

2 ANÁLISIS POR ENVOLTURA DE DATOS

El Análisis por Envoltura de Datos, conocido como DEA¹, es una herramienta que se emplea para calcular la eficiencia de un conjunto de unidades productivas.

Charnes, Cooper y Rhodes en 1978, fueron los primeros que formularon un modelo matemático para evaluar la eficiencia de una serie de escuelas estadounidenses, utilizando como parámetros diversas entradas y salidas.

En este capítulo haremos una breve introducción a los conceptos básicos en los que se basa dicho método. Posteriormente expondremos los distintos modelos DEA que se pueden formular, y las variantes que se pueden realizar sobre ellos.

1 DEFINICIONES

DMU²: es cada una de las unidades productivas sobre las que se realiza la medición de la eficiencia. Cada DMU consta de una serie de entradas (recursos necesarios) y de salidas (productos obtenidos), que habremos parametrizado de alguna forma, y cuyo valor podrá ser modificado para obtener soluciones más eficientes. De forma gráfica:

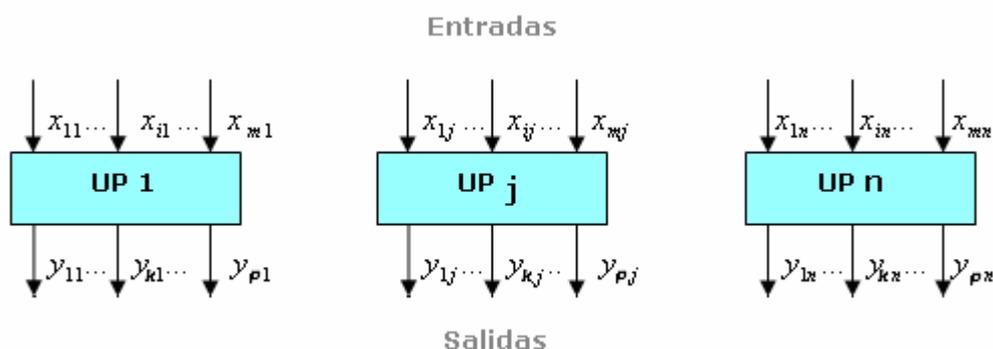


Ilustración 1: Representación del problema tradicional

Productividad de una DMU: es la relación existente entre los resultados obtenidos y los recursos empleados en su producción. Es una medida del aprovechamiento de los recursos. Matemáticamente, para el caso de una única entrada y una única salida, la expresamos como:

$$Productividad = \frac{Producción}{Recursos} = \frac{Salida}{Entrada}$$

Si tuviéramos más de una entrada y salida, la fórmula sería:

¹ DEA: Data Envelopment Analysis

² DMU: Decision Making Unit

$$Productividad = \frac{\text{Suma ponderada de salidas}}{\text{Suma ponderada de entradas}}$$

Si denominamos:

- x_{ij} : cantidad de entrada o recurso 'i' utilizado por la unidad 'j'
- y_{kj} : a la cantidad de salida o resultado 'k' producido por la unidad 'j'
- u_{ij} y v_{kj} : pesos correspondientes a cada entrada y salida respectivamente

Entonces tendríamos:

$$\text{Entrada virtual}_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Salida virtual}_j = \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}$$

Donde m es el número total de entradas consideradas y p el número total de salidas. Empleando estas expresiones, la productividad de la unidad j la podemos definir como:

$$Productividad_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

Sin embargo, la obtención de la productividad de una DMU de forma aislada, no aporta ninguna información, ya que no se mide respecto a ningún valor de referencia. Por ello, aparece el concepto de eficiencia relativa:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_o} = \frac{Salida Virtual_j / Entrada Virtual_j}{Salida Virtual_o / Entrada Virtual_o}$$

El subíndice 'j', indica la unidad que será objeto de estudio y el subíndice 'o', la unidad que tomamos como referencia. Según cuál sea la unidad de referencia que utilicemos, podemos distinguir entre distintos tipos de eficiencia:

- Eficiencia global: la unidad de referencia considerada es la DMU que presenta mayor productividad del conjunto.
- Eficiencia técnica: tomamos como unidad de referencia a la DMU de mayor productividad entre las unidades de su tamaño, es decir, entre aquéllas que tienen el mismo número de entradas y salidas.
- Eficiencia de escala: es el cociente entre la eficiencia global y la eficiencia técnica.

