

# Capítulo 3

## Análisis de Fourier

El método pseudoespectral que vamos a utilizar se basa en el uso de series de Fourier<sup>†</sup>. Debido a la imposibilidad de usar funciones continuas en una simulación numérica, en el modelo que se presenta se va a utilizar la transformada discreta de Fourier (DFT) [21][20] mediante la librería FFTW [8].

### 3.1. Series de Fourier

Las series de Fourier nos permiten aproximar una función periódica en función de unas sumas ponderadas de senos y cosenos. En este proyecto se tiene un campo de velocidades en un cubo de lado  $2\pi$  que se repite periódicamente en el espacio y que puede aproximarse por una representación en series de Fourier. Para calcular los coeficientes de las series de Fourier se va a usar la transformada discreta de Fourier (DFT) para lo cual, en la sección 3.3, se establece la relación entre ambas.

Primero vamos a definir la serie de Fourier y sus propiedades en los casos unidimensionales para luego extender los resultados a nuestro problema, donde tenemos funciones vectoriales en tres dimensiones dependientes de tres variables.

Vamos a definir la representación en series de Fourier de un vector como la de cada una de sus componentes por separado. Así pues, en el siguiente apartado se define la serie de Fourier de una función dependiente de tres variables, que es una de las herramientas que se utilizan en la resolución del método pseudoespectral.

#### 3.1.1. Definición

##### 3.1.1.1. Series de Fourier en una dimensión

La definición de la serie de Fourier en una dimensión de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica en  $x$  de periodo  $X_0$  es

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi}{X_0} kx}, \quad (3.1)$$

---

<sup>†</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier. Se incorporó a la Escuela Normal Superior donde tuvo entre sus profesores a Joseph Louis Lagrange y Pierre Simon Laplace. Posteriormente, ocuparía una cátedra en la Escuela Politécnica, a partir de 1817 formó parte de la Academia de Ciencias Francesa. Como militar acompañó a Napoleón en su campaña por Egipto.

donde  $c_k$  son los coeficientes de la serie de Fourier y se definen como

$$c_k = \widehat{f}_k(x) = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{X_0} kx} dx. \quad (3.2)$$

Si se cumplen las condiciones de Dirichlet para las series de Fourier, es decir, que la función sea periódica y continua salvo en un número finito de puntos y que tenga un número finito de máximos y mínimos locales estrictos en el periodo, la expresión 3.1 es la función  $f$  salvo en los puntos de discontinuidad ( $x_0$ ) donde su valor es  $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ .

### 3.1.1.2. Series de Fourier en tres dimensiones

La definición de la serie de Fourier en tres dimensiones de una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que es periódica en las tres variables con el mismo periodo  $X_0$  es

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} c_{k_1} c_{k_2} c_{k_3} e^{i \frac{2\pi}{X_0} k_1 x_1} e^{i \frac{2\pi}{X_0} k_2 x_2} e^{i \frac{2\pi}{X_0} k_3 x_3} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{k_3=-\infty}^{\infty} c_{\mathbf{k}} e^{i \frac{2\pi}{X_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $c_{\mathbf{k}}$  son los coeficientes de la serie de Fourier y se definen como

$$c_{\mathbf{k}} = \widehat{f}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{X_0^3} \int_0^{X_0} \int_0^{X_0} \int_0^{X_0} f(x_1, x_2, x_3) e^{-i \frac{2\pi}{X_0} (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.4)$$

Esta aproximación es pues el resultado de aplicar las series de Fourier unidimensionales a una función que depende de tres variables tres veces consecutivas, transformando en cada una de ellas una de las variables del espacio físico al de Fourier.

## 3.1.2. Propiedades

En esta sección vamos a ver distintas propiedades que vamos a usar de las series de Fourier. En particular cómo se obtienen los coeficientes de las series de funciones que son el resultado de ciertas operaciones matemáticas.

