Capítulo 4

Desarrollo teórico

4.1. Introducción

Para el cálculo de la evolución temporal de un flujo turbulento homogéneo e isótropo, vamos a recurrir a las ecuaciones de Navier[†]-Stokes[‡]. En este capítulo se desarrolla el proceso matemático que conduce a la ecuación que utilizaremos en el programa para calcular el estado del campo de velocidades en un paso de integración a partir de los anteriores.

Partiremos de las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \omega - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{4.2}$$

Donde $\mathbf{u}$ es el vector de velocidad, ω es el rotacional de $\mathbf{u}$, p es la presión, ρ es la densidad del fluido y ν es su viscosidad cinemática. Además se ha añadido un término fuente de cantidad de movimiento $\mathbf{f}$ necesario para conseguir un flujo turbulento estadísticamente estacionario.

4.2. Aproximación por series de Fourier

Vamos a aproximar cada término de las ecuaciones de Navier-Stokes por una serie de Fourier. Posteriormente obtendremos una simplificación que nos permitirá eliminar la depen-

[†]Louis-Marie Henri Navier (1785-1836) matemático e ingeniero francés que contribuyó notablemente al desarrollo de la hidrodinámica. En 1808 ingresó en el cuerpo de Ingenieros de Puentes y Calzadas, de cuya academia fue nombrado profesor en 1819. En 1824 ingresó en la prestigiosa Academia de Ciencias, dónde tuvo una prolífica carrera investigadora. En 1823 publicó su trabajo esencial, *Sur les mouvements des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules*, en el que partiendo de un modelo molecular dedujo las importantes ecuaciones que describen el comportamiento de los fluidos llamados reales o viscosos (en contraposición a los ideales).

[‡]Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) matemático y físico británico, nacido en Skreen. Estudió numerosos temas de hidrodinámica estableciendo la teoría de la viscosidad de los fluidos y formulando la ley que lleva su nombre. Esta ley permite calcular el movimiento de pequeñas esferas en el seno de medios con elevada viscosidad. Contribuyó a la teoría ondulatoria de la luz con su ley sobre la refrangibilidad variable de la luz. Realizó el estudio de las radiaciones ultravioleta mediante los fenómenos de fluorescencia a que dan lugar. En 1896 propuso la idea de que los rayos X, recién descubiertos por Röntgen, eran radiaciones de tipo electromagnético.

dencia con $\frac{p}{\rho}$. Aplicando la propiedad 3.18 sobre la ecuación 4.1 obtenemos

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \widehat{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} = \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right) - \left[\widehat{\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2\right)}\right] + \left(\widehat{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}\right) + \widehat{\mathbf{f}}. \tag{4.3}$$

Vamos a ver la evolución temporal de cada coeficiente de las series. Fijando $\mathbf{k}$ y aplicando la propiedad 3.10, obtenemos

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} - \left[\widehat{\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2\right)}\right]_{\mathbf{k}} + \left(\widehat{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}. \tag{4.4}$$

Reordenando la ecuación y aplicando la propiedad 3.15 se obtiene

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} - \left[i\mathbf{k}\left(\widehat{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2}\right)_{\mathbf{k}}\right] - \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \tag{4.5}$$

A continuación se va a aplicar una simplificación que nos permite eliminar la dependencia con $\frac{p}{\rho}$. Aplicando la divergencia a la ecuación 4.1, tenemos que la derivada temporal se anula debido a la ecuación 4.2 y queda

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \omega) - \nabla^2\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2\right) + \nabla \cdot \mathbf{f}. \tag{4.6}$$

Aproximando con series de Fourier, quedándonos con el k-ésimo coeficiente y aplicando la propiedad 3.15 obtenemos

$$0 = i\,\mathbf{k} \cdot \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} - i\,\mathbf{k} \cdot \left[\widehat{\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2\right)}\right]_{\mathbf{k}} + i\,\mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}. \tag{4.7}$$

Simplificando y reordenando los términos

$$\mathbf{k} \cdot \left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}\right] = \mathbf{k} \cdot \left[\widehat{\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2\right)}\right]_{\mathbf{k}}. \tag{4.8}$$

A continuación volvemos a aplicar la propiedad 3.15 al término de la derecha de la igualdad

$$\mathbf{k} \cdot \left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}\right] = \mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{k}\left(\widehat{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2}\right)_{\mathbf{k}}\right] i, \tag{4.9}$$

desarrollando y operando con los productos escalares obtenemos

$$\sum_{i=1}^{3} k_i \left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right] = k^2 \left(\widehat{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2}\right)_{\mathbf{k}} i, \tag{4.10}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i}{k^2} \left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right] = \left(\widehat{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2}\right)_{\mathbf{k}} i. \tag{4.11}$$