Por tanto, la eficiencia relativa de cualquier DMU será siempre menor o igual a uno. En el caso de que valga uno, esta DMU se considerará eficiente. En caso

contrario, la DMU será ineficiente, ya que podremos encontrar otra con mayor eficiencia que ella.

A su vez, una DMU puede alcanzar la máxima productividad de dos formas distintas:

- Orientación de entrada: cuando conseguimos reducir los recursos consumidos sin producir un empeoramiento en las salidas.
- Orientación de salida: cuando conseguimos aumentar la producción sin incrementar los recursos de entrada.

2 MODELOS BÁSICOS DEA

A continuación mostraremos los modelos matemáticos que podemos implementar, tanto con orientación de entrada como de salida.

2.1 Modelos con retornos de escala constantes CRS³

En dichos modelos, se considera que cualquier unidad puede alcanzar la productividad de las unidades eficientes, independientemente del tamaño de las entradas y salidas que tengan. Por ello, en este caso trabajaremos con el parámetro de eficiencia global.

La tecnología de estos problemas, vendrá definida por:

$$T_{CRS} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}\}$$

Estos puntos representan el espacio posible de soluciones a nuestro problema.

2.1.1 Modelo RATIO

Para este caso, al hallar la eficiencia de cada unidad tenemos la libertad de elegir los pesos que convierten la entrada y la salida agregadas en valores adimensionales. Cada unidad podrá escoger los valores de los pesos que optimicen su eficiencia. Una vez elegidos estos pesos, serán utilizados por las restantes unidades.

El modelo implementado en este caso, maximiza la eficiencia con libertad para la elección de los pesos. Lo mostramos en la página siguiente:

³ CRS: Constant Return to Scale

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} \quad & e_J = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kJ} y_{kJ}}{\sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{iJ}} \\
 \text{s.a.} \quad & \frac{\sum_{k=1}^p v_{kJ} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & v_{kJ} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & u_{iJ} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

ε es un número real estrictamente positivo. Este valor representa una constante no-arquimediana (menor que cualquier número real positivo) y por tanto en las restricciones donde aparece, se obliga a los pesos a que nunca puedan ser nulos.

El modelo consiste en la resolución de n problemas de maximización, correspondientes a cada una de las unidades $J = 1, 2, \dots, n$ cuya eficiencia se quiere calcular. Las variables que se obtienen como resultado son los pesos que maximizan la eficiencia e_J de cada DMU.

El valor de los pesos elegidos para maximizar la eficiencia de la DMU está limitado por las restricciones que aparecen en el modelo por cada unidad existente en el problema y que obliga a que ninguna DMU pueda tener una eficiencia mayor que la unidad. Por lo tanto, si la unidad no consigue ser eficiente, aun eligiendo los mejores pesos posibles para ello, es que existe otra que con esos pesos ya lo es.

De esta forma, una vez resueltos los n problemas planteados, se obtendrá un subconjunto E formado por las unidades DMU_r que han resultado eficientes al resolverse el modelo, correspondiéndoles un valor $e_r = 1$ y por tanto cumplirán la siguiente restricción con signo de igualdad:

$$\frac{\sum_{k=1}^p v_{kr}^* y_{kr}}{\sum_{i=1}^m u_{ir}^* x_{ir}} = 1 \quad r \in E$$

y por tanto la DMU_J que no cumpla esta condición, será considerada ineficiente respecto al subconjunto E definido, y tendrá un valor de eficiencia $e_J < 1$ y una ineficiencia $(1 - e_J)$.