### 3.1.2.1. Suma

Si queremos calcular los coeficientes de la serie de Fourier del resultado de la suma de dos funciones,  $f(x)$  y  $g(x)$ , del mismo periodo  $X_0$ , donde

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i \frac{2\pi}{X_0} kx}, \quad (3.5)$$

$$\widehat{g}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{i \frac{2\pi}{X_0} kx}, \quad (3.6)$$

siendo  $d_k$  y  $e_k$  son los coeficientes de la series de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$  respectivamente. El resultado de la suma es

$$\widehat{f}(x) + \widehat{g}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{i \frac{2\pi}{X_0} kx} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{i \frac{2\pi}{X_0} kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_k + e_k) e^{i \frac{2\pi}{X_0} kx}. \quad (3.7)$$

Por tanto, el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier de la suma de funciones a partir de los coeficientes de las funciones por separado es

$$\widehat{(f+g)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{X_0} kx}, \quad (3.8)$$

donde

$$c_k = d_k + e_k. \quad (3.9)$$

Es decir, los coeficientes se calculan como la suma de los coeficientes de las funciones por separado. Es inmediato extender esta propiedad a tres dimensiones

$$c_{\mathbf{k}} = d_{\mathbf{k}} + e_{\mathbf{k}}. \quad (3.10)$$

### 3.1.2.2. Derivada espacial

Si queremos calcular los coeficientes de la serie de Fourier del resultado de la derivada respecto a la variable espacial de la función unidimensional  $f(x)$  tenemos

$$d_k = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} f'(x) e^{-i\frac{2\pi}{X_0} kx} dx. \quad (3.11)$$

Integrando por partes

$$d_k = \frac{1}{X_0} \left[ f(x) e^{-i\frac{2\pi}{X_0} kx} \Big|_0^{X_0} - \int_0^{X_0} \left( -i\frac{2\pi}{X_0} k \right) f(x) e^{-i\frac{2\pi}{X_0} kx} dx \right]. \quad (3.12)$$

Como la función es periódica de periodo  $X_0$  y para cualquier  $k$  se cumple que  $e^{-i2\pi k} = 1$  desaparece el primer término, resultando

$$d_k = \frac{1}{X_0} \left[ \left( i\frac{2\pi}{X_0} k \right) \int_0^{X_0} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{X_0} kx} dx \right], \quad (3.13)$$

y por la definición 3.2

$$d_k = i \left( \frac{2\pi}{X_0} k \right) c_k. \quad (3.14)$$

Es sencillo extender esta propiedad a tres dimensiones a partir de la ecuación 3.4 con lo que se obtiene

$$\left( \frac{\partial \widehat{f_{\mathbf{k}}}}{\partial x_l} \right)_{\mathbf{k}} = i \left( \frac{2\pi}{X_0} k_l \right) c_{\mathbf{k}} \quad \text{para } l = 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

En particular

$$\widehat{\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{k}}} = i \frac{2\pi}{X_0} \mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{u}_{\mathbf{k}}} \quad (3.16)$$

y

$$\widehat{\nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}}} = - \left( \frac{2\pi}{X_0} \right)^2 k^2 \widehat{\mathbf{u}_{\mathbf{k}}} \quad (3.17)$$

donde  $k^2$  representa al módulo de  $\mathbf{k}$  al cuadrado.

### 3.1.2.3. Derivada temporal. Derivada término a término

En los cálculos espectrales que se van a desarrollar en el capítulo 4 se realiza la evolución temporal de los coeficientes de Fourier. En la resolución se utiliza la siguiente propiedad

$$\widehat{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} = \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t}. \quad (3.18)$$

Esta propiedad que no es cierta en general se cumple cuando las funciones verifican las condiciones de Dirichlet para las series de Fourier. El campo de velocidades que se usa en este proyecto tiene condiciones de contorno periódicas y cumple las condiciones de Dirichlet por lo que se puede aplicar esta propiedad.

## 3.2. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La DFT transforma una secuencia discreta de valores de una función en otra de la misma longitud que resume la influencia de cada frecuencia discreta en la secuencia original. Aplicada a nuestro problema, la DFT transforma una matriz tridimensional, que representa una variable fluida en el espacio físico, al espacio de Fourier, donde podemos obtener la información asociada a cada número de onda. En la sección 3.3 se establece como utilizarla para calcular los coeficientes de la serie de Fourier y, por tanto, utilizarla para los cálculos espectrales del método que se usa en este proyecto.

### 3.2.1. DFT en una dimensión

La transformada discreta de Fourier en una dimensión [21][20] de una función  $f(n)$  de la que se toman  $N$  muestras en los puntos  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  se define como

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-2\pi i k n / N} \quad \text{donde } k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.19)$$

Y su transformada inversa

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \cdot e^{2\pi i k n / N} \quad \text{donde } n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.20)$$

Esta transformada permite obtener por ejemplo una representación del espectro de un campo de velocidades del que sólo conocemos los valores en determinados puntos del espacio. El espectro que obtenemos mediante la DFT se puede interpretar como un muestreo del espectro continuo tal y como puede verse en la ecuación 3.31. La influencia del número de muestras que tomamos en el cubo se puede resumir así: dado que el número de muestras es igual al número de frecuencias que obtenemos con esta transformada, y que éstas son los múltiplos de la frecuencia de muestreo, para analizar frecuencias más altas debemos tomar más muestras o tomarlas con una frecuencia de muestreo mayor, aunque esto último hace que las muestras en frecuencia estén más separadas entre sí.

A continuación vamos a ver un ejemplo que ilustra el uso de la DFT, para lo cual partimos de la siguiente función:

$$f(x) = \text{sen}(30x) + 5 \text{sen}(4x) \quad x \in [0, 2\pi). \quad (3.21)$$

Lo primero que se hace es tomar muestras equiespaciadas de la señal y construir la secuencia discreta  $f(n)$  que se representa en la figura 3.1 donde

$$f(n) = f(x)|_{x=\frac{2\pi n}{N}} \quad \text{donde } n = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.22)$$

Tras aplicar la DFT a  $f(n)$  podemos calcular la densidad espectral de potencia de la función definida como la suma al cuadrado de la parte real y la imaginaria de cada componente espectral. En la figura 3.2 se puede ver la densidad espectral de potencia del ejemplo, se observa que las únicas frecuencias que tienen un valor distinto de cero son las componentes asociadas a las frecuencias de la señal original.

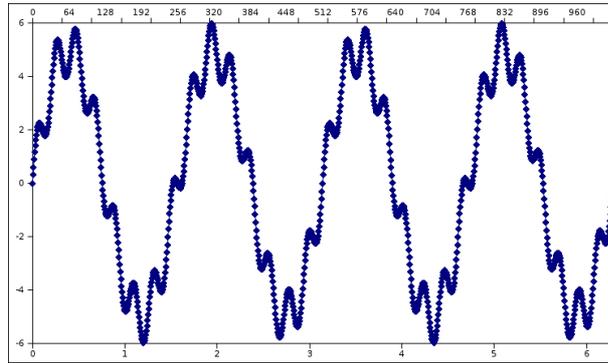


Figura 3.1: Representación de  $f(n)$  con  $N = 1024$  puntos. El eje X superior se corresponde con los valores de  $n$  y el inferior con los valores de  $x = \frac{2\pi n}{N}$ .

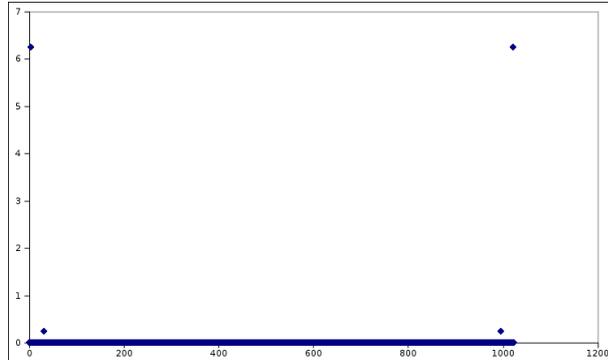


Figura 3.2: Espectro de  $f(n)$ .

### 3.2.2. DFT en tres dimensiones

La extensión a tres dimensiones de la DFT que vamos a usar consiste en tres DFT consecutivas una en cada dirección del espacio, por lo que la transformada queda:

$$\begin{aligned} F(k_1, k_2, k_3) &= DFT_{3D} \{f(n_1, n_2, n_3)\} \\ &= \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} f(n_1, n_2, n_3) \cdot e^{-\frac{2\pi i k_1 n_1}{N_1}} \cdot e^{-\frac{2\pi i k_2 n_2}{N_2}} \cdot e^{-\frac{2\pi i k_3 n_3}{N_3}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Y su transformada inversa es

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, n_3) &= DFT_{3D} \{F(k_1, k_2, k_3)\} \\ &= \sum_{k_3=0}^{N_3-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} F(k_1, k_2, k_3) \cdot e^{\frac{2\pi i k_1 n_1}{N_1}} \cdot e^{\frac{2\pi i k_2 n_2}{N_2}} \cdot e^{\frac{2\pi i k_3 n_3}{N_3}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.2.3. DFT de una secuencia real

En este proyecto se aplica la DFT a un campo de velocidades que sólo tiene componentes reales por lo que a continuación comentamos las características de este tipo de transformadas.

La DFT de una secuencia real cumple la siguiente propiedad de simetría en el espacio de Fourier:

$$F(k) = F^*(N - k). \quad (3.25)$$

A continuación comprobamos la validez de la misma:

$$\begin{aligned} F^*(N - k) &= \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i n \frac{N-k}{N}} \right)^* = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i n} e^{2\pi i n \frac{k}{N}} \right)^* \\ &= \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{2\pi i n \frac{k}{N}} \right)^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(n) e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si  $f(n)$  es real entonces  $f(n) = f^*(n)$  y se cumple la propiedad 3.25. Por tanto, sólo se necesita calcular la mitad de la DFT y la otra mitad se obtiene aplicando esta propiedad, reduciéndose así el coste computacional.

Otra ventaja de aplicar esta propiedad es el ahorro de memoria. Dado que a partir de la mitad de la DFT podemos obtener la otra mitad solamente necesitamos guardar una de las mitades. En nuestro caso transformamos un campo de velocidades (que son números reales). Como se realizan tres transformadas consecutivas cada una en una dirección espacial, en la primera transformada podemos aplicar esta propiedad; pero no para las otras dos ya que el resultado de la primera transformada es un campo de números complejos a los que no se les puede aplicar esta propiedad.

Por tanto, aplicando esta propiedad las necesidades de memoria tanto en espacio como en el dominio de Fourier son aproximadamente las mismas, dependiendo de si  $N$  es par o impar, ya que aunque en principio en el dominio de Fourier tenemos la mitad de los puntos, en cada uno de estos tenemos un número complejo.

### 3.2.4. La DFT en el problema de estudio

Vamos a aplicar la DFT a un cubo tridimensional de lado  $2\pi$  extendido periódicamente por el espacio en las tres direcciones (ver figura 3.3).

Para poder usar la DFT en el problema hay que tener una representación de muestras discretas del cubo. Si nos fijamos en una dirección, como el lado del cubo es  $2\pi$ , tenemos que discretizando la variable continua  $x$  obtenemos la variable discreta  $x_n$  de la siguiente forma:

$$x_n = \frac{2\pi n}{N} \quad \text{donde } n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.27)$$

Es decir, se toman  $N$  muestras equiespaciadas en el rango  $[0, 2\pi)$ .

Un aspecto interesante de la DFT es que es una transformada lineal. En particular si  $F(k)$  es la transformada de  $f(x)$  entonces la transformada de  $af(x)$  es  $aF(k)$ , por esta propiedad algunos autores definen la transformada con el factor  $\frac{1}{N}$  en la transformada inversa.

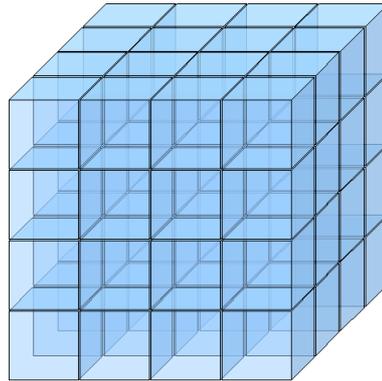


Figura 3.3: Extensión periódica del cubo de lado  $2\pi$ .

En nuestro caso, después de analizar el sistema, vemos que resulta más ventajoso utilizar las expresiones de las ecuaciones 3.19 y 3.20 ya que en cada paso integral se realizan 3 transformadas directas y 6 transformadas inversas. Además en el cálculo de invariantes se realizan otras 9 transformadas inversas por lo que eligiendo adecuadamente dónde escalar ahorramos un gran coste computacional.

### 3.2.5. FFT

La transformada DFT expresada en la ecuación 3.19 requiere de  $2N^2$  operaciones computacionales, esta cifra se puede reducir bastante usando las propiedades de la misma hasta  $2N \log N$ . Esta reducción se conoce como el algoritmo FFT<sup>†</sup> (Fast Fourier Transform) [20][18]. En la figura 3.4 se puede comprobar como cuanto mayor es el número de muestras mayor es la eficiencia de la FFT. Para poder reducir el número de operaciones lo que se hace es agrupar el conjunto de muestras de una forma determinada y aplicar la DFT a esos subconjuntos.

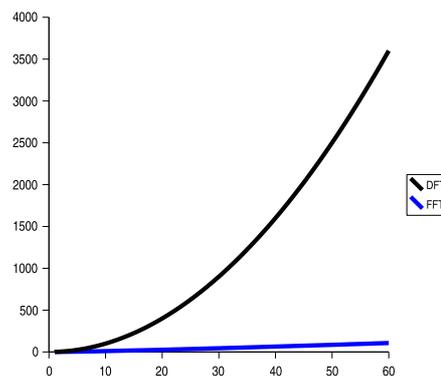


Figura 3.4: Comparativa entre el coste computacional de la DFT y la FFT.

### La librería FFTW

En el programa vamos a usar la librería `fftw` que según su documentación<sup>‡</sup> realiza los cálculos indicados en la ecuación 3.28 para la transformada directa donde si denominamos

<sup>†</sup>El algoritmo FFT fue desarrollado por James Cooley y John Tukey en 1965.

<sup>‡</sup>En esta sección se usa la notación de la documentación de la librería FFTW si bien es sencilla su extrapolación a la del resto del proyecto.

$s$  a una de las dimensiones, definimos  $\omega_s = e^{\frac{2\pi}{n_s}i}$  siendo  $n_s$  el número de elementos en la dimensión  $s$ .

$$Y[i_1, i_2, \dots, i_d] = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \cdots \sum_{j_n=0}^{n_n-1} X[j_1, j_2, \dots, j_d] \omega_1^{-i_1 j_1} \omega_2^{-i_2 j_2} \cdots \omega_n^{-i_n j_n}. \quad (3.28)$$

La transformada inversa realiza los siguientes cálculos:

$$Y[i_1, i_2, \dots, i_d] = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \cdots \sum_{j_n=0}^{n_n-1} X[j_1, j_2, \dots, j_d] \omega_1^{i_1 j_1} \omega_2^{i_2 j_2} \cdots \omega_n^{i_n j_n}. \quad (3.29)$$

Comparando con 3.23 y 3.24 vemos que en la transformada 3.28 falta el término  $\frac{1}{N_1 N_2 N_3}$ . Es decir que la librería calcula la transformada desnormalizada por lo que después de hacer la transformada directa hay que multiplicar todos los términos por  $\frac{1}{N_1 N_2 N_3}$ .

### 3.3. Relación de la DFT con la serie de Fourier

En esta sección se analiza el uso de la DFT para realizar los cálculos de los coeficientes de Fourier. Si partimos de una función  $f$  periódica de periodo  $X_0$  que verifica las condiciones de Dirichlet, se puede representar con una serie de Fourier de la forma de la ecuación 3.1 donde  $c_k$  son los coeficientes de la serie de Fourier cuya expresión recordamos a continuación

$$c_k = \hat{f}_k = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{X_0} kx} dx.$$

Para estimar estos coeficientes aplicamos la regla del trapecio. Dividimos el intervalo  $[0, X_0]$  en  $N$  subintervalos del mismo tamaño con extremos en los puntos  $x_n = \frac{nX_0}{N}$ , entonces usando que  $f(0) = f(X_0)$  por la periodicidad obtenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{X_0} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n \frac{X_0}{N}}^{(n+1) \frac{X_0}{N}} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{X_0} kx} dx \\ &\simeq \frac{1}{X_0} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[ f\left(n \frac{X_0}{N}\right) e^{-i \frac{2\pi}{X_0} kn \frac{X_0}{N}} + f\left((n+1) \frac{X_0}{N}\right) e^{-i \frac{2\pi}{X_0} k(n+1) \frac{X_0}{N}} \right] \frac{X_0}{N} \\ &= \frac{1}{X_0} \frac{X_0}{N} \left( \frac{f(0)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n) e^{-i 2\pi kn/N} + \frac{f(X_0)}{2} \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_k) e^{-i 2\pi kn/N}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Comparando con 3.19 vemos que

$$(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \simeq DFT(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{N-1})). \quad (3.31)$$

Es decir, con la definición de DFT que se usa en este proyecto los valores en frecuencia se aproximan a los coeficientes de la serie de Fourier de la función.