Esta ecuación se puede sustituir en la 4.5

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{k_i}{k^2}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right]\right\} - \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \tag{4.12}$$

Tenemos una ecuación vectorial que expresada en una de sus componentes resulta

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{k_j}}{\partial t} = \left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_j} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_j} - k_j\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{k_i}{k^2}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right]\right\} - \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{k_j}. \tag{4.13}$$

Para poder sacar factor común introducimos una delta de Kronecker

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{k_j}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\delta_{ij}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right] - \sum_{i=1}^{3}\frac{k_i k_j}{k^2}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right] - \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{k_j}. \tag{4.14}$$

Se saca factor común

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{k_j}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\left(\delta_{ij} - \frac{k_j k_i}{k^2}\right)\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right] - \nu k^2 \mathbf{u}_{k_j}. \tag{4.15}$$

Para simplificar la expresión se puede definir la matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de componentes

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \tag{4.16}$$

y sustituyéndolos en la ecuación 4.15 llegamos a

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{k_j}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} P_{ij}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{k_i} + \widehat{\mathbf{f}}_{k_i}\right] - \nu k^2 \mathbf{u}_{k_j}. \tag{4.17}$$

Finalmente expresando la ecuación (4.17) en forma vectorial queda

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \mathbf{P}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}\right] - \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}. \tag{4.18}$$

Y reordenándola llegamos a

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{P}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}\right], \tag{4.19}$$

que es la ecuación que tenemos que integrar en el programa.

4.2.1. Cálculo del término no lineal

El término $\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_k$ es el coeficiente de la serie de Fourier del resultado de realizar la multiplicación vectorial de la velocidad por la vorticidad. También se podrían haber calculado los coeficientes de las series de Fourier de la velocidad y la vorticidad por separado y operar completamente en frecuencia pero en ese caso el coste computacional sería mayor. En este apartado vamos a detallar los pasos que vamos a seguir en el programa para calcular este término. La definición de la vorticidad es:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}. \tag{4.20}$$

Desarrollando el producto vectorial tenemos

$$\omega = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z. \tag{4.21}$$

El programa parte de los coeficientes de la serie de Fourier del vector de velocidad, por tanto para calcular las derivadas usamos la propiedad 3.15:

$$\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \Longrightarrow \widehat{\omega}_x = ik_y\widehat{u}_z - ik_z\widehat{u}_y, \tag{4.22}$$

$$\omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \Longrightarrow \widehat{\omega}_y = ik_z\widehat{u}_x - ik_x\widehat{u}_z, \tag{4.23}$$

$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \Longrightarrow \widehat{\omega}_z = ik_x\widehat{u}_y - ik_y\widehat{u}_x. \tag{4.24}$$

Con los coeficientes de la serie de Fourier de ω podemos obtener los valores de la función en los puntos del cubo en el espacio físico, y en ellos realizar los cálculos de multiplicación vectorial por la velocidad:

$$\mathbf{u} \times \omega = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = (u_y\omega_z - u_z\omega_y)\,\mathbf{e}_x + (u_z\omega_x - u_x\omega_z)\,\mathbf{e}_y + (u_x\omega_y - u_y\omega_x)\,\mathbf{e}_z. \tag{4.25}$$

Por último calculamos los coeficientes de la serie de Fourier del resultado que es lo que necesitamos para nuestros cálculos

$$\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_k = \left\{\widehat{(u_y\omega_z - u_z\omega_y)}\right\}_k \mathbf{e}_x + \left\{\widehat{(u_z\omega_x - u_x\omega_z)}\right\}_k \mathbf{e}_y + \left\{\widehat{(u_x\omega_y - u_y\omega_x)}\right\}_k \mathbf{e}_z. \tag{4.26}$$

4.3. Integración numérica

4.3.1. Paso previo

Antes de integrar la ecuación 4.19 vamos a calcular la siguiente derivada que nos será de gran utilidad

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{\nu k^2 t}\right) = \frac{d\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{dt} e^{\nu k^2 t} + \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{\nu k^2 t} = e^{\nu k^2 t}\left(\frac{d\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{dt} + \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}\right). \tag{4.27}$$

Operando

$$\frac{d\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{dt} + \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \frac{d}{dt}\left(\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{\nu k^2 t}\right) e^{-\nu k^2 t}. \tag{4.28}$$

Hemos obtenido una ecuación que podemos sustituir en la ecuación 4.19 para simplificar su cálculo con lo que se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{\nu k^2 t}\right) e^{-\nu k^2 t} = \mathbf{P}\left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}\right]. \tag{4.29}$$

Que se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{\nu k^2 t}\right) = e^{\nu k^2 t}\mathbf{P}\left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega}\right)_{\mathbf{k}} + \mathbf{f}_{\mathbf{k}}\right]. \tag{4.30}$$

En los siguientes apartados presentamos los métodos de integración numérica, que vamos a utilizar en el programa, para resolver la ecuación 4.30. La elección de estos métodos se basa en la comparativa del artículo de Dale R. Durran [7].

4.3.2. Método de Euler

Como ejemplo vamos a desarrollar el método de Euler si bien en el código no se usa, ya que es un método de primer orden. El método parte de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = F(y,t),$$

y nos permite aproximar de forma numérica el valor del siguiente paso de integración mediante la siguiente ecuación en diferencias

$$y^{t_{n+1}} = y^{t_n} + dtF^{t_n}, \tag{4.31}$$

donde dt es el valor del paso de integración e y^{t_n} es la aproximación de y en el instante t_n previamente obtenida. Discretizando la ecuación 4.30 y aplicando la 4.31 donde $y = \mathbf{u_k} e^{\nu k^2 t}$ obtenemos

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} e^{\nu k^2 (t_n+dt)} = \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} e^{\nu k^2 t_n} + dt \left\{ e^{\nu k^2 t_n} \mathbf{P} \left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega} \right)_{\mathbf{k}}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}^{t_n} \right] \right\}. \tag{4.32}$$

Multiplicando por $e^{-\nu k^2 (t_n+dt)}$, la ecuación 4.32 queda

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} = \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + dt \left\{ e^{-\nu k^2 dt} \mathbf{P} \left[\left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega} \right)_{\mathbf{k}}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}^{t_n} \right] \right\}. \tag{4.33}$$

En nuestro problema el término de forzado es $\widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}^{t_n} = 0$ y, en su lugar, la energía se inyecta al sistema introduciendo el concepto de viscosidad negativa en los modos mayores del campo de velocidades donde $|k| < 2{,}5$. En estos se sustituye ν por una cierta cantidad negativa. Esa cantidad negativa (que en el programa está representada por la variable *VISCOSIDADNEG*) es la llamada viscosidad negativa. Su valor varía en cada iteración controlada por un PID de manera que el fluido alcance un cierto grado de estabilidad (ver apartado 7.3), concretamente que la cantidad $KETA = k_{max}\eta$ fluctúe alrededor de un cierto valor constante, usualmente $KETA\_ESTACIONARIA = 1{,}4$.

Este valor está relacionado con el tamaño del rango disipativo. Algunos autores lo toman como 2, si bien, debido a que el espectro en el rango disipativo decrece exponencialmente (ver ecuación 2.22), el error cometido al tomarlo como 1,4 es despreciable y el coste computacional disminuye sensiblemente. Otra interpretación de este valor sería verlo a través de la separación entre las repeticiones del espectro que introduce la DFT, según el teorema de Nyquist es necesario utilizar como frecuencia de muestreo como mínimo el doble de la máxima frecuencia que se simula, pero como se conoce la forma del espectro se permite cierta intersección en la zona en la que su valor es prácticamente cero.

Finalmente simplificando la ecuación 4.33 obtenemos

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} = \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + dt \left\{ e^{-\nu k^2 dt} \mathbf{P} \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega} \right)_{\mathbf{k}}^{t_n} \right\}, \tag{4.34}$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} = e^{-\nu k^2 dt} \left\{ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} + dt \mathbf{P} \left(\widehat{\mathbf{u} \times \omega} \right)_{\mathbf{k}}^{t_n} \right\}. \tag{4.35}$$