La función objetivo y las restricciones son cocientes, de ahí el nombre de este modelo. Esto hace que se trate de un problema no lineal, con lo cual es difícil de resolver. Para solucionar este problema, este modelo evolucionó, sustituyendo sus cocientes por expresiones lineales.

2.1.2 Modelo CCR-INPUT

Maximizar un cociente equivale a hacer máximo su numerador, si el denominador permanece constante, y cuando un cociente es menor que la unidad es porque el numerador es menor que el denominador. Con estas consideraciones, el modelo anterior puede convertirse en lineal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar} && \sum_{k=1}^p v_{kJ} y_{kJ} \\
 &\text{s.a.} && \sum_{k=1}^p v_{kJ} y_{kj} - \sum u_{iJ} x_{ij} \leq 0 && j = 1, 2, \dots, n \\
 &&& \sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{iJ} = 1 \\
 &&& v_{kJ} \geq \varepsilon && k = 1, 2, \dots, p \\
 &&& u_{iJ} \geq \varepsilon && i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

A esta forma, se le conoce como forma multiplicadora.

Éste es un problema lineal con $n+1$ restricciones y $p+m$ cotas. Las n primeras restricciones provienen de linealizar la condición de que todas las unidades deben tener una eficiencia menor o igual que uno. La restricción adicional establece como medida de referencia la entrada virtual, lo que asegura que se maximiza la eficiencia cuando se hacen máximas las salidas. Además se consigue que el valor de la función objetivo coincida con la eficiencia de la unidad DMU_J .

Sin embargo, es más frecuente utilizar las variables del dual de este modelo para analizar los resultados obtenidos de aplicar esta metodología. Por esto se expone a continuación el modelo dual:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \theta_J - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 &\text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_J x_{iJ} - s_i && i = 1, 2, \dots, m \\
 &&& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k && k = 1, 2, \dots, p \\
 &&& \lambda_j \geq 0 && \forall j \\
 &&& s_i, t_k \geq 0 && \forall i, k \\
 &&& \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

A esta forma el modelo se le conoce como forma envolvente.

Las n variables λ_j son las correspondientes a las n primeras restricciones de problema primal. θ_J es la variable correspondiente a las restricción restante. Las variables de holgura t_k y s_i son las correspondientes a las $p + m$ cotas existentes.

La resolución de este modelo consta de dos fases:

En la primera etapa (*Fase I*) se resuelve el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \theta_J \\
 &\text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_J x_{iJ} && i = 1, 2, \dots, m \\
 &&& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} && k = 1, 2, \dots, p \\
 &&& \lambda_j \geq 0 && \forall j \\
 &&& \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Y con la solución del modelo θ_J^* se resuelve la segunda etapa (*Fase II*):

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && - \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 &\text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_J^* x_{iJ} - s_i && i = 1, 2, \dots, m \\
 &&& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k && k = 1, 2, \dots, p \\
 &&& \lambda_j \geq 0 && \forall j \\
 &&& s_i, t_k \geq 0 && \forall i, k
 \end{aligned}$$

Las funciones objetivo de ambos problemas coinciden en el óptimo, y por tanto se tiene que:

$$e_J^* = \theta_J^* - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k^* + \sum_{i=1}^m s_i^* \right] = \sum_{k=1}^p v_{kJ}^* y_{kJ}$$

Se puede observar que cualquier unidad J puede tener como solución admisible:

$$\theta_j = 1$$

$$\lambda_j = 1$$

$$\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq J$$

$$s_i = t_k = 0 \quad \forall i, k$$

La función objetivo intenta, por tanto, que θ_j tenga un valor menor que la unidad. La resolución de este problema dual tiene una interpretación gráfica que a continuación procedemos a explicar. Las restricciones establecen una combinación lineal entre el punto (x_{iJ}, y_{kJ}) y los restantes puntos en estudio (x_{ij}, y_{kj}) , cuyo resultado es la unidad virtual $(\theta_j x_{iJ} - s_i, y_{kJ} + t_k)$. Una unidad virtual es aquella que no pertenece al conjunto de las DMUs observadas pero que se encuentra dentro de la región admisible, es decir pertenece a la tecnología existente. La solución siempre admisible expuesta equivale a considerar que la DMU_j es combinación lineal de ella misma. Al minimizarse θ_j , se reducen equiproporcionalmente las componentes de las entradas hasta llegar al punto en que, con las mismas salidas, tiene la menor entrada admisible con la combinación lineal de las unidades en estudio. Esto corresponde a proyectar el punto sobre un hiperplano que pasa por el origen y por las unidades eficientes del problema, reduciendo de forma radial las entradas. Si $\theta_j^* = 1$ y $t_k^*, s_i^* \neq 0$ para alguna entrada o para alguna salida, se produce una proyección paralela al eje correspondiente a la variable de holgura que no es nula. Por otra parte, si $\theta_j^* = 1$ y $t_k^* = s_i^* = 0$, no se produce ninguna proyección, y por tanto la unidad es eficiente (se proyecta sobre sí misma).

En el caso de una entrada y una salida se puede representar el problema en el plano. Así, considerando cinco unidades se tendría por ejemplo:

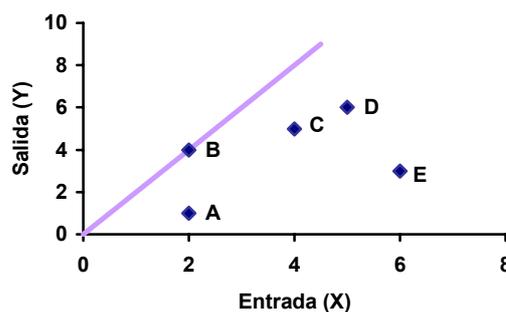


Figura 1: Ejemplo CCR-Input de una entrada y una salida

Donde B es la unidad de mayor eficiencia relativa. La línea trazada desde el origen hasta dicha DMU son todos los posibles puntos que tendrían la misma eficiencia que B. A esta línea se le denomina frontera eficiente, y como se puede observar, deja por debajo de ella a todas las demás observaciones. En DEA se expresa como una frontera que envuelve a todas las unidades. Al resolverse el problema para cada unidad J , gráficamente se están calculando las proyecciones horizontales de las unidades en estudio sobre la frontera eficiente.

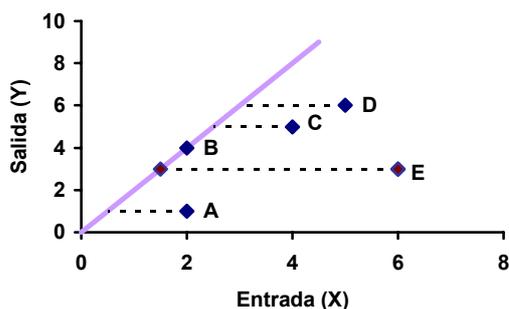


Figura 2: Proyecciones CCR-Input con una entrada y una salida

Así pues, la frontera eficiente es el lugar geométrico de las unidades con eficiencia igual a uno. Las proyecciones calculadas representan la unidad en la que debería convertirse cada DMU_j para que fuese considerada eficiente, con una reducción de sus entradas. Por esto, este modelo está planteado con orientación de entrada. Como proviene del modelo RATIO, también es un problema con retorno de escala constantes. Por esto se denomina CCR-INPUT.

Analizando las variables del dual, e interpretando su significado gráfico, podemos observar que θ_j es la proporción de entradas actuales que deben utilizarse para conseguir la eficiencia y λ_j es un vector de coeficientes que, de alguna forma, mide la proximidad de la proyección resultante de cada DMU_j con las unidades eficientes de las que es combinación lineal. Pero en este caso de una sola entrada y una sola salida no se ha comentado nada de las variables t_k y s_i . Para comprender su significado gráfico, se expone un ejemplo con dos entradas y una salida. Si las entradas se denotan como 'x1' y 'x2' y la salida como 'y', se podría representar gráficamente un caso genérico de la siguiente forma:

