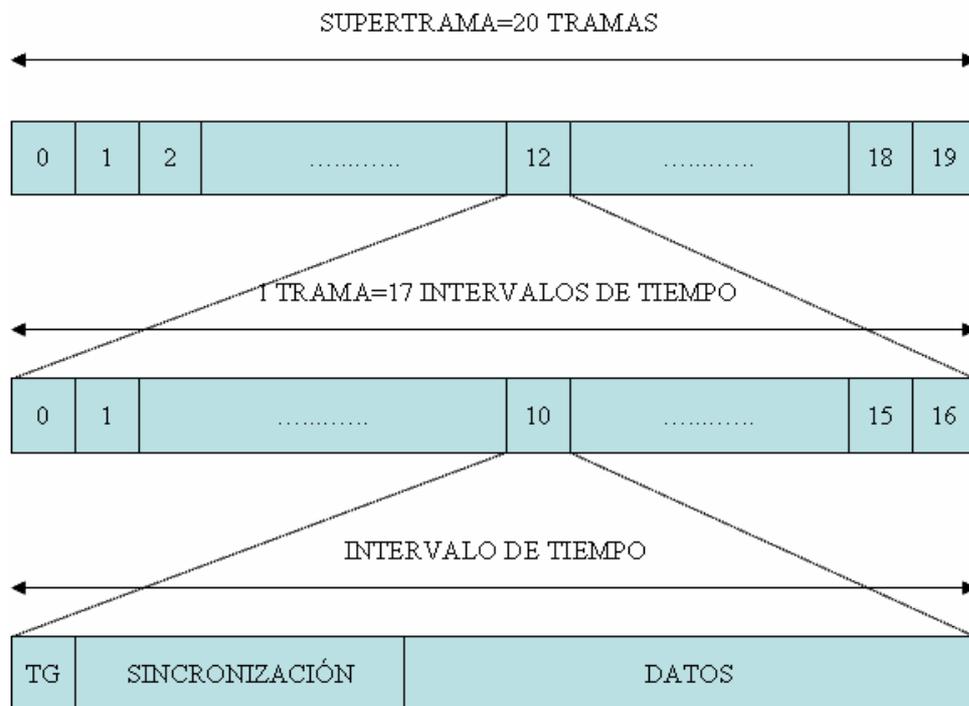
En el enlace tierra-aire cada estación de tierra transmite un cierto número de portadoras (MDF), cada una con la posibilidad inicial de incorporar varios canales vocales (TDM). Mediante el codificador a 9,6 kbits/s se dispondrá de 4 canales vocales por portadora, pudiendo llegar a 8 canales vocales por portadora mediante la codificación a 4,8 kbits/s. Dentro de cada portadora, en el enlace tierra-aire, se construyen tramas de 80 ms de duración agrupando 17 intervalos de tiempo de 4,706 ms cada uno, 16 para tráfico y 1 para señalización. 20 tramas se agrupan en una supertrama de 1,6 segundos.

Hay varios tipos de intervalos de tiempo, de propósito general, tipos $G1$, $G2$ y $G3$ y de sincronización $S1$ y $S2$. Todos ellos tienen una longitud de 208 bits excepto el $S2$ que es de menor duración para posibilitar el acceso. Los intervalos de tiempo del tipo $G1$ se utilizan para el tráfico, y los $G2$ y $G3$ para las comunicaciones de datos y de control. En la figura que se muestra a continuación se representa gráficamente los intervalos de tiempo, mientras que la Figura 2.10 representa la organización de las tramas.



TG=Tiempo de guarda

Figura 2.9



TG=Tiempo de guarda

Figura 2.10

Para el enlace aire-tierra, cada estación de avión transmite sobre una portadora única cuatro canales vocales. El contenido de los paquetes se agrupa de modo que la trama recibida en la estación de tierra tenga la misma estructura que la descrita para el enlace ascendente.

El desplazamiento Doppler de la frecuencia debido al movimiento del avión, a la velocidad de crucero típica, puede alcanzar 1 Hz/MHz cuando el avión se mueve radialmente con respecto a la GS. Por ello cabe esperar un desplazamiento de 1,6 a 1,8 KHz. Como el espaciado entre canales de 30,3 KHz es muy superior al máximo desplazamiento Doppler esperado, no se ha previsto dotar al sistema *TFTS* con ningún mecanismo de corrección.

Cuando una estación de avión entra en el área cubierta por el sistema, evalúa la distancia a cada una de las estaciones de tierra, la calidad de la señal y efectúa una elección de estación GS teniendo en cuenta estos parámetros y además su propia situación de vuelo. La estación de avión AS pide circuitos a la estación GS elegida, pero es finalmente la estación de tierra la que lo decide. El criterio seguido es conocido como *Highest Closing Rate* y se basa en cursar la llamada por aquella estación a la que la aeronave se acerque con mayor velocidad.

Dados los métodos de acceso y multiplexado utilizados, y el procedimiento de selección de la GS por la que se cursa la llamada, es necesario que todo el sistema tenga una base de tiempos común. La estación de avión debe poder determinar su distancia a las estaciones de tierra y la velocidad con que se aproxima a ella mediante la medición de retardos. Al principio de la comunicación cada estación informa al avión del retardo de transmisión, de modo que la transmisión desde el avión se efectúe con el adecuado adelanto para que cada paquete sea recibido por la estación terrena dentro de los intervalos de tiempo destinados a ello sin desplazamientos hacia los intervalos de tiempo adyacentes. Este retardo es variable, dependiendo de la distancia entre la estación de avión y la estación de tierra y es conocido como *avance de tiempo*. Por otra parte, para que durante los trasposos de llamadas en curso se tenga acceso al intervalo de tiempo correspondiente, también es necesario sincronizar las estaciones de tierra entre ellas. Las estaciones de tierra se sincronizan mediante una referencia externa, tomada del sistema *GPS*.

2.8. Interfaces e interconexión con las redes

Se han identificado las siguientes interfaces entre los elementos del sistema:

- Interfaz radioeléctrica entre las estaciones *AS* y el subsistema *GSS*, denominada *Interfaz-Ua*.
- Interfaz entre el *GSS* y las redes públicas para el encaminamiento de las llamadas denominada *Interfaz-1a*. Hacia la *RTPC/RDSI* se utilizan interfaces de tipo acceso (Q.921 y Q.932 del CCITT). Hacia la *RPCP* se utiliza X.25.
- Interfaz entre distintos *GSS* utilizando la *RPCP*, para el intercambio de señalización de trasposos. Se denomina *Interfaz-1b*.
- Interfaz entre el *GSS* y el centro *AC* utilizando la *RPCP*, para el intercambio de datos de tarificación. Se denomina *Interfaz-1c1*.
- Interfaz entre el subsistema *GSS* y el centro *NMC*, utilizando la *RPCP*, para el intercambio de datos correspondiente a la gestión de abonados y estado de la red. Se denomina *Interfaz-1c2*.
- Interfaz entre el *GSS* y el centro *OMC* al que está asociado, utilizando la *RPCP*, para el intercambio de datos de operación y mantenimiento. Se denomina *Interfaz-1c3*.

Interfaces internas entre los propios elementos del sistema son las siguientes:

- Interfaz entre los equipos específicos *TFTS* del avión (*AT Avionics Terminator*) y el resto de los elementos del mismo que pueden ser compartidos para otras utilidades.
- Interfaz entre las estaciones *GS* y el centro *GSS* al que están asociadas. Denominada *Interfaz-Ub*.

En la Figura 2.11 se representa de manera esquemática la disposición de estas interfaces.

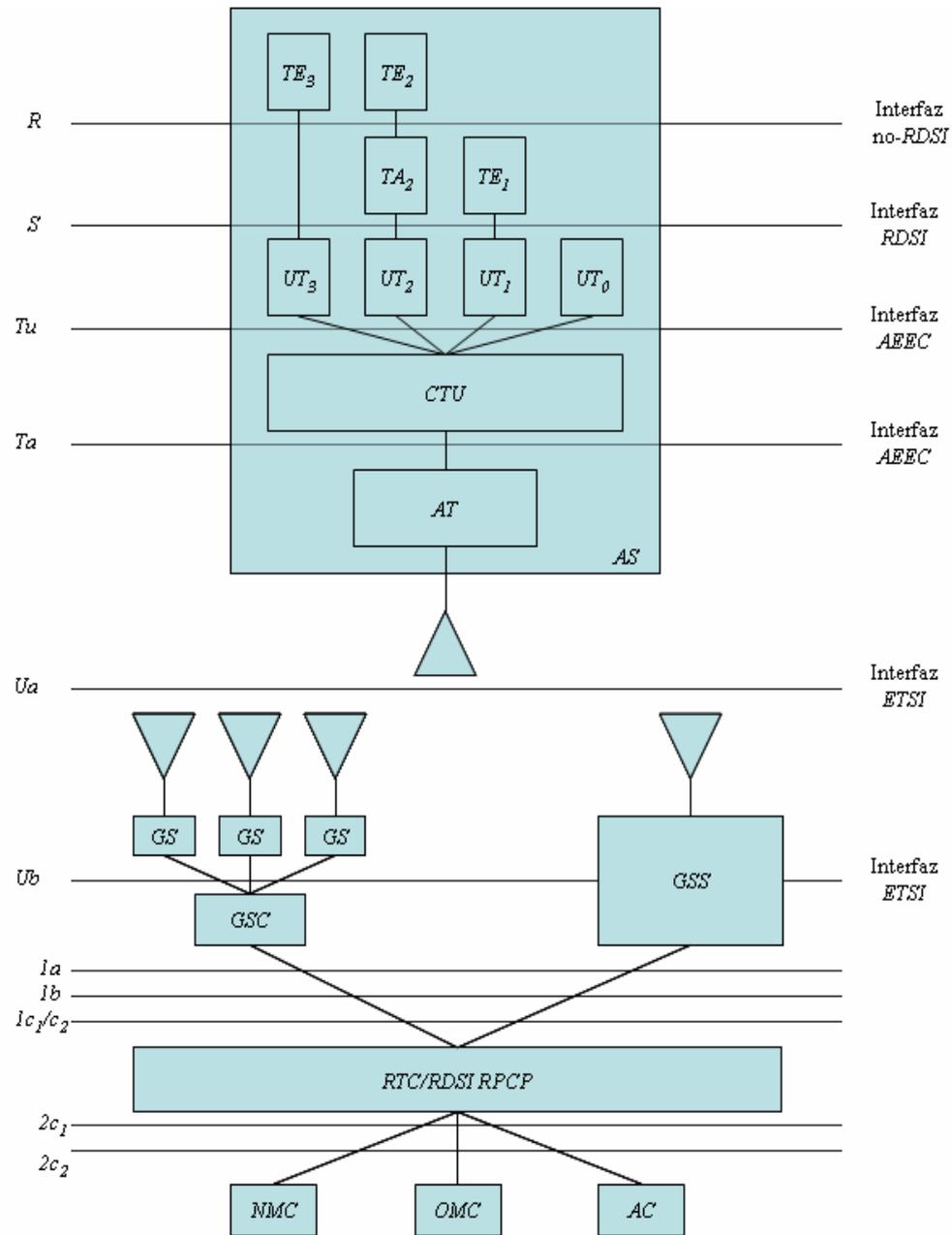


Figura 2.11

2.9. Disponibilidad

Para lograr la apertura comercial del servicio en 1994, los operadores de telecomunicación firmantes del Protocolo de Acuerdo acordaron la introducción escalonada del sistema *TFTS* siguiendo los siguientes pasos:

- Primera fase, cobertura de Europa Central mediante seis estaciones *ER-GS*, hacia marzo de 1994.
- Segunda fase, concluida en agosto de 1994, implicó la instalación de veinte estaciones *ER-GS*, de las que tres correspondían a España.
- Tercera fase, que finalizó en diciembre de 1994, tenía como objetivo disponer del total de las estaciones *ER-GS*, de las que correspondían siete en total a España.

La implantación de estaciones *INT-GS* y *AP-GS* se decide de una manera progresiva en función del tráfico.

Respecto a la disponibilidad de nuevos servicios, durante 1994 se ofreció sólo el de telefonía y fue en 1995 cuando se introdujeron complementariamente servicios de datos y de facsímil.

2.10. Características de la estación de avión *AS*

La estación de avión *AS* se compone de los siguientes elementos:

- *Equipos terminales* de usuarios tales como microteléfonos, teléfonos sin hilos, terminales facsímil y terminales de transmisión de datos. Los terminales telefónicos pueden ser cableados (por ejemplo, distribuidos regularmente por las filas de asientos) o sin hilos. Equipados con un lector de tarjetas magnéticas, están diseñados para las especiales condiciones, mecánicas y acústicas, que se dan en un avión en vuelo.
- *Unidad de telecomunicaciones de cabina, CTU* (Cabin Telecommunications Unit). Esta unidad actúa como centralita de a bordo interactuando, por una parte, con los terminales y, por otra, con los equipos específicos del *TFTS*. Tiene asignada funciones tales

como la interpretación de la señalización de los terminales, la generación de los mensajes de progreso de la llamada, la gestión de la cola de llamadas en caso de saturación de la capacidad de transmisión, etc. Esta unidad, al igual que los terminales, puede ser compartida por diferentes sistemas de comunicaciones, tal como es el caso de aviones que equipen sistema *TFTS* y sistema *INMARSAT AERO*.

- *Transceptor de avión AT*. Esta unidad está constituida por equipo exclusivo del *TFTS* y está compuesta por unidades de interfaz con la *CTU*, que incluye el codificador vocal a 9.600 (4.800 bits/s en versiones posteriores), el transceptor propiamente dicho y el sistema de antena. Cada estación *AT* puede atender cuatro canales de tráfico. Aeronaves de gran capacidad pueden equipar más de una estación *AT* que comparten una única antena.

La siguiente figura representa de forma esquemática la disposición de la instalación de a bordo:

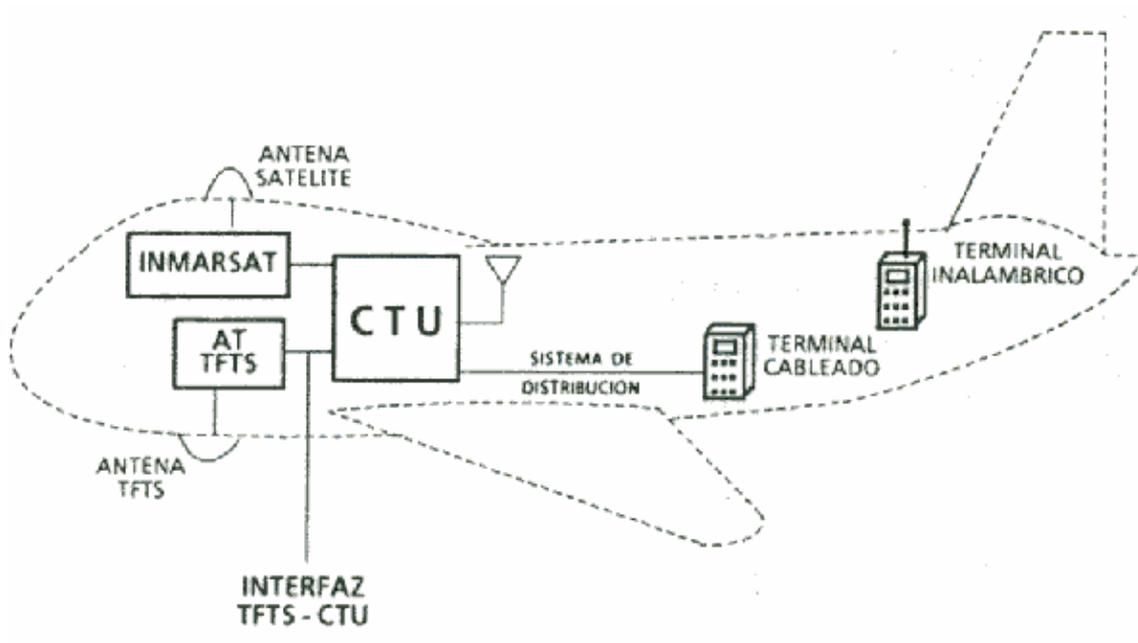


Figura 2.12

A continuación, se muestran las características de catálogo [22] de una antena *TFTS* para la estación de avión. Dicha antena se ve expuesta a condiciones extremas cuando el avión está en vuelo, por ello necesita gran protección ante las bajas temperaturas y la corrosión. Así, las antenas se aíslan mediante una cubierta de resina de vidrio y una capa externa de poliuretano.

Aplicación

Aeronaves subsónicas.

Especificaciones Mecánicas

Altura:	127 mm
Peso:	220 g
Conector de antena:	N female
Temperatura:	-55 °C +70 °C
Estándar:	RTCA DO 160 C

Especificaciones Eléctricas

Rango de frecuencia:	1670-1805 MHz
Potencia máxima:	50 W
Patrón de radiación:	omnidireccional ARINC 752
Eficiencia:	85 %.
Polarización:	vertical

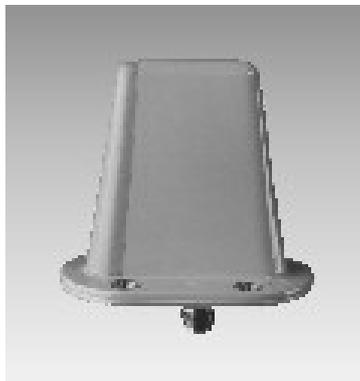


Figura 2.13

2.11. Estudio de las pérdidas en la propagación

En la banda de frecuencias del *TFTS*, la atmósfera influye sobre la propagación a través de dos mecanismos, la **refracción** y la **dispersión**, si bien esta última puede ser ignorada en una primera aproximación. El efecto de la refracción se puede incorporar con suficiente precisión mediante el método del radio ficticio equivalente, en el que se usa un radio terrestre modificado para incluir el efecto de la refracción de los rayos en la atmósfera. Dicho método va implícito en los cálculos que se adjuntan a continuación.

Al desvanecimiento producido por los fenómenos de propagación radioeléctrica y a la reflexión sobre la superficie de la Tierra, hay que superponer variaciones en la amplitud de la señal recibida producidas por el cambio continuo de la orientación relativa de las antenas de la estación de tierra y del avión debido al movimiento de éste, tanto de traslación como de rotación sobre sus tres ejes. Se espera que estas variaciones sean lentas, debido a la inercia de la aeronave, pero su amplitud podrá ser alta cuando se interpongan elementos, por ejemplo un motor, y provoquen una obstrucción.

Para el cálculo de las pérdidas de propagación, se hace uso del modelo de propagación por reflexión para tierra curva. No son tenidos en cuenta obstáculos en la propagación, algo lógico si se piensa que en una situación *TFTS* se produce la transmisión entre tierra y un avión en vuelo o entre una antena situada en el aeropuerto y las pistas de aterrizaje, en cuyo caso se coloca la antena estratégicamente para que tenga visión directa con la aeronave. A la frecuencia del *TFTS* tampoco influye ni la lluvia (ésta se aprecia para frecuencias superiores a los 6 GHz) ni los gases (apreciable por encima de los 10 GHz).

Los pasos seguidos en el cálculo han sido tomados del texto de José María Hernando Rábanos que lleva por título Transmisión por Radio [12] y se detallan a continuación.

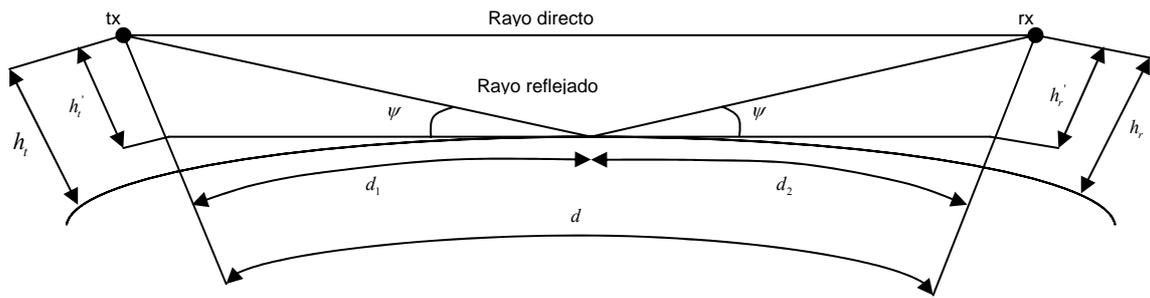


Figura 2.14

Sabemos que $d = d_1 + d_2$ donde d es la distancia entre transmisor y receptor y d_1 , d_2 son las distancias desde dichos puntos al punto de reflexión. Para el caso del *TFTS* es una buena aproximación tomar d como la distancia entre el transmisor y la proyección perpendicular del avión sobre la tierra. Previamente hay que realizar el cálculo de las constantes p y ϕ necesarias para pasos posteriores. Vienen dadas por

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[6.37 \cdot k (h_t + h_r) + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{12.74 \cdot k (h_t - h_r) d}{p^3} \right],$$

donde ϕ viene dado en radianes. En estas expresiones h_t y h_r son la altura de la antena transmisora y receptora respectivamente y k es el factor de modificación del radio terrestre cuyo valor típico es $k = \frac{4}{3}$. Para la altura de la antena transmisora se ha tomado un valor fijo de 115 metros que reproduce una situación más o menos estándar. Este valor es el que se obtiene cuando tenemos una antena situada en un emplazamiento a 200 metros sobre el nivel del mar, y en dicho emplazamiento esta situada sobre una estructura que la eleva 15 metros y el nivel medio del terreno en el que se lleva a cabo la medición es de 100 metros ($200 + 15 - 100 = 115$ metros).

El valor d_2 se calcula mediante la expresión

$$d_2 = \frac{d}{2} + p \cos \left(\frac{\pi + \phi}{3} \right),$$

y el valor $d_1 = d - d_2$. Pero los valores de d_2 y d_1 se intercambian en el caso en que $h_t > h_r$ (como es el caso del enlace descendente).

El ángulo de incidencia en miliradianes es

$$\psi = \frac{h'_t + h'_r}{d},$$

donde

$$h'_t = h_t - \frac{4d_1^2}{51k},$$

$$h'_r = h_r - \frac{4d_2^2}{51k}.$$

Sabemos además que el ángulo de incidencia ha de ser mayor que un valor ψ_{\min} para que este modelo de tierra curva se pueda aplicar, cuyo valor es:

$$\psi_{\min} (\text{mrad}) = \left(\frac{5400}{f} \right)^{1/3},$$

con f medida en MHz.

Pasamos ahora al cálculo del coeficiente de reflexión efectivo $R_e = R \cdot D$, donde

$$D = \left[1 + \left(\frac{5}{16k} \right) \frac{d_1^2 d_2}{dh'_t} \right]^{-1/2},$$

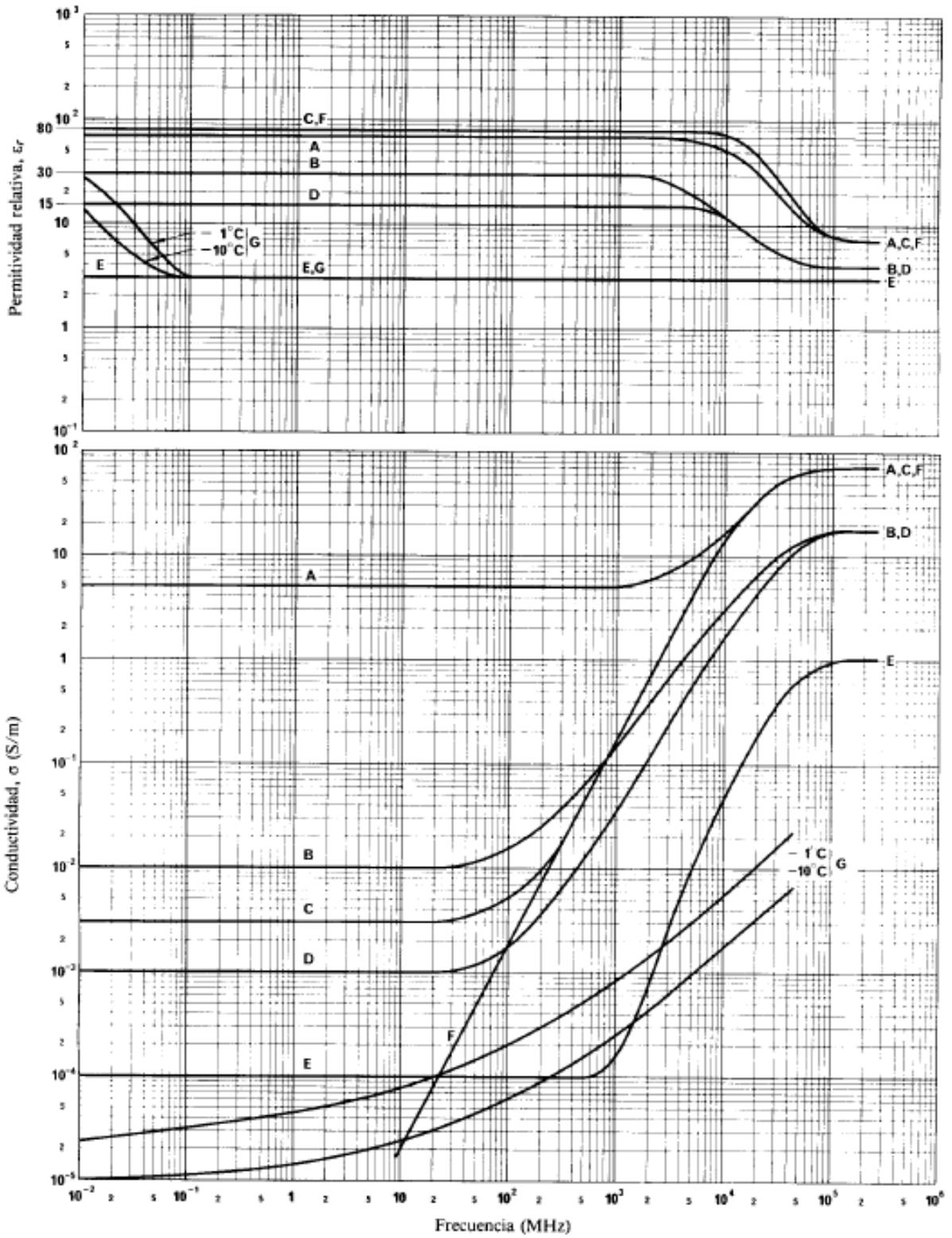
$$R = |R| e^{j\beta} = \frac{\text{sen}\psi - z}{\text{sen}\psi + z}.$$

Para el cálculo del coeficiente de reflexión R se ha de evaluar previamente el coeficiente z que está dado por

$$z = \frac{[\varepsilon_0 - \cos^2 \psi]^{1/2}}{\varepsilon_0},$$

$$\text{con } \varepsilon_0 = \varepsilon_r - j60\sigma\lambda.$$

Finalmente, para el cálculo de los parámetros eléctricos constante dieléctrica relativa ε_r y conductividad σ (S/m) es necesario recurrir a las tablas dadas en la Recomendación UIT-R-PN527 [1] que se presentan en la Figura 2.15:



- A: Agua salada (salinidad media), 20° C
- B: Suelo húmedo
- C: Agua dulce, 20° C
- D: Suelo moderadamente seco
- E: Suelo muy seco
- F: Agua pura, 20° C
- G: Hielo (agua dulce)

D05-ec

Figura 2.15

Para los cálculos se ha tomado el tipo de terreno D (moderadamente seco) propio del continente europeo. Así el valor de z obtenido para una frecuencia de 1672.5 MHz (del enlace ascendente) es de $z = 0.249 + j0.01$. Para el enlace descendente, el valor de z es aproximadamente el mismo.

Otros pasos intermedios para obtener la expresión final son

$$\Delta l(\text{m}) = \frac{2h_t' h_r'}{d} \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta(\text{rad}) = \frac{\pi \cdot f \cdot \Delta l}{150},$$

con f en MHz.

La expresión de las pérdidas de propagación es, finalmente,

$$L_b = L_{bf} - 10 \log \left[1 + (D|R|)^2 + 2D|R| \cos(\beta + \Delta) \right].$$

En ella, el término L_{bf} se refiere a las pérdidas de propagación en el espacio libre y sólo depende de la distancia entre transmisor y receptor y la frecuencia. L_{bf} viene dada por

$$L_{bf} = 20 \log_{10} \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right).$$

Este término supone la aportación principal a las pérdidas.

A continuación, con la ayuda de *Maple*, se evalúan las pérdidas en función de la distancia y de la altura de la aeronave para las diferentes situaciones que se pueden encontrar. En primer lugar, se calculan dichas pérdidas en la propagación para el enlace ascendente. Para el enlace descendente, el cálculo es el mismo pero introduciendo en las fórmulas la correspondiente frecuencia usada e intercambiando las alturas de las antenas transmisora y receptora.

Para una aeronave bajo la influencia de la cobertura de una estación *ER-GS* se adjuntan dos gráficas: las pérdidas de propagación para un caso en el que la aeronave está situada a 12.000 metros de altura (gráfica por tanto en dos dimensiones pues depende solamente de la distancia d) y otra en la que las pérdidas están en función de la altura de la aeronave y de la distancia d (Figura 2.17).

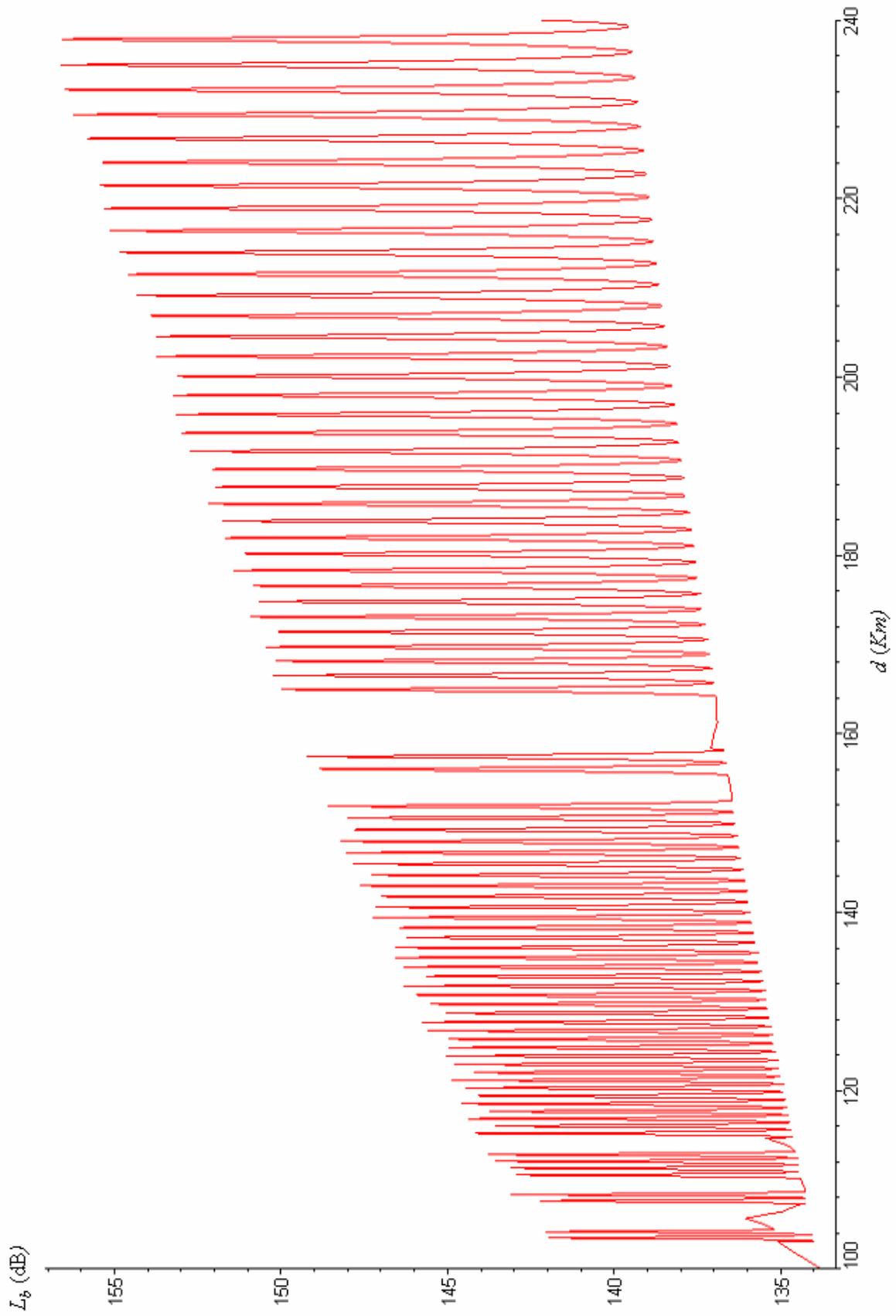


Figura 2.16

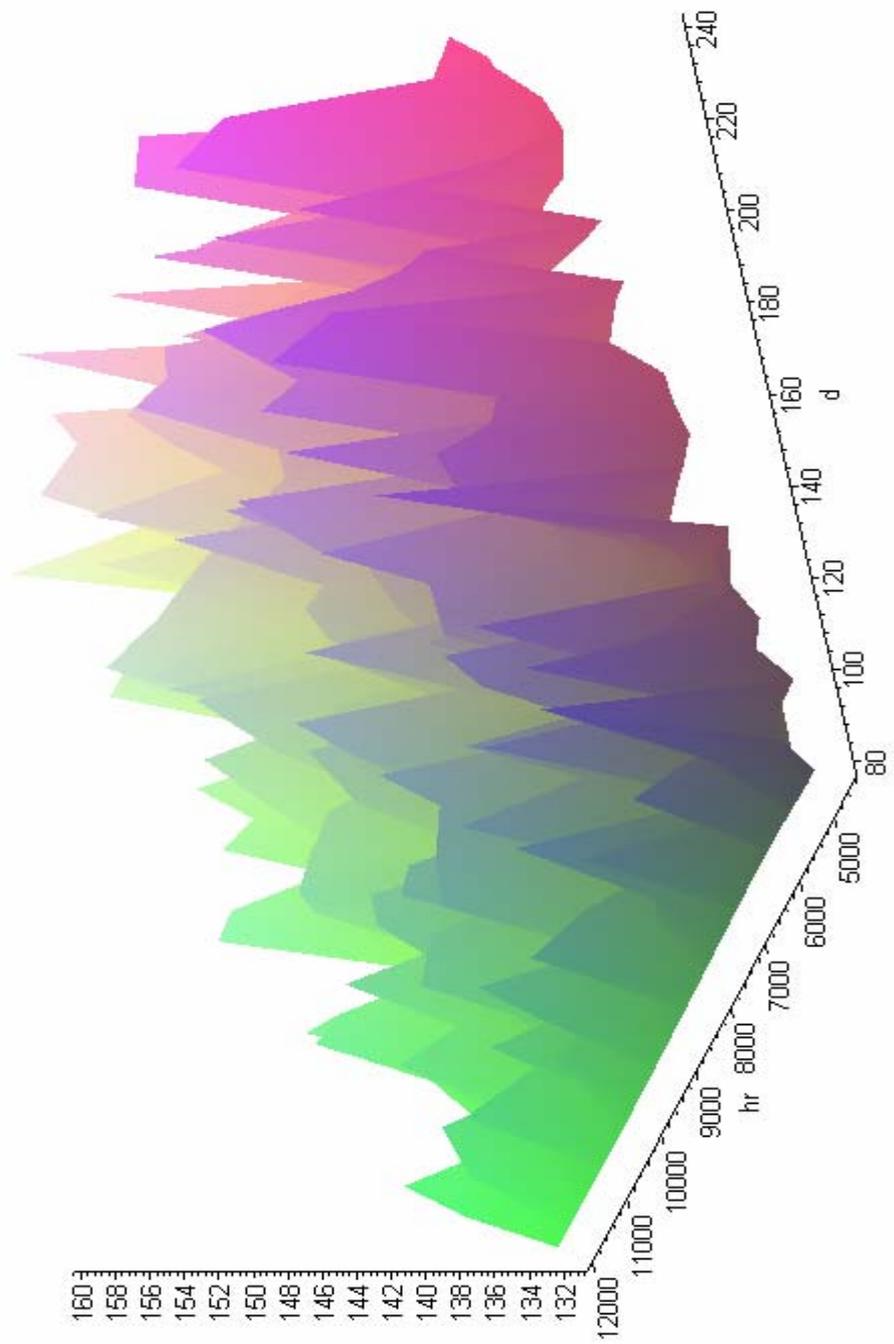


Figura 2.17

Para una aeronave bajo la influencia de la cobertura de una estación *INT-GS*, se adjuntan también dos gráficas: las pérdidas de propagación para un caso en el que la aeronave está situada a 4.500 metros de altura y otra en la que las pérdidas están en función de la altura de la aeronave y de la distancia d .

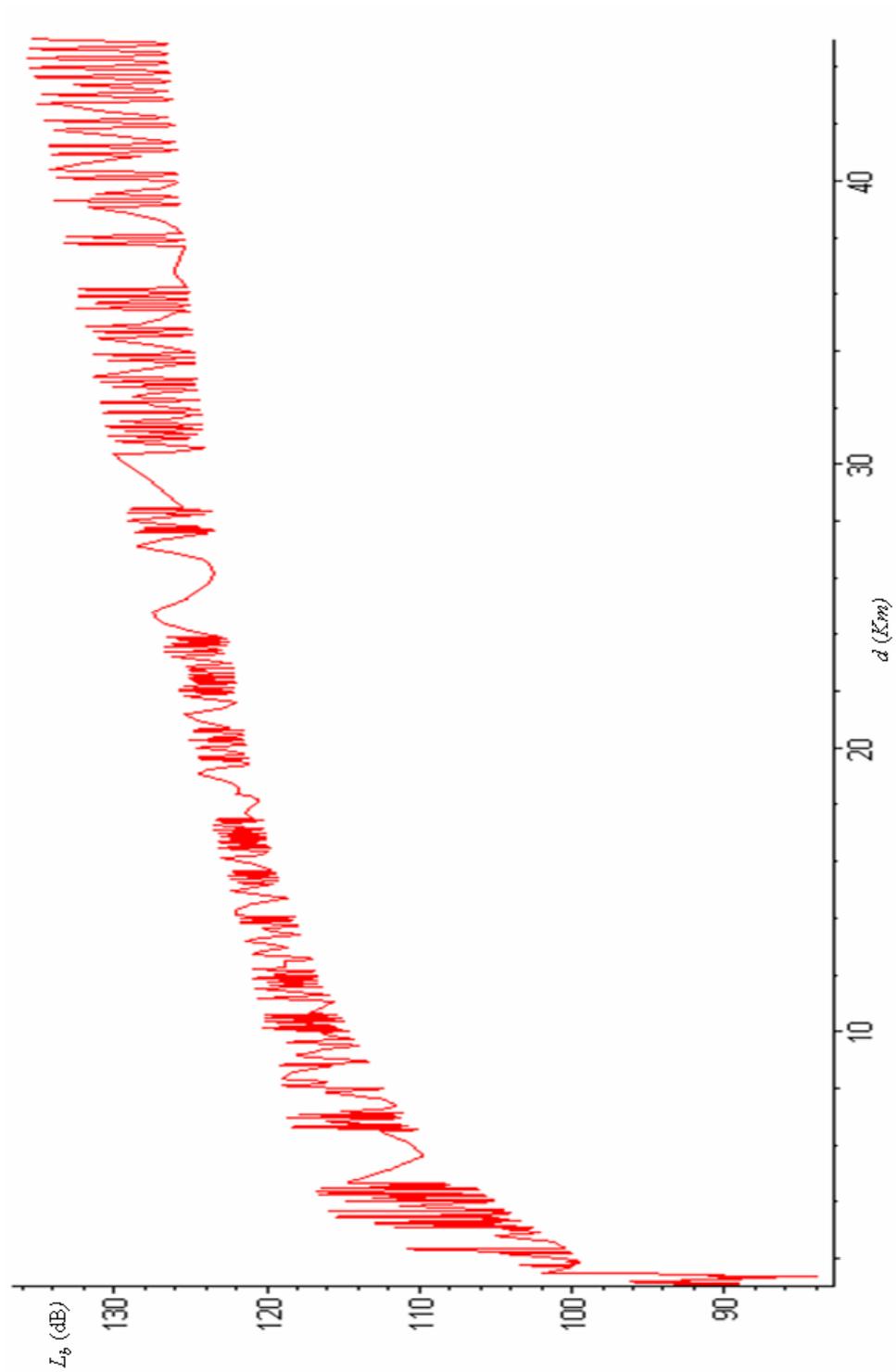


Figura 2.18

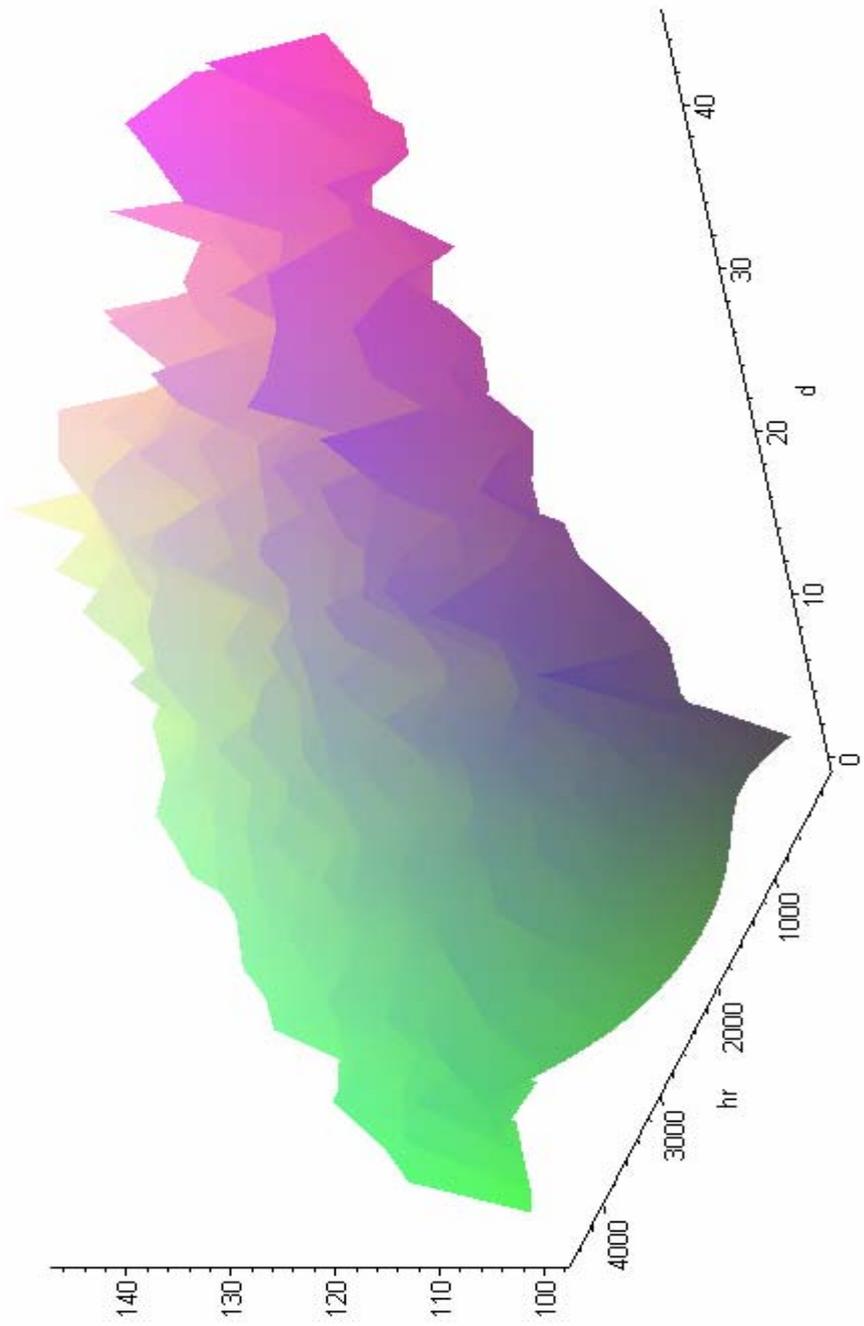


Figura 2.19

Para el caso en el que el avión se encuentre en la zona de embarque o en la pista de aterrizaje, es decir, una situación bajo la influencia de la cobertura de una *AP-GS*, la altura de la antena receptora es constante e igual aproximadamente a la altura de la antena emisora ($h_t = h_r = 115$ metros).

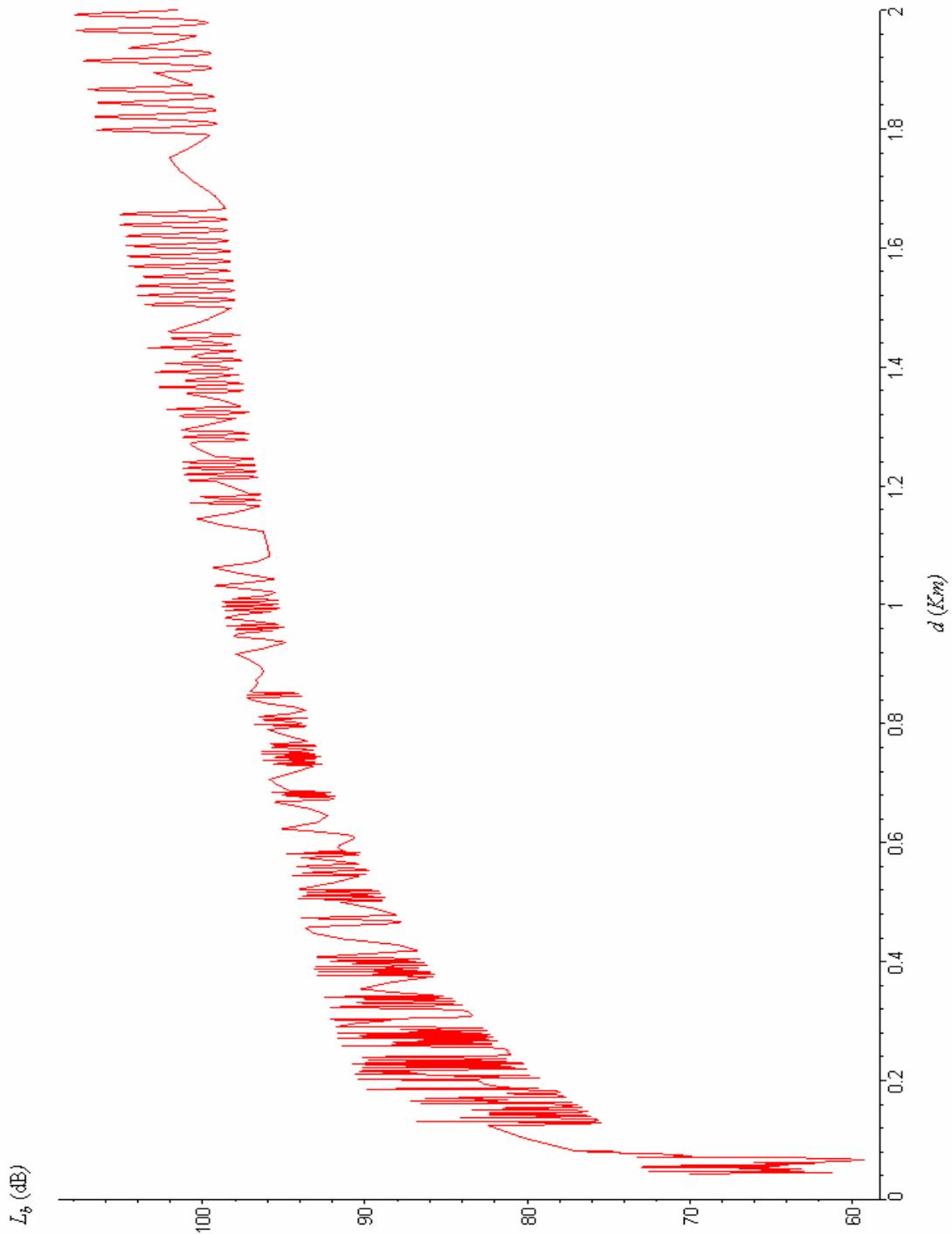


Figura 2.20

Como se ha dicho antes los resultados anteriores son sólo válidos para el enlace ascendente. Para el enlace descendente (o lo que es lo mismo, desde el aeronave hasta la estación terrena) se calcularán, con la ayuda de *Maple*, sólo el valor de las pérdidas para unas determinadas distancias y alturas del avión para que sirvan de comparación con los valores obtenidos para el caso ascendente.

Situación *ER-GS*, a 12.000 metros de altura y 240 Km de distancia

Ascendente: $L_b = 142,17$ dB.

Descendente: $L_b = 156,44$ dB.

Situación *INT-GS*, a 4.500 metros de altura y 40 Km de distancia

Ascendente: $L_b = 127,29$ dB.

Descendente: $L_b = 128,16$ dB.

Situación *AP-GS*, en la zona de embarque y a 1 Km de distancia

Ascendente: $L_b = 95,52$ dB.

Descendente: $L_b = 99,37$ dB.

En los resultados obtenidos se observa que, en general, las pérdidas para el enlace descendente han de ser mayores, pues se utiliza una frecuencia mayor y por tanto las pérdidas en el espacio libre L_{bf} son mayores. Sin embargo, por efecto de la reflexión en el terreno, la función de pérdidas L_b no es monótona con la distancia (no disminuye con ella) y habrá distancias concretas en las que las pérdidas serán menores que para una distancia justamente inferior.

2.12. Estado actual del sistema *TFTS*

Es un sistema que está en franca regresión en Europa. Estas licencias para comunicaciones desde la red conmutada en tierra con las aeronaves en vuelo se fueron otorgando desde aproximadamente el año 1997, sin embargo, en algunos países no han llegado a desplegarse. En el caso de España se ha llegado a otorgar una licencia no obstante no se ha llegado a desplegar la red. Los fabricantes tampoco están interesados en este sistema, y probablemente en la actualidad no quede ningún fabricante de sistemas de este tipo.

Es un caso curioso porque es un sistema que no despierta interés en ninguna capa de ninguno de los componentes del sector, pero no existe un servicio alternativo. Últimamente se ha hablado de transformar el avión en una micro célula *GSM* y el enlace con tierra en un plan de frecuencias que previamente había sido preparado en Europa para esos sistemas, pero es un sistema olvidado. Parece que el avión se está transformando en una especie de reducto de incomunicación.

Acorde con este desinterés, el *CEPT*, que es el organismo encargado de designar el espectro y establecer las normas reguladoras para el sistema *TFTS*, en la decisión *ECC/DEC/(03)03* (tomada en 2003 como indica el paréntesis (03)) deroga la anterior *ERC/DEC/(97)08* (el “Schiever” Plan) quedando las bandas 1670-1675/1800-1805 MHz libres para futuras aplicaciones coordinadas por el *CEPT* [6].

Capítulo 3

Sistema TFTS y reparto de beneficios

3.1. Introducción

La Teoría de Juegos Cooperativos es una útil herramienta usada para modelar situaciones en las que intervienen agentes que interactúan en su actividad económica para maximizar sus beneficios o minimizar sus costes. Es pues el campo económico donde dicha teoría tiene más extendido su uso.

En este capítulo se utiliza la Teoría de Juegos Cooperativos para resolver el problema económico que surge, en el campo de las telecomunicaciones, de la implantación del sistema *TFTS* y que consiste en establecer un reparto de los beneficios obtenidos por la cooperación entre los distintos países [3]. En este caso, varios agentes tienen que cooperar para poder prestar el servicio de telefonía en aviones y deben encontrar una manera de repartir los beneficios generados de la explotación del *TFTS* que satisfaga a todos. Es aquí donde interviene la Teoría de Juegos Cooperativos.

Recordando conceptos, un juego cooperativo consiste en un conjunto de jugadores N y una función característica v , que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ de jugadores un número real $v(S)$ que es interpretado como el máximo beneficio o ahorro que los miembros de S pueden conseguir si cooperan entre ellos. Modelando nuestro problema como un juego cooperativo se pueden aplicar los diferentes conceptos de solución y las

propiedades asociadas a ellos que la Teoría de Juegos Cooperativos aporta para resolverlo. La elección y justificación del concepto de solución a aplicar se hará en base a las propias características del problema del *TFTS*.

3.2. El problema de la implantación del sistema TFTS y la Teoría de Juegos

En este apartado se realiza una explicación detallada sobre cómo es la relación Teoría de Juegos Cooperativos-*TFTS* y como resuelve ésta el problema planteado.

El *TFTS*, como hemos visto en el capítulo anterior, es un sistema de telefonía pública el cual permite establecer conexiones telefónicas a los pasajeros de las aeronaves con destinatarios en tierra. Desde el avión se establece una conexión vía radio con la estación terrena más próxima, la cual, estará conectada con la red telefónica pública siendo posible encaminar la llamada hacia su destino.

Para disponer de este servicio de telefonía se necesitan, por tanto, estaciones terrenas (*GS*), repartidas por todo el territorio para proporcionar la mayor cobertura posible, y además estaciones de avión (*AS*).

Por otro lado, para que el servicio *TFTS* sea atractivo tanto para las empresas implementadoras como para los usuarios, debe estar extendido en un área suficientemente amplia, como puede ser Europa. Se necesitarán por tanto un gran número de estaciones de avión y terrenas.

El sistema *TFTS* es, por tanto, un servicio de ámbito internacional y requiere la cooperación de los operadores de telefonía de los distintos países para su implementación. Un buen número de operadores de telefonía europeo decidió cooperar e instalar estaciones terrenas suficientes para dotar de cobertura el continente europeo minimizando el solape entre ellas.

Los beneficios generados de la explotación del servicio dependen también del número de aerolíneas dispuestas a ofrecer el *TFTS* en sus aeronaves. El servicio será ofrecido a las aerolíneas por parte de los proveedores.

Los operadores acordaron la configuración de las estaciones terrenas a instalar, haciéndose cargo cada uno de la instalación de aquellas sitas en su propio país. Sin embargo, el principal motivo de desacuerdo fue el reparto de los beneficios generados de la explotación del sistema *TFTS*.

Una alternativa para el reparto de beneficios era dividirlos de forma proporcional a la inversión realizada por cada operador. Esta propuesta fue rechazada pues serían varios los operadores que querrían instalar más estaciones terrenas para así aumentar su inversión y por tanto conseguir una mayor proporción de los beneficios. Ello conllevaría que multitud de estaciones terrenas adicionales serían instaladas innecesariamente pues vendrían a cubrir zonas ya provistas de cobertura. Otra proposición fue permitir que cada operador se quedara con los beneficios generados por las llamadas cursadas a través de sus propias estaciones terrenas. Fueron muchos los operadores que rechazaron esta propuesta pues se veían perjudicados por este reparto.

Además, otra desventaja era que las propuestas anteriores no tomaban en cuenta el hecho de que para generar los beneficios eran necesarias además de las estaciones terrenas las estaciones de avión. Así se llega a la propuesta equitativa en la que un país participa de todos aquellos beneficios en los que entran en juego sus aeronaves o sus estaciones base o ambas a la vez. Resulta ser, por tanto, un reparto al que no encontramos inconvenientes tan evidentes como los encontrados a las dos propuestas anteriores.

Una aproximación diferente es presentada utilizando la Teoría de Juegos Cooperativos. En primer lugar, será necesario modelar la situación como un juego cooperativo y así usar los conceptos de solución para establecer un reparto aceptable de los beneficios. En contraste con las dos primeras proposiciones de reparto de beneficios antes mencionadas, los conceptos de solución no están basados sólo en las características individuales de los operadores. Se tienen en cuenta también consideraciones que tienen que ver con las posibles coaliciones entre los operadores. Por otro lado, la aproximación

que se sigue aquí, sí que tiene en cuenta el hecho de que ambas, estaciones terrenas y estaciones de avión, son necesarias para generar beneficios, y nos permitirá justificar cual de las propuestas es verdaderamente la más adecuada posible.

Para modelar el problema del *TFTS* como un juego cooperativo se necesita en primer lugar, establecer cuáles son los participantes en dicho juego. Notar que son tres las partes que juegan un papel primordial en el juego: operadores nacionales, proveedores del servicio y las líneas aéreas. Se asume el hecho de que si un operador nacional no invierte en instalar suficientes estaciones terrenas en un país, el proveedor del servicio no instalará el equipamiento de telecomunicaciones necesario para dar el servicio en las aeronaves de las líneas aéreas pertenecientes a dicho país. En realidad, ésta no es una suposición muy restrictiva pues las aeronaves la mayor parte del tiempo sobrevuelan el país al que pertenece su aerolínea. Por tanto, no será beneficioso invertir en aerolíneas cuyo país de origen no está cubierto por estaciones base.

Así, tomamos como participantes del juego aquellos países cuyos operadores nacionales estén dispuestos a cooperar para la implantación del servicio *TFTS*. Dichos países formarán lo que en Teoría de Juegos Cooperativos se denomina el conjunto N . Para poder llegar hasta este punto se ha supuesto además, que es cada país el que debe invertir en la instalación de estaciones terrenas y de avión. Implícitamente también estamos asignándole al país el papel de proveedor de servicio a las aerolíneas pertenecientes a él.

Para clarificar la situación se presenta un ejemplo simplificado donde son 5 los países que cooperan A, B, C, D, E (es decir $N=\{A, B, C, D, E\}$) para establecer el servicio *TFTS*. Se ha supuesto que ya han acordado la configuración de estaciones base a instalar y se sabe también el número de estaciones de avión a instalar. El coste de instalación de cada estación base es de 15 y el de cada estación de avión es de 3, ambas cifras expresadas en unidades monetarias. La siguiente tabla, muestra para cada uno de los países el número de estaciones terrenas, de estaciones de avión, así como los costes totales de instalación.

País	Estaciones terrenas	Estaciones de avión	Coste
A	4	150	510
B	4	210	690
C	3	250	795
D	5	400	1275
E	5	420	1335

Tabla 3.1

Se denota por c_i el coste invertido por el país $i \in N$ y $c(N)$ indica los costos totales en inversión para llevar a cabo la implementación del servicio, es decir,

$$c(N) = \sum_{i \in N} c_i .$$

La contribución de las estaciones sitas en el *área de servicio TFTS* de un determinado país al conjunto de conexiones telefónicas realizadas puede ser dividida en dos partes: por un lado, las llamadas realizadas por aviones pertenecientes a dicho país y por otro lado, las realizadas por aviones extranjeros que sobrevuelan dicha área. Por tanto, podemos ver que los beneficios generados pueden ser sólo asignados o al propio país o al país del que procede la aeronave. De forma natural, las ganancias pueden ser asignadas o a uno de los países o a dos de ellos, lo cual va a motivar el juego cooperativo que modela esta situación.

Para cualquier par de países i y j , pertenecientes al conjunto N , denotamos por a_{ij} al beneficio generado por las llamadas telefónicas realizadas desde aeronaves pertenecientes al país j que están sobrevolando el *área de servicio TFTS* del país i . Los beneficios a_{ij} los consideramos siempre no negativos y llevan ya descontados los costes de operación, que son proporcionales a la cantidad de tráfico cursado.

Para nuestro caso particular los valores a_{ij} se presentan en la Tabla 3.2 que llamaremos matriz de beneficios. Son tomados a modo de ejemplo y expresados en unidades monetarias. En dicha tabla las filas pueden ser interpretadas como el país sobre cuya

área de servicio *TFTS* está volando el avión y las columnas como el país al que pertenece el avión.

	A	B	C	D	E
A	430	2	6	46	12
B	1	603	27	27	68
C	8	24	834	129	138
D	286	12	91	1072	264
E	28	164	174	259	1688

Tabla 3.2

En la tabla anterior se aprecia como los mayores valores a_{ij} son aquellos en los que $i = j$ (los valores que están en la diagonal), lo que viene a justificar la suposición en la que se asume que una aeronave sobrevuela la mayor parte del tiempo el *área de servicio TFTS* del país al que pertenece su aerolínea, y por tanto ésta es la mayor contribución a los beneficios.

Con los datos que tenemos se pueden ya computar los beneficios que una coalición S de países que cooperan puede generar. Se asume que si una aeronave de un país perteneciente a S sobrevuela el *área de servicio TFTS* de un país que no forma parte de dicha coalición, pero que sí ofrece cobertura *TFTS*, puede hacer uso de dicho servicio. Los beneficios totales de la coalición se obtienen sumando los beneficios que son generados por uno o dos países pertenecientes a la coalición S (los a_{ij}). Por tanto, el beneficio total generado $v(S)$ por una coalición $S \subseteq N$ es

$$v(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} a_{ij} = \sum_{i \in S} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S: i \neq j\}} a_{ij}.$$

Ésta es la función característica del juego denominado **juego del sistema *TFTS***. De acuerdo a esta expresión se puede conseguir el valor $v(S)$ sumando aquellas entradas de la Tabla 3.2 que quedan cuando se eliminan las filas y columnas de los países que no

pertenecen a la coalición S , es decir, la suma de los términos de la submatriz de beneficios obtenida con las filas y las columnas de S .

Siguiendo con el ejemplo propuesto, en la siguiente tabla se listan los valores $v(S)$ para todas las posibles coaliciones S , $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$.

País	Beneficio	Coalición	Beneficio	Coalición	Beneficio	Coalición	Beneficio
A	430	AB	1036	ABC	1935	ABCD	3598
B	603	AC	1278	ABD	2479	ABCE	4207
C	834	AD	1834	ABE	2996	ABDE	4962
D	1072	AE	2158	ACD	2902	ACDE	5465
E	1688	BC	1488	ACE	3318	BCDE	5574
		BD	1714	ADE	4085		
		BE	2523	BCD	2819		
		CD	2126	BCE	3720	ABCDE	6393
		CE	2834	BDE	4157		
		DE	3283	CDE	4649		

Tabla 3.3

Para el ejemplo planteado, se muestran en la Tabla 3.4 los beneficios obtenidos por cada país según cada propuesta de reparto y en la última columna los costes correspondientes a cada país.

País	PI	GR	EQ	Coste
A	708	496	625	510
B	958	726	766	690
C	1104	1133	1133	795
D	1770	1725	1629	1275
E	1853	2313	2242	1335

Tabla 3.4

La proposición *PI* (proportional to investments) reparte los beneficios totales (el conseguido en el ejemplo por la gran coalición 6393) de forma proporcional a las inversiones hechas por cada país. Dichas inversiones vienen dadas en la columna de costes de la Tabla 3.1 (o en la Tabla 3.4). Con la notación comentada para los costes tenemos que el beneficio asignado a cada jugador viene dado por:

$$x_i = \frac{c_i}{c(N)} \sum_{j \in N} a_{ij} .$$

La propuesta *GR* (ground station) reparte a cada país los beneficios generados a través de las estaciones terrenas que cada uno tiene instaladas en su propio territorio. Esta división puede ser computada sumando para cada país los elementos de su fila en la Tabla 3.2 que corresponden a los beneficios generados por las estaciones terrenas de ese país. Esta propuesta expresada en términos matemáticos sería:

$$x_i = \sum_{j \in N} a_{ij} .$$

Por último, se añade la proposición *EQ* (*equitable*, o en español, propuesta equitativa), donde el reparto que se establece asigna al país *i* el valor dado por la fórmula

$$x_i = a_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (a_{ij} + a_{ji}) , \text{ para todo } i, j \in N .$$

Notar que este valor puede ser computado fácilmente sumando los elementos de la fila correspondiente al país *i* de la Tabla 3.2 y los elementos de la columna del país *i* dividido entre dos más el valor a_{ii} .

Las dos primeras propuestas partían ya con ciertas reticencias, y de hecho, si combinamos los datos expuestos en la Tabla 3.1 y 3.4 podemos ver como la propuesta *GR* no puede ser aceptable para el país A ya que los beneficios que éste obtiene no cubren sus costos. Por el contrario si seguimos la propuesta *PI*, los países A, C, D y E no estarían satisfechos puesto que la suma total de los beneficios que le son asignados (la suma de los valores de la columna *PI* en la Tabla 3.4 para dichos países) 5435 es menor que el beneficio generado si esos países se hubieran unido en coalición: 5465 (valor de la Tabla 3.3). Por tanto esos países piensan que B recibe demasiados beneficios. Sin embargo, se comprueba que el reparto establecido por la propuesta

equitativa no sufre de las carencias de las otras dos proposiciones. Lo que a continuación se plantea es justificar que la última de las propuestas (la propuesta EQ) es la mejor solución que se puede encontrar para el juego del sistema $TFTS$. Para ello enfocaremos el juego del sistema $TFTS$ desde la perspectiva de la teoría de juegos.

3.3. Justificación de la propuesta equitativa

Nuestro objetivo en el juego del sistema $TFTS$ ha sido encontrar una manera aceptable de repartir los beneficios generados con la cooperación de los países. Se ha identificado la situación $TFTS$ con un juego cooperativo y se verá que existe dicha forma aceptable de división de beneficios, proporcionada por la teoría de juegos cooperativos. Se llegará a la misma solución que plantea la propuesta equitativa y se comprobará, además, que coincide con la solución aportada por los conceptos de solución introducidos en el Capítulo 1. Más concretamente, valor de Shapley, el nucleolus, el valor de Tijs, el *core*, el núcleo y el conjunto de negociación.

En este caso la teoría de juegos no genera nuevas soluciones mejores que la propuesta equitativa, la cuál se obtiene de manera más o menos intuitiva. Sin embargo, la aportación realizada por la teoría de juegos es que se ha llegado a una solución que no garantiza ser una solución única pero sí una solución óptima que queda respaldada y justificada por las propiedades de los distintos conceptos de solución, que enfocando el problema desde diferentes puntos de vista, llegan a una misma conclusión.

En primer lugar, se analizan algunas de las propiedades vistas en el Capítulo 1 para los juegos cooperativos y que, en particular, cumple nuestro juego del sistema $TFTS$. Se verá que satisface dos propiedades de gran interés: monotonía y convexidad.

Teorema 3.1: El juego del sistema $TFTS$ es monótono.

Demostración:

Un juego v es monótono si para todo $S, T \subseteq N$ con $S \subseteq T$ entonces $v(S) \leq v(T)$.

Para el juego del sistema $TFTS$

$$v(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} a_{ij} ,$$

$$v(T) = \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} a_{ij} .$$

Se verifica que los a_{ij} son siempre positivos y, por tanto, si la coalición T contiene a la S , es obvio que

$$v(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} a_{ij} \leq v(T) = \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} a_{ij} ,$$

lo que demuestra el teorema. □

Volviendo al ejemplo se comprueba como se cumple la propiedad de la monotonía. Se observa en la Tabla 3.3 que el valor de una coalición que esté contenida en otra mayor siempre es menor que el valor de ésta última. Así, por ejemplo, el valor de la coalición AB es de 1036 unidades monetarias mientras que el valor de la coalición ABC que contiene a la anterior es de 1935 unidades monetarias.

Más interesante es aún la propiedad de convexidad (Definición 1.2), puesto que como se indicaba en el Capítulo 1, significa que a todos los jugadores y a todas las coaliciones les conviene cooperar.

Teorema 3.2: El juego del sistema *TFTS* es convexo.

Demostración:

La propiedad de convexidad establece que para todo $S, T \subseteq N$ se satisface $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$.

Centrándose ahora en el juego del sistema *TFTS*, se tiene que

$$v(S) = \sum_{i \in S} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S: j \neq i\}} a_{ij} .$$

$$v(T) = \sum_{i \in T} a_{ii} + \sum_{i \in T} \sum_{\{j \in T: j \neq i\}} a_{ij} .$$

Se calcula, en primer lugar, $v(S) + v(T)$ para después compararlo con $v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

$$v(S) + v(T) = \sum_{i \in S} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S: j \neq i\}} a_{ij} + \sum_{i \in T} a_{ii} + \sum_{i \in T} \sum_{\{j \in T: j \neq i\}} a_{ij} .$$

Si se reescribe esta expresión incluyendo todos los términos sumados, con cuidado de no sumar el mismo término dos veces para hacer más fácil su comparación, queda

$$\begin{aligned} v(S) + v(T) = & \sum_{i \in S \cup T} a_{ii} + \sum_{i \in S \cap T} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S: j \neq i\}} a_{ij} + \sum_{i \in T \setminus S} \sum_{\{j \in T: j \neq i\}} a_{ij} \\ & + \sum_{i \in T \cap S} \sum_{\{j \in T \cap S: j \neq i\}} a_{ij} + \sum_{i \in T \cap S} \sum_{\{j \in T \setminus S: j \neq i\}} a_{ij} \end{aligned}$$

A continuación se evalúa el término $v(S \cup T) + v(S \cap T)$,

$$v(S \cap T) = \sum_{i \in S \cap T} a_{ii} + \sum_{i \in S \cap T} \sum_{\{j \in S \cap T, j \neq i\}} a_{ij},$$

$$v(S \cup T) = \sum_{i \in S \cup T} a_{ii} + \sum_{i \in S \cup T} \sum_{\{j \in S \cup T, j \neq i\}} a_{ij}.$$

Notar que éste último término incluye todos los sumandos que incluía $v(S) + v(T)$ más otros términos no negativos. Esto se detalla en la siguiente figura:

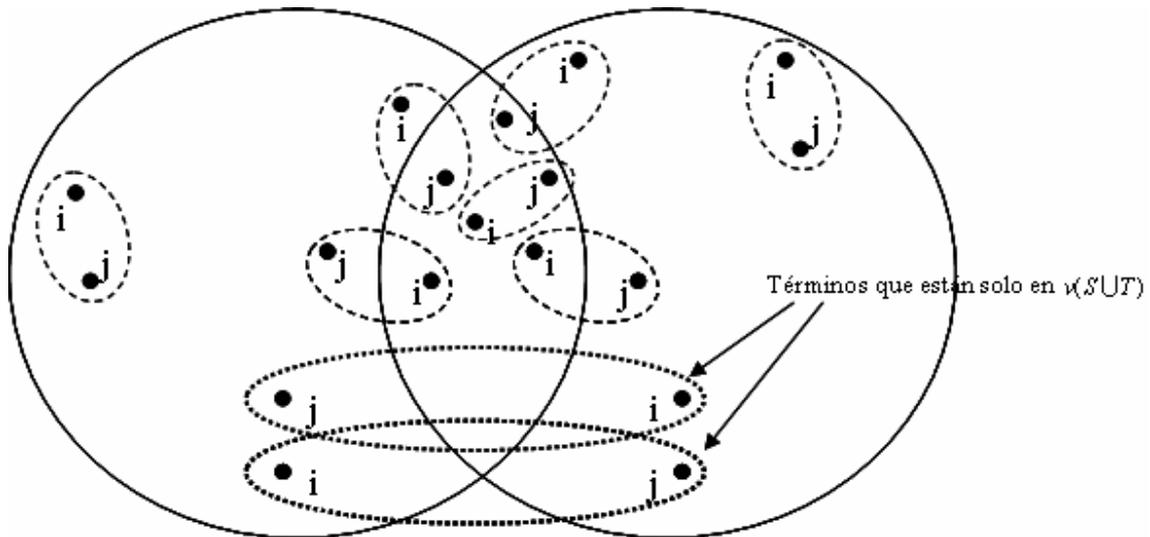


Figura 3.5

Por tanto se puede afirmar que se cumple la desigualdad de la convexidad para el juego del sistema *TFTS* pues el término $v(S \cup T) + v(S \cap T)$ incluye los mismos sumandos que $v(S) + v(T)$ más otros adicionales siendo todos los sumandos no negativos. \square

Si se vuelve al ejemplo y se toma como coalición S la formada por los países A y C y como coalición T la coalición formada por A y B. El valor $v(S)+v(T)$ es (valores extraídos de la Tabla 3.3):

$$v(S) = 1278.$$

$$v(T) = 1036.$$

$$v(S) + v(T) = 2314.$$

Ahora se evalúa $v(S \cup T) + v(S \cap T)$, teniendo en cuenta que $S \cup T = \{A, B, C\}$ y $S \cap T = \{A\}$:

$$v(S \cup T) = 1935.$$

$$v(S \cap T) = 430.$$

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) = 2365.$$

Se comprueba como efectivamente, $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$. En particular la convexidad implica la superaditividad y se comprueba que nuestro juego es esencial.

Este resultado es de gran relevancia, ya que cuando el juego cooperativo es convexo se conocen múltiples relaciones entre los conceptos de solución. Estas relaciones vienen detalladas en el texto “Cooperative Games, solutions and applications” de T. Driessen en el Capítulo 5 [5]. A continuación se exponen dichas relaciones, todas ellas incluidas en el texto señalado.

(1) El valor de Shapley $\Phi[v]$ de un juego convexo (N, v) es el centro de gravedad de los puntos extremos del *core* $C(v)$.

Se establece, por tanto, que el valor de Shapley (sección 1.7) de un juego convexo no sólo pertenece al *core* sino que también está justo en su centro. Ello induce a pensar que puede ser la solución más óptima dentro del *core* (sección 1.3), aunque, en general, no sea el único reparto del conjunto.

(2) El *core* $C(v)$ de un juego convexo (N, v) es el único conjunto estable del juego.

Este teorema está relacionado directamente con el Teorema 1.8 del Capítulo 1 que indicaba que el *core*, si es estable, es el único conjunto estable del juego. Lo que aquí se añade es que si el juego es convexo, entonces el *core* es siempre estable.

(3) El *core* $C(v)$ de un juego convexo (N, v) coincide con el conjunto de negociación de dicho juego, es decir, $C(v) = M(v)$.

En la sección 1.4 se indicó de forma genérica que el *core* estaba incluido en el conjunto de negociación ($C(v) \subseteq M(v)$). Pues bien, para el caso de los juegos convexos ambos coinciden. Por tanto, para cualquier imputación $x \in I(v)$ perteneciente al *core* de un juego convexo (como por ejemplo el valor de Shapley), podemos decir que ante cualquier objeción que plantee un jugador, siempre habrá una contraobjeción que anule la anterior y por tanto, el vector de pagos original seguirá siendo válido y aceptable para todos los participantes del juego.

(4) El núcleo, el prenúcleo y el nucleolus de todo juego convexo (N, v) coinciden, es decir, $K(v) = K^*(v) = \eta(v)$.

Existe una única solución al juego del sistema *TFTS* desde el punto de vista del núcleo y el prenúcleo, y ésta es el nucleolus.

(5) El menor pago esperado (o lo que es lo mismo, el vector inferior) en un juego (N, v) convexo coincide con los valores de las coaliciones individuales, es decir, $m_i(v) = v(\{i\})$, para todo $i \in N$. Además el juego del *TFTS* es casi-equilibrado y se puede asegurar la existencia del valor de Tijs (ver sección 1.8). Este es un resultado importante a la hora de hacer el cálculo del valor de Tijs del juego del sistema *TFTS*.

Estos resultados indican en resumen que, en un juego convexo, el *core* tiene muy buenas condiciones y el valor de Shapley es el vector de pagos más óptimo en su interior, que sólo el nucleolus es una solución válida desde el punto de vista del núcleo y que conocemos el vector inferior que permitirá calcular el valor de Tijs.

Una vez expuestas las relaciones entre los distintos conceptos de solución para un juego cooperativo convexo cualquiera nos centramos ahora en nuestro juego del sistema *TFTS* y se aplicarán estos nuevos conocimientos para justificar la solución que aporta la Teoría de Juegos.

A continuación se enuncian tres resultados que identifican la propuesta equitativa EQ , que es una solución propuesta para el juego del $TFTS$, con conceptos de solución de la Teoría de Juegos Cooperativos.

Teorema 3.3: La propuesta equitativa coincide con el valor de Shapley del juego del sistema $TFTS$.

Demostración:

Recordando la fórmula del valor de Shapley, sabemos que

$$\Phi_i[v] = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \gamma_n(S) [v(S) - v(S \setminus i)],$$

donde

$$\gamma_n(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

Ahora se sustituye el valor de $v(S)$ para el juego del $TFTS$ dado por:

$$v(S) = \sum_{j \in S} a_{jj} + \sum_{j \in S} \sum_{\{k \in S: j \neq k\}} a_{jk}.$$

A su vez, el valor de la coalición S sin incluir al jugador i (al que se le está calculando su valor de Shapley) es

$$v(S \setminus i) = \sum_{j \in S \setminus i} a_{jj} + \sum_{j \in S \setminus i} \sum_{\{k \in S \setminus i, j \neq k\}} a_{jk}.$$

Ahora se evalúa el término $v(S) - v(S \setminus i)$, anulándose todos los términos excepto aquéllos que contienen al jugador i :

$$v(S) - v(S \setminus i) = a_{ii} + \sum_{j \in S \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in S \setminus i} a_{ji}.$$

En este paso, por sencillez se ha eliminado la variable muda k y se ha sustituido por la j .

Sustituyendo en el valor de Shapley queda

$$\begin{aligned} \Phi_i[v] &= \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \left(a_{ii} + \sum_{j \in S \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in S \setminus i} a_{ji} \right) \\ &= \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} a_{ii} + \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \sum_{j \in S \setminus i} a_{ij} \\ &\quad + \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \sum_{j \in S \setminus i} a_{ji}. \end{aligned}$$

Se evalúan, a continuación, cada uno de esos tres términos. En el primero, se observa que el término a_{ii} es fijo y por tanto se saca fuera del sumatorio. Además, el término $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ no depende de la coalición S que se tome sino de su tamaño s que va desde tamaño 1 hasta el tamaño de la gran coalición n , y se repite tantas veces como coaliciones posibles que, conteniendo al jugador i y con tamaño s , puedan construirse con los elementos de la gran coalición. Al tener el jugador i fijado, se está indicando el número de conjuntos (coaliciones) de tamaño $s-1$ que pueden construirse con $n-1$ jugadores, es decir, combinaciones de $n-1$ jugadores en $s-1$ lugares

$$\sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} a_{ii} = a_{ii} \sum_{s=1}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \binom{n-1}{s-1}.$$

Desarrollando la expresión anterior queda

$$\begin{aligned} a_{ii} \sum_{s=1}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \binom{n-1}{s-1} &= a_{ii} \sum_{s=1}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s)!} \\ &= a_{ii} \sum_{s=1}^n \frac{(n-1)!}{n!} = a_{ii} \sum_{s=1}^n \frac{1}{n} = a_{ii} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n 1 = a_{ii}. \end{aligned}$$

Se procede ahora con el segundo término de la ecuación. El primer paso es cambiar de orden los sumatorios, lo que lleva a cambiar también los índices de forma que el resultado sea equivalente (se han de tener en cuenta todos los sumandos de la ecuación original)

$$\begin{aligned} \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \sum_{j \in S: i \neq j} a_{ij} &= \sum_{j \neq i} \sum_{\{S \subseteq N: i, j \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} a_{ij} \\ &= \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{\{S \subseteq N: i, j \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}. \end{aligned}$$

Ahora se procede de la misma forma que se ha hecho con el primer término,

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{\{S \subseteq N: i, j \in S\}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} = \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=2}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \binom{n-2}{s-2}.$$

En este caso, el tamaño mínimo para s es 2 pues la coalición S ha de contener a los jugadores i y j . De igual forma, el término $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ se repite tantas veces como coaliciones que, conteniendo a los jugadores i y j y con tamaño s , puedan construirse

con los elementos de la gran coalición, por eso se incluye el término $\binom{n-2}{s-2}$, es decir,

el número de combinaciones de $n-2$ objetos en $s-2$ lugares.

Desarrollando ahora

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=2}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \binom{n-2}{s-2} &= \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=2}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \frac{(n-2)!}{(s-2)!(n-s)!} \\
 &= \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=2}^n \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \frac{(n-2)!}{(s-2)!(n-s)!} \\
 &= \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=2}^n \frac{(s-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=2}^n (s-1) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=1}^{n-1} s.
 \end{aligned}$$

Si se recuerda la definición de una progresión aritmética, y la fórmula de su suma parcial dada por

$$b_n = b_1 + r(n-1) \text{ con } \sum_{k=1}^n b_k = \frac{(b_1 + b_n)n}{2} = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

se identifica con

$$\sum_{s=1}^{n-1} s = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Sustituyendo,

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j \neq i} a_{ij} \sum_{s=1}^n (s-1) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} a_{ij}.$$

Con el tercer término se procede de igual forma que con este anterior, tan solo intercambiando la i y la j , y el resultado sería entonces $\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} a_{ji}$.

Por tanto queda demostrado que el valor de Shapley del juego del sistema *TFTS* para el país i es

$$\Phi_i[v] = a_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (a_{ij} + a_{ji}),$$

con lo que queda demostrado. □

La cuestión ahora es, si para el juego del sistema *TFTS* el valor de Shapley es el único reparto dentro del *core*. La respuesta es negativa como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.4: Sea un juego *TFTS* con 2 países y la matriz de beneficios $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. El *core*,

siguiendo su formulación vista en la sección 1.3, vendrá dado por

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = v(N), x_1 \geq a_{11}, x_2 \geq a_{22}\},$$

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 7, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}.$$

El valor de la única posible coalición (que en este caso es la gran coalición),

$$v(N) = x_1 + x_2 = 7 = a_{11} + a_{22} + a_{12} + a_{21} = 1 + 1 + 3 + 2.$$

Operando con el valor de la gran coalición y las desigualdades anteriores queda

$$x_1 \geq 1 \rightarrow 1 + x_2 \leq 7 \rightarrow x_2 \leq 6.$$

Y, operando de la misma forma se obtiene

$$x_2 \geq 1 \rightarrow x_1 + 1 \leq 7 \rightarrow x_1 \leq 6.$$

Ya se tiene entonces el valor máximo que pueden tomar las componentes de las imputaciones pertenecientes al *core*. Por tanto, son múltiples las soluciones posibles que cumpliendo con esas cotas superiores e inferiores verifican también la condición de eficiencia. Ejemplos de soluciones serían

$$\text{Propuesta 1: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11} + a_{12} = 4 \\ x_2 = a_{22} + a_{21} = 3 \end{array} \right\}, \text{ que coincide con la solución } GR.$$

$$\text{Propuesta 2: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{11} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) = \frac{7}{2} \\ x_2 = a_{22} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) = \frac{7}{2} \end{array} \right\}, \text{ que coincide con la } EQ.$$

Sin embargo, la solución *PI*, $\left(\frac{7c_1}{c_1 + c_2}, \frac{7c_2}{c_1 + c_2} \right)$ donde c_1 y c_2 son los costes de ambos

países, no tiene porque estar en el *core*, ya que basta con tomar, por ejemplo, $c_1 = 1$ y

$$c_2 = 7, \text{ lo que nos lleva a que } x_1 = \frac{7}{8} < 1 \text{ y } x_2 = \frac{49}{8}.$$

A continuación, se adjunta una gráfica que ilustra el ejemplo anterior.

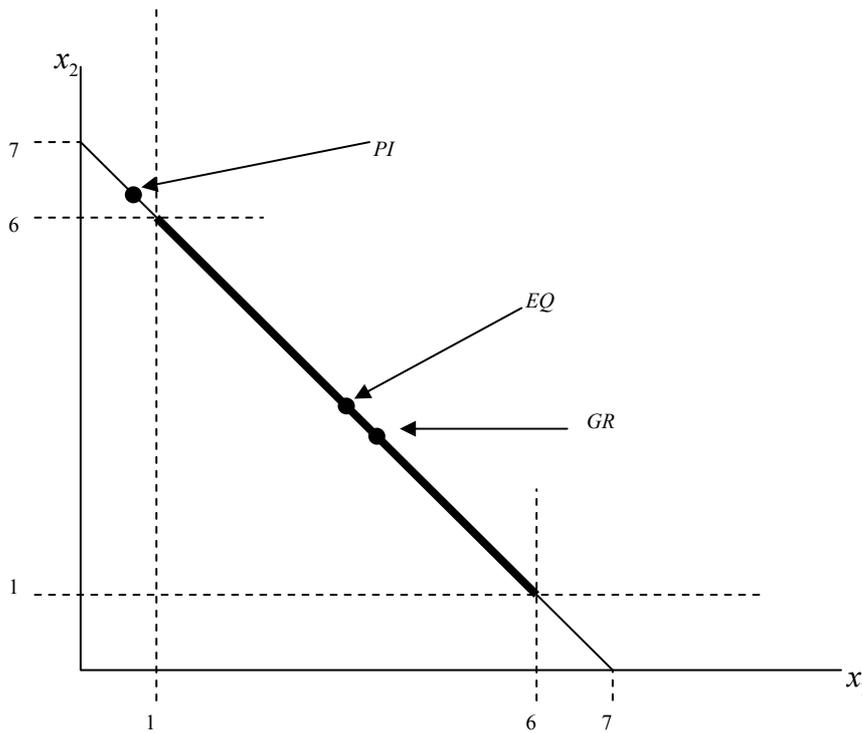


Figura 3.6

Se sabe entonces, que la solución aportada por el valor de Shapley está en el *core* pero no es la única pues hay infinitos puntos (soluciones) que pertenecen también a la recta en la que están las posibles soluciones. Se ha probado que la propuesta equitativa (EQ) está en el *core* y como se ve en la gráfica está justo en el centro de gravedad. Además, se ha comprobado que la solución GR también está en el *core*. Vemos que este resultado se verifica en general.

Proposición 3.5. La solución GR está en el *core*.

Demostración:

Se sabe del Capítulo 1, las condiciones que ha de cumplir un vector de pagos para pertenecer al *core*: $C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N) \text{ y } x(S) \geq v(S), \forall S \neq \emptyset, N\}$.

En primer lugar se comprueba que se verifica la condición de eficiencia para la propuesta GR :

$$x_i = \sum_{j \in N} a_{ij}, \text{ para todo } i \in N,$$

$$x(N) = \sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} a_{ij} = v(N).$$

Queda probar la condición $x(S) \geq v(S)$, $\forall S \neq \emptyset, N$. Para ello se sabe en primer lugar que $v(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} a_{ij} = \sum_{i \in S} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S, i \neq j\}} a_{ij}$. Ahora se opera con el valor de $x(S)$

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \sum_{j \in N} a_{ij} = \sum_{i \in S} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S, i \neq j\}} a_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} a_{ij}.$$

Se sabe que los términos a_{ij} son siempre no negativos y por tanto $0 \leq \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} a_{ij}$, con lo

que queda probada la desigualdad $x(S) \geq v(S)$, $\forall S \neq \emptyset, N$. □

Por tanto la solución GR es una solución válida desde el punto de vista del *core*. Sin embargo, además de que se vio en la sección 3.2 que es un reparto inadmisibles para parte de los jugadores, la propuesta EQ es mejor al estar más centrada. Una solución válida desde el punto de vista de un concepto de solución puede ser no válida para otro concepto de solución. El hecho de que una solución sea válida desde el punto de vista de los conceptos de solución más importantes de la Teoría de Juegos da una idea de que es una solución óptima e irrefutable.

Se recuerda que para el juego del sistema $TFTS$, por ser convexo, la existencia del valor de Tijs está asegurada. Se establece, a continuación, que el valor de Tijs coincide con la propuesta equitativa.

Teorema 3.6. La propuesta equitativa coincide con el valor de Tijs.

Demostración:

En primer lugar se calcula el vector inferior $m_i(v)$ que, como se sabe por ser (N, v) convexo, coincide con el valor de la coalición individual para ese jugador $i \in N$,

$$m_i(v) = v(\{i\}) = a_{ii}.$$

Se calcula ahora el vector superior (llamado utopía) $M_i(v)$,

$$\begin{aligned} M_i(v) &= v(N) - v(N \setminus i) = \sum_{j \in N} a_{ij} + \sum_{j \in N} \sum_{\{k \in N: j \neq k\}} a_{jk} - \left(\sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in N \setminus i} \sum_{\{k \in N \setminus i: j \neq k\}} a_{jk} \right) \\ &= a_{ii} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji}. \end{aligned}$$

Queda calcular el vector de pagos según el valor de Tijs para el juego del sistema *TFTS*:

$$\tau(v) = \lambda m(v) + (1 - \lambda)M(v), \text{ con } \lambda \in [0,1].$$

Al imponer el principio de eficiencia se calcula el valor de λ

$$\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N) = \sum_{i \in N} a_{ii} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} a_{ij}.$$

Desarrollando ahora el término $\sum_{i \in N} \tau_i(v)$, queda

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \tau_i(v) &= \sum_{i \in N} [\lambda m_i(v) + (1 - \lambda)M_i(v)] = \sum_{i \in N} \left[\lambda a_{ii} + (1 - \lambda) \left(a_{ii} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji} \right) \right] \\ &= \lambda \sum_{i \in N} a_{ii} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} a_{ii} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji} \\ &= \sum_{i \in N} a_{ii} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji}. \end{aligned}$$

Si se compara con $v(N)$, se observa que

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} a_{ij} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji},$$

pues en ellos se comprueba que se están sumando exactamente los mismos términos (aunque en un orden diferente). Luego, si

$$\sum_{i \in N} a_{ii} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji} = \sum_{i \in N} a_{ii} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} a_{ij},$$

entonces

$$1 - \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Aplicando la condición de eficiencia se llega a que el pago asignado a un jugador $i \in N$, según el valor de Tijs, está dado por

$$\tau_i(v) = \frac{1}{2} m_i(v) + \frac{1}{2} M_i(v).$$

Queda demostrar que coincide con el pago asignado por la propuesta equitativa a ese jugador i :

$$\begin{aligned} \tau_i(v) &= \frac{1}{2} m_i(v) + \frac{1}{2} M_i(v) = \frac{1}{2} a_{ii} + \frac{1}{2} \left[a_{ii} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji} \right] \\ &= a_{ii} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j \in N \setminus i} a_{ij} + \sum_{j \in N \setminus i} a_{ji} \right] = a_{ii} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j \neq i} a_{ij} + \sum_{j \neq i} a_{ji} \right] \end{aligned}$$

para todo $i, j \in N$. □

A continuación, se hace una representación gráfica del Ejemplo 3.4 desde el punto de vista del valor de Tijs. Para ello, en primer lugar se calculan los vectores superior e inferior,

$$m = (m_1, m_2) = (1, 1),$$

$$M = (M_1, M_2) = (6, 6).$$

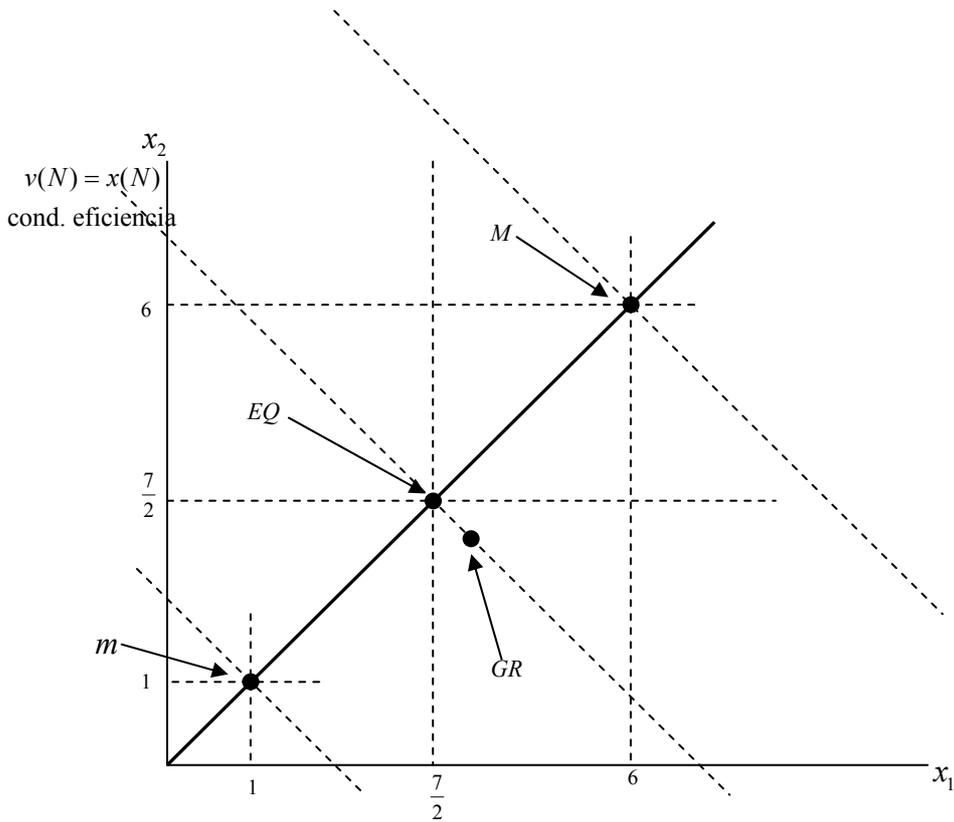


Figura 3.7

Notar que la propuesta EQ se haya en la línea que une los vectores superior e inferior cumpliendo además la condición de eficiencia, coincidiendo por tanto con el valor de Tijs. La propuesta GR , por su parte, cumple también la condición de eficiencia pero se haya fuera de la línea que une los vectores extremos. De la propuesta PI se puede decir que, si tomamos $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$ coincide con la propuesta EQ y por tanto con el valor de Tijs. Para cualesquiera otros valores de c_1 y c_2 se estarían tomando otros puntos distintos pero pertenecientes todos ellos a la recta de la condición de eficiencia.

Además, se ha visto que si el juego es convexo entonces $\eta(v) = K(v) = K^*(v)$. Se probará ahora que el nucleolus coincide también con la propuesta equitativa. Previamente se presenta el siguiente lema en el que se hace el cálculo de los excesos de la propuesta equitativa.

Lema 3.7: Sea x el vector de pagos de la propuesta equitativa y (N, v) el juego del sistema *TFTS*. Para todo $S \subseteq N$ el exceso $e^v(S, x)$ está dado por

$$e^v(S, x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{\{j \neq i: j \in N \setminus S\}} (a_{ij} + a_{ji}).$$

Demostración:

Sea $S \subseteq N$, por definición el exceso dado por la propuesta *EQ* es

$$\begin{aligned} e^v(S, x) &= v(S) - x(S) = \sum_{i \in S} \left[a_{ii} + \sum_{\{j \neq i: j \in S\}} a_{ij} \right] - \sum_{i \in S} \left[a_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{\{j \neq i: j \in N\}} (a_{ij} + a_{ji}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{\{j \neq i: j \in N \setminus S\}} (a_{ij} + a_{ji}). \end{aligned}$$

Teorema 3.8. La propuesta equitativa coincide con el nucleolus.

Demostración:

Se sabe que el juego del sistema *TFTS* es un juego convexo y por tanto podemos hacer uso de la siguiente igualdad para realizar esta demostración,

$$\eta(v) = K(v) = K^*(v).$$

Intentar calcular el nucleolus del juego del sistema *TFTS* es una tarea complicada y por tanto, la demostración se basará en comprobar que la propuesta equitativa está en el prenúcleo $K^*(v)$, que es más sencillo de obtener que el núcleo y el nucleolus.

Recordando de la sección 1.5 que el prenúcleo de un juego v se define como el conjunto de todas las preimputaciones $x \in I^*(v)$ (vectores de pago que cumplen el principio de eficiencia) que satisfacen,

$$s_{ji}^v(x) = s_{ij}^v(x), \text{ para todo } i, j \in N, i \neq j.$$

Dados dos jugadores $i, j \in N, i \neq j$, se definían:

$$s_{ij}^v(x) = \max \{ e^v(T, x) : T \in \Gamma_{ij} \},$$

$$s_{ji}^v(x) = \max \{ e^v(R, x) : R \in \Gamma_{ji} \}.$$

Donde Γ_{ij} y Γ_{ji} eran las coaliciones que contenían a un jugador pero no al otro. Además, para nuestra prueba se define también el conjunto de las coaliciones que no contienen ninguno de los jugadores i, j , es decir,

$$\Gamma = \{ S \subseteq N : i, j \notin S \}.$$

Con ello, pueden expresarse los anteriores conjuntos como

$$\Gamma_{ij} = \{ T = S \cup i : S \in \Gamma \},$$

$$\Gamma_{ji} = \{ R = S \cup j : S \in \Gamma \}.$$

Hay que probar que $s_{ji}^v(x) = s_{ij}^v(x)$. Para ello, se verá que existe una identificación biyectiva entre los elementos de Γ_{ij} y los de Γ_{ji} de manera que a cada uno del primer conjunto le hace corresponder otro del segundo conjunto con el mismo exceso. Sea $T \in \Gamma_{ij}$ entonces existe una coalición $S \in \Gamma$ con $T = S \cup i$ que se identifica con la coalición $R = (N \setminus S) \setminus i \in \Gamma_{ji}$. Dicha relación es evidentemente biyectiva. Haciendo uso del Lema 3.7 se tiene que los excesos de las coaliciones T y R son

$$e^v(T, x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in S \cup i} \sum_{\{j \neq i: j \in N \setminus (S \cup i)\}} (a_{ij} + a_{ji}),$$

$$e^v(R, x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \in (N \setminus S) \setminus i} \sum_{\{j \neq i: j \in N \setminus ((N \setminus S) \setminus i)\}} (a_{ij} + a_{ji}).$$

Llegados a este punto se observa que

$$N \setminus (S \cup i) = (N \setminus S) \setminus i,$$

$$N \setminus ((N \setminus S) \setminus i) = S \cup i.$$

Por tanto se puede afirmar que $e^v(T, x) = e^v(R, x)$. Como consecuencia $s_{ji}^v(x) = s_{ij}^v(x)$ quedando demostrado que la propuesta EQ está en el prenúcleo y por la hipótesis de convexidad del juego debe coincidir, por tanto, con el nucleolus. \square

A continuación se calcula el nucleolus $\eta(v)$ de un juego $v \in G^n$, con $n = 2$ usando el algoritmo recursivo expuesto en la sección 1.6. Se toma como vector de pago el

planteado por la propuesta equitativa EQ (donde el pago asignado a cada jugador viene dado por $x_i = a_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (a_{ij} + a_{ji})$) y se comprobará que se cumple la condición del nucleolus, es decir, $\theta(x) \leq_L \theta(y)$, para todo $y \in I(v)$.

Ejemplo 3.9: Se define

$$X^0 = I(v), \quad \Sigma^0 = \{S \subset N : S \neq N, \emptyset\}.$$

Para el ejemplo

$$\Sigma^0 = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

Se calculan ahora los $e^j = \min_{x \in X^{j-1}} \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x)$ (primero para $j = 1$),

$$e(\{1\}, x) = v(S) - x(S) = a_{11} - a_{11} = 0,$$

$$e(\{2\}, x) = a_{22} - a_{22} = 0.$$

Por tanto $e^1 = 0$. Se calcula $X^j = \left\{x \in X^{j-1} : \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x) = e^j\right\}$ para $j = 1$,

$$X^1 = \left(a_{11} + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}, a_{22} + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right).$$

El siguiente paso es el cálculo de $\Sigma_1 = \{S \in \Sigma^0 : e(S, x) = 0 \text{ para todo } x \in X^1\}$ que para nuestro ejemplo resulta,

$$\Sigma_1 = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

Y por último se calcula $\Sigma^1 = \Sigma^0 - \Sigma_1$

$$\Sigma^1 = \{\{1\}, \{2\}\} - \{\{1\}, \{2\}\} = \emptyset.$$

Se obtiene que $\kappa = 1$ y se sabe, por tanto, que $\theta(x) \leq_L \theta(y)$ para todo $x \in X^1$ y para todo $y \in I(v) \setminus X^1$.

A continuación se representa el ejemplo gráficamente. Para ello se hace uso de las siguientes condiciones

$$x_1 \geq a_{11}, \quad x_2 \geq a_{22},$$

$$x_1 + x_2 = a_{11} + a_{22} + a_{12} + a_{21}.$$

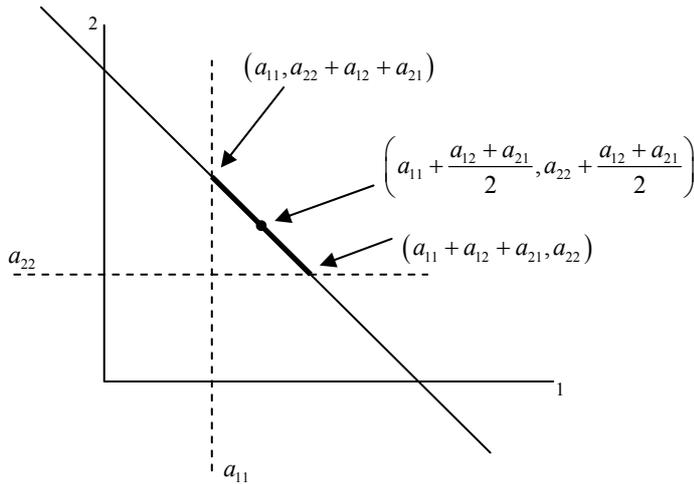


Figura 3.8

Cualquier otra propuesta no verifica para algún par de puntos $i, j \in N$ que $s_{ji}^v(x) = s_{ij}^v(x)$. En el siguiente ejemplo se ve lo que ocurre con la propuesta *GR* y la ya utilizada matriz de beneficios $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

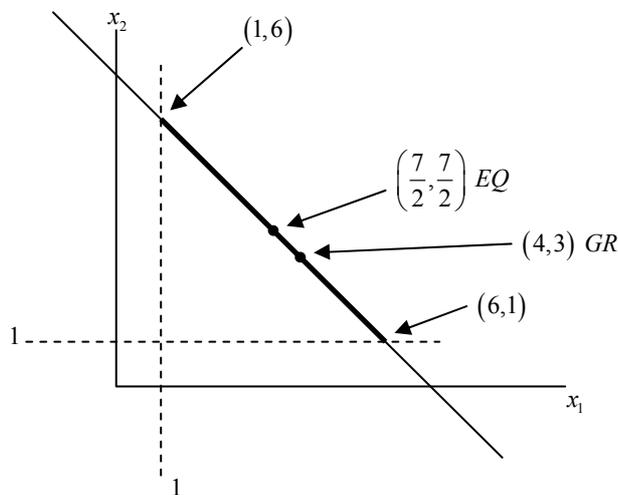


Figura 3.9

Se resumen ahora las relaciones obtenidas entre los distintos conceptos de solución para el juego del sistema *TFTS*. En primer lugar, se sabe que el valor de Shapley, que coincide con la propuesta equitativa (que a su vez coincide con el valor de Tijs y el nucleolus), es el centro de gravedad de los puntos extremos del *core* y que el *core* a su vez coincide con el conjunto de negociación, además de ser el único conjunto estable.

Se deduce por tanto, que la propuesta equitativa es válida desde el punto de vista del *core* y del conjunto de negociación verificándose lo siguiente,

$$\begin{aligned}\eta(v) &= K(v) = K^*(v), \\ \eta(v) &= \Phi[v] = \tau(v), \\ \Phi[v] &\in C(v), \text{ y } C(v) = M(v).\end{aligned}$$

Luego la propuesta equitativa es la solución más óptima desde diversos puntos de vista y queda respaldada por la Teoría de Juegos.

3.4. *k*-juegos

La teoría de los *k*-juegos surge precisamente tras dar solución al problema del reparto de los beneficios en el sistema *TFTS*. Se ha comprobado en los apartados anteriores como para el juego del *TFTS* los repartos establecidos por los diferentes conceptos de solución coinciden.

En el juego del sistema *TFTS*, el valor de una coalición venía dado por la suma de los beneficios individuales y bilaterales obtenidos por los jugadores de dicha coalición. En un *k*-juego el beneficio de una coalición será la suma de todos los beneficios de coaliciones de tamaño *k* que los jugadores de la coalición inicial puedan formar.

Un juego cooperativo (N, v) es un ***k*-juego** si su función característica *v* verifica para todo $S \subseteq N$ que

$$v(S) = \sum_{\{T \subseteq S: |T|=k\}} v(T).$$

Notar que un *1*-juego es simplemente un juego aditivo, esto es, para cada $S \subseteq N$,

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

A continuación, se exponen varios teoremas aplicables a los *k*-juegos.

Teorema 3.10: Todo k -juego no negativo es convexo.

Demostración:

Sea (N, v) un k -juego no negativo. El juego (N, v) puede ser escrito como una combinación lineal de juegos de unanimidad (recordar la sección 1.7). Por definición de k -juego se verifica

$$v = \sum_{\{T \subseteq N: |T|=k\}} v(T)v_T, \quad (1)$$

ya que si $S \subseteq N$, se tiene que

$$v(S) = \sum_{\{T \subseteq N: |T|=k\}} v(T)v_T(S) = \sum_{\{T \subseteq S: |T|=k\}} v(T).$$

Es decir, en este caso los dividendos de Harsanyi cumplen que $c_T = v(T)$ si $|T| = k$, y $c_T = 0$ en otro caso.

Como los juegos de unanimidad (N, v_R) con $R \subseteq N$ son convexos y el conjunto de los juegos convexos con conjunto de jugadores N es un cono, es decir, la combinación lineal de juegos convexos con coeficientes positivos es un juego convexo, la ecuación anterior implica entonces que (N, v) es convexo. \square

Se sabe del Capítulo 1 que un juego es convexo si la contribución que aporta a los beneficios un jugador a una coalición es mayor cuanto mayor sea la coalición. Los juegos convexos establecen repartos de los beneficios de la gran coalición en las que a cada jugador se le asigna un pago igual o mayor que el que el jugador obtendría individualmente. A su vez, nunca sería ventajoso pertenecer a una subcoalición.

Teorema 3.11: En un k -juego no negativo el valor de Shapley y el valor de Tijs coinciden.

Demostración:

Sea (N, v) un k -juego no negativo. El valor de Shapley del juego puede ser fácilmente encontrado de la siguiente manera. Para un juego de unanimidad (N, v_R) , por el Lema

1.21, se sabe que el valor de Shapley de un jugador i es $\frac{1}{|R|}$ si $i \in R$ y es 0 si $i \notin R$.

Usando esto y la linealidad del valor de Shapley [19] se concluye fácilmente de la expresión (1) que la función característica es:

$$\Phi_i[v] = \sum_{\{T \subseteq N: |T|=k, i \in T\}} \frac{v(T)}{k}, \text{ para todo } i \in N. \quad (2)$$

Para encontrar el valor de Tijs de un juego (N, v) , se hace uso del Teorema 3.10 y el resultado de Driessen y Tijs (1985) [4], que establece que para un juego convexo el mínimo beneficio que un jugador tiene derecho a conseguir es igual al beneficio que ese jugador puede obtener por sí mismo sin pertenecer a ninguna coalición. Por eso $m_i(v) = v(\{i\})$, para cada $i \in N$. Es conocido, ver Driessen [5] Capítulo 5 página 131, que el vector superior es un operador lineal. Usando de nuevo la expresión (1), se obtiene que

$$M_i(v) = \sum_{\{T \subseteq N: |T|=k\}} v(T),$$

ya que para el juego de unanimidad v_R se tiene que

$$M_i(v_R) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in R \\ 0, & \text{si } i \notin R. \end{cases}$$

Hay que distinguir dos casos. Si $k = 1$, entonces

$$\Phi_i[v] = v(\{i\}) = m_i(v) = M_i(v),$$

y por tanto el valor de Shapley y el valor de Tijs coinciden ($\Phi_i[v] = \tau_i(v)$). Si $k \geq 2$, entonces puede verse que $m_i(v) = 0$ y que $M_i(v) = k\Phi_i[v]$ y por tanto, $\Phi_i[v] = \tau_i(v)$. Se concluye así la prueba del teorema. \square

De la convexidad de un k -juego se deriva que tanto nucleolus como el valor de Shapley son repartos estables, es decir, para cada subcoalición, los jugadores pertenecientes a ella obtienen igual o mayor beneficio que si actuaran individualmente. Además, el valor de Shapley y el valor de Tijs coinciden y por tanto, el valor de Tijs es también estable.

Teorema 3.12: Para un 2-juego no negativo el nucleolus coincide con el valor de Shapley y el valor de Tijs.

Demostración:

Sea (N, v) un 2-juego no negativo. Teniendo en cuenta el Teorema 3.11 basta probar que $\Phi_i[v]$ minimiza la función reclamación $\theta(x)$ (vista en el Capítulo 1, sección 1.6) en el orden lexicográfico sobre el conjunto de imputaciones. Primero se prueba que para cada $S \subseteq N$ se verifica que $e(S, \Phi[v]) = e(N \setminus S, \Phi[v])$. Para una coalición $S \subseteq N$ fijada se tiene que, por la igualdad (1)

$$\begin{aligned} e(S, \Phi[v]) &= v(S) - \sum_{i \in S} \Phi_i[v] = \sum_{\{T \subseteq S: |T|=2\}} v(T) - \sum_{i \in S} \sum_{\{T \subseteq N: |T|=2, i \in T\}} \frac{v(T)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S \setminus i} v(i, j) - \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{2} v(i, j) \\ &= - \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} \frac{1}{2} v(i, j). \end{aligned}$$

Como esta última expresión es simétrica en S y en $N \setminus S$, se ve fácilmente que

$$e(S, \Phi[v]) = e(N \setminus S, \Phi[v]).$$

A continuación se argumentará que esto implica que $\Phi[v]$ minimiza el vector de excesos $\theta(x)$ en el orden lexicográfico \leq_L . Primero se ve que

$$\begin{aligned} e(S, x) + e(N \setminus S, x) &= v(S) - \sum_{i \in S} x_i + v(N \setminus S) - \sum_{i \in N \setminus S} x_i \\ &= v(S) + v(N \setminus S) - v(N), \end{aligned}$$

para todo vector de pago x y para toda $S \subseteq N$. Se ve que esta última expresión es independiente de x . Esto implica que existe al menos un vector de pagos x tal que $e(S, x) = e(N \setminus S, x)$, para todo $S \subseteq N$. Ahora, sea x un vector de pagos diferente a $\Phi[v]$. Entonces el conjunto $A := \{S \subseteq N : e(S, x) > e(N \setminus S, x)\}$ es no vacío. Se toma $T \in A$ tal que

$$e(T, x) = \max_{S \in A} e(S, x).$$

Entonces,

$$e(T, \Phi[v]) = e(N \setminus T, \Phi[v]),$$

$$e(T, x) > e(N \setminus T, x),$$

$$e(T, \Phi[v]) + e(N \setminus T, \Phi[v]) = e(T, x) + e(N \setminus T, x).$$

Esto implica que $e(T, x) > e(T, \Phi[v])$. Gracias a la forma en que se ha escogido T , se sabe que $e(S, x) = e(S, \Phi[v])$ para todo $S \subseteq N$ tal que $e(S, x) > e(T, x)$. Combinando todo esto se tiene que $e(\Phi[v]) \leq_L e(x)$ y por tanto $\Phi[v] = \eta(v)$. \square

Teorema 3.13: Sea un juego cooperativo (N, v) la suma de un juego aditivo y un k -juego no negativo. Entonces (N, v) es convexo y el valor de Shapley coincide con el valor de Tijs ($\Phi[v] = \tau(v)$). Además, si $k=2$, entonces ambos valores coinciden con el nucleolus ($\eta(v) = \Phi[v] = \tau(v)$).

Demostración:

Como un juego aditivo es convexo y la suma de dos juegos convexos es convexa también, la convexidad del juego (N, v) se deduce del Teorema 3.10. Notar que para un juego aditivo (N, a) se tiene que para toda $i \in N$,

$$\eta_i(a) = \Phi_i[a] = \tau_i(a) = a(\{i\}). \quad (3)$$

Además, para estos tres conceptos de solución se cumple que la solución de la suma de un juego aditivo con otro juego arbitrario cualquiera es igual a la suma de las soluciones de ambos juegos por separado, es decir,

$$\gamma(N, a + w) = \gamma(N, a) + \gamma(N, w). \quad (4)$$

En la expresión (4) (N, a) es un juego aditivo, (N, w) es un juego arbitrario y γ es cualquiera de los tres conceptos de solución de los que estamos hablando (N, Φ o τ). Combinando todo esto con los resultados de los Teoremas 3.11 y 3.12 se obtiene la igualdad de los tres conceptos de solución referidos. \square

La implicación $\eta(v) = \Phi[v]$, implica que el valor de Shapley establece un reparto entre los miembros de una coalición de forma que las reclamaciones o quejas sean mínimas, es decir, el grado de conformidad de los miembros de la coalición sea el mayor posible. La implicación $\Phi[v] = \tau(v)$ implica que el valor de Shapley de un valor de compromiso entre el mayor y el menor valor de un juego.

Mostramos ahora como el juego del sistema *TFTS* se identifica con un k -juego. En la sección 3.2 se vio que su función característica tiene la siguiente forma

$$v(S) = \sum_{i \in S} a_{ii} + \sum_{i \in S} \sum_{\{j \in S: j \neq i\}} a_{ij}.$$

Para poder aplicar los resultados teóricos obtenidos anteriormente, se dividirá este juego cooperativo en otros dos, cada uno de ellos con las siguientes funciones características w_1 y w_2 :

$$w_1(S) = \sum_{i \in S} a_{ii} ,$$

$$w_2(S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} a_{ij} .$$

Se observa entonces que w_1 es la función característica de un I -juego o lo que es lo mismo, un juego aditivo. Por su parte, w_2 es la función característica de un 2 -juego, que por estar tratándose de un juego de beneficios es claramente no negativo. Por tanto, se ha descompuesto el juego correspondiente al problema inicial del *TFTS* en una suma de un juego aditivo y un 2 -juego no negativo. Se está pues en disposición de aplicar el Teorema 3.13 y afirmar entonces que el juego del sistema *TFTS* es convexo, y para este juego el nucleolus, el valor de Shapley y el valor de Tijs coinciden.

Otro ejemplo de utilización de la teoría de los k -juegos es su aplicación a la resolución del problema del **Rerutado de las Llamadas Telefónicas Internacionales**. Se hace ahora una descripción del problema.

La mayoría de las llamadas internacionales son enrutadas vía circuitos directos entre el país de origen y el país de destino. Pues bien, se puede hacer un uso más eficiente de éstos circuitos y evitar así congestión de la red, si durante las horas de mayor tráfico las llamadas son enrutadas vía circuitos pertenecientes a países que en esos momentos registran poco tráfico [8]. Estos circuitos son llamamos líneas de tránsito internacionales. Por ejemplo, cuando hay una gran carga de tráfico entre Europa y América, es de noche en Australia y el tráfico desde y hacia Australia es bastante bajo. Por tanto, parte del tráfico entre Europa y América puede ser enrutado vía líneas de tránsito Australianas y el número de circuitos ocupados entre Europa y América se reduce considerablemente. Se reduce así la congestión y se evitan pérdidas de llamadas que en horas punta podrían ser rechazadas por la falta de circuitos para establecer la comunicación telefónica.

Para el correcto funcionamiento de la red una llamada entre distintos continentes es encaminada sólo una vez, es decir, sólo puede seguir un camino hacia el destino pues el intento de establecer la llamada por varios caminos diferentes a la vez provocaría la congestión de la red. Por ejemplo, una llamada desde Holanda hacia Canadá puede ser rerutada vía Australia o vía Japón pero no por ambos países simultáneamente.

Para generar beneficios haciendo uso del rerutado de las llamadas internacionales es necesaria la cooperación de tres partes: las líneas portadoras del país origen, las líneas de tránsito internacionales y las líneas del país destino. De los estudios de Gibbens et al. (1991) [8] y van Golstein Brouwers (1992) [11] se deduce que en el problema del rerutado de las llamadas internacionales es relevante considerar sólo tres zonas: la zona Americana, la zona Europea y la zona Asiática. Los beneficios son generados esencialmente cuando llamadas internacionales de una zona a otra son rerutadas vía la tercera zona.

Se pretende modelar el problema del rerutado de las llamadas telefónicas como un juego cooperativo. Los jugadores son las líneas de tránsito internacionales (que pertenecen a operadores privados o públicos). Además, la ganancia de una coalición $v(S)$ se define como el ahorro de costos que los miembros de S pueden obtener gracias a los circuitos de los que se prescinde con el uso de las líneas de tránsito internacionales. El número de portadores internacionales involucrados en una situación de rerutado de una llamada internacional es 3 tal como se explica en el párrafo anterior (1 por cada zona). Se deduce de los estudios de Gibbens et al. (1991) [8] y van Golstein Brouwers (1992) [11] que sumando los ahorros de costos generados por subcoaliciones de tamaño tres de una coalición S se obtiene una buena aproximación del ahorro de costos total generado por la coalición S . Resumiendo, para una coalición S se tiene

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S: |T|=3} v(T).$$

Se ha obtenido un juego cooperativo en el que los beneficios son generados por coaliciones consistentes en tres jugadores. Para encontrar los beneficios totales (que en este caso son ahorro de costos) simplemente se suman los beneficios de todas las subcoaliciones que se pueden formar de tres jugadores. Se aprecia pues una similitud con el caso de la situación *TFTS* en la que el beneficio total generado por una coalición

se obtiene sumando los beneficios de todas las subcoaliciones compuestas, en este caso, de dos jugadores.

REFERENCIAS

- [1] Asamblea de Radiocomunicaciones de la UIT. Rec. UIT-R P.527-3. “Características eléctricas de la superficie de la tierra”, 1992.
- [2] Aumann, R. J. “Markets with a Continuum of Traders”, *Econometrica*, 1964, 32(1), pp. 39-50.
- [3] Borm, P., Groot Bruinderink, R., van den Nouweland, A., van Golstein Brouwers, W. and Tijs, S. “A Game Theoretic Approach to Problems in Telecommunication”. *Management Science*, 1996. pp 294-303, Vol. 42, No. 2.
- [4] Driessen, T. and Tijs, S., “The Tijs Value, the *Core* and Semicconvex Games”, *International J. Game Theory*, 1985, 229-248.
- [5] Driessen, T. “Cooperative Games, Solutions and Applications”. Kluwer Academic Publisher, 1988.
- [6] ECC (Electronic Communications Committee), ECC/DEC (03)03. Decision of 17 October 2003 on the withdrawal of the ERC decision (97)08 “Decision on management of the Schiever Plan for the Terrestrial Flight Telecommunications System”.
- [7] ETSI (European Telecommunications Standards Institute). ETSI TS 101 281 V1.2.1 (2001-11). “Electromagnetic compatibility and Radio spectrum Matters (ERM)”; Terrestrial Flight Telecommunications System; Protocol to support GSM-A.
- [8] Gibbens, R., Nelly, F., COPE, G. and Whitehead, M. “Coalitions in the International Network”, in A. Jensen and V. Iversen (Eds.), *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change ITC*, 1991, 93-98.
- [9] Gillies, D. B. “Contributions to the theory of games”, in Kuhn and Tucker (Eds.), 1953.
- [10] Goddard, M. “Sharing between TFTS and radio astronomy in the 1.6 GHz band”. ERC Report 11 dentro de la CEPT, 1992. Encontrado en: www.ero.dk/documentation/docs/doc98/official/pdf/REP020.PDF.
- [11] van Golstein Brouwers, W. “Cost Reductions by Coalitions in the International Network”, Report NT-RA-92-1146, PTT Research, The Netherlands (Confidential), 1992.

- [12] Hernando Rábanos, J. M. “Transmisión por Radio”. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, 1998.
- [13] Maschler M. and Peleg, B. “A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game”, 1966. Pacific J Math 18: 289–328.
- [14] Maschler, M., Peleg, B. and Shapley, L. "Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts", 1979, Mathematics of Operations Research.
- [15] Morgenstern, O. and von Neumann, J. “The theory of games and economic behaviour”. Princeton U. Press, 1944.
- [16] Rey, E. “Telecomunicaciones móviles”, Serie Mundo Electrónico. Editorial Marcombo, 1992.
- [17] Roth, A.E. 1988. “The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley”. Cambridge, Cambridge University Press.
- [18] Schmeidler, D. “The Nucleolus of a Characteristic Function Form Game”, SIAM J. Appl. Math, 1969, 17(6), pp. 1163-1170.
- [19] Shapley, L. “A Value for n -Person Games”, Annals of mathematics studies. No. 28. Contributions to the theory of games. Vol. II. Princeton: Princeton University Press, 1953, pp. 307-317.
- [20] Shapley, L. and Shubik, M. “Characteristic Function, Core, and Stable Set, en Game theory in economics”. R-904-NSF/6. Santa Monica, Calif.: Rand, 1971.
- [21] Tijs, S. “Bounds for the Core of a game and the τ -value”, in O. Moeschlin and P. Pallaschke (Eds.), Game Theory and Mathematical Economics, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981, 123-132.
- [22] <http://perso.wanadoo.fr/starec/62020.HTM>
- [23] <http://perso.wanadoo.fr/starec/62320.HTM>