4.3.3. Método de Runge-Kutta de segundo orden

Los primeros pasos de integración y los cambios en el tamaño del paso se hacen con el método de Runge-Kutta de segundo orden cuya ecuación en diferencias es

$$\begin{aligned} y^{t_{n+1}} &= y^{t_n} + dtF^{t_n} + \frac{dt}{2}\left[F\left(y_1\right) - F^{t_n}\right] \\ &= y^{t_n} + \frac{dt}{2}\left[F(y^{t_n}) + F\left(y_1\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde

$$y_1 = y^{t_n} + dtF^{t_n}. \tag{4.37}$$

Discretizando la ecuación 4.30 y aplicando la 4.36 donde $y = \mathbf{u_k} e^{\nu k^2 t}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} e^{\nu k^2 (t_n + dt)} =& \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} e^{\nu k^2 t_n} + \frac{dt}{2}\left\{\left[e^{\nu k^2 t_n}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}^{t_n}\right)\right] + \right. \\ & \left.\left[e^{\nu k^2 t_n}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u_1}\times\omega_1}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{1_k}}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde

$$\widehat{\mathbf{u_{1k}}} = \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} + dt\mathbf{P}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}^{t_n}\right]. \tag{4.39}$$

Multiplicando por la exponencial $e^{-\nu k^2 (t_n + dt)}$, la ecuación 4.38 queda

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} =& \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + \frac{dt}{2}\left\{\left[e^{-\nu k^2 dt}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}^{t_n}\right)\right] + \right. \\ & \left.\left[e^{-\nu k^2 dt}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u_1}\times\omega_1}\right)_{\mathbf{k}} + \widehat{\mathbf{f}}_{\mathbf{1_k}}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

Como en el apartado anterior, el término de forzado se anula, por tanto, simplificando la ecuación 4.40 tenemos

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} = \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + \frac{dt}{2}\left\{\left[e^{-\nu k^2 dt}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}}^{t_n}\right)\right] + \left[e^{-\nu k^2 dt}\mathbf{P}\left(\widehat{\mathbf{u_1}\times\omega_1}\right)_{\mathbf{k}}\right]\right\}, \tag{4.41}$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_{n+1}} = e^{-\nu k^2 dt}\left\{\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{t_n} + \frac{dt}{2}\mathbf{P}\left[\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_{\mathbf{k}}^{t_n} + \left(\widehat{\mathbf{u_1}\times\omega_1}\right)_{\mathbf{k}}\right]\right\}. \tag{4.42}$$

4.3.4. Método de Adams-Bashforth de segundo orden

El resto de los pasos de integración se hacen con el método de Adams-Bashforth de segundo orden que nos permite reducir considerablemente el coste computacional frente al anterior. La ecuación en diferencia de este método es

$$y^{t_{n+1}} = y^{t_n} + \frac{dt}{2}\left(3F^{t_n} - F^{t_{n-1}}\right). \tag{4.43}$$

Discretizando la ecuación 4.30 y aplicando la 4.43 donde $y = \mathbf{u}_\mathbf{k} e^{\nu k^2 t}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_{n+1}} e^{\nu k^2 (t_n+dt)} = \widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_n} e^{\nu k^2 t_n} + \frac{dt}{2}\Bigg\{3\left[e^{\nu k^2 t_n}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_\mathbf{k}^{t_n}\right)\right] - \\ \left[e^{\nu k^2 (t_n-dt)}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_{n-1}} + \widehat{\mathbf{f}}_\mathbf{k}^{t_{n-1}}\right)\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Multiplicando por la exponencial $e^{-\nu k^2(t_n+dt)}$, la ecuación 4.44 queda

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_{n+1}} = \widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + \frac{dt}{2}\Bigg\{3\left[e^{-\nu k^2 dt}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_n} + \widehat{\mathbf{f}}_\mathbf{k}^{t_n}\right)\right] - \\ \left[e^{-\nu k^2 (2dt)}\mathbf{P}\left(\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_{n-1}} + \widehat{\mathbf{f}}_\mathbf{k}^{t_{n-1}}\right)\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.45}$$

Como en los apartados anteriores, el término de forzado se anula, por tanto, simplificando la ecuación 4.45 tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_{n+1}} = \widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + \frac{dt}{2}\Bigg\{3\left[e^{-\nu k^2 dt}\mathbf{P}\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_n}\right] - \\ \left[e^{-\nu k^2 (2dt)}\mathbf{P}\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_{n-1}}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_{n+1}} = \widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_n} e^{-\nu k^2 dt} + \frac{dt}{2}\mathbf{P}\Bigg\{3\left[e^{-\nu k^2 dt}\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_n}\right] - \\ \left[e^{-\nu k^2 (2dt)}\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_{n-1}}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_{n+1}} = e^{-\nu k^2 dt}\left\{\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{k}^{t_n} + \frac{dt}{2}\mathbf{P}\left[3\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_n} - e^{-\nu k^2 dt}\left(\widehat{\mathbf{u}\times\omega}\right)_\mathbf{k}^{t_{n-1}}\right]\right\}. \tag{4.48}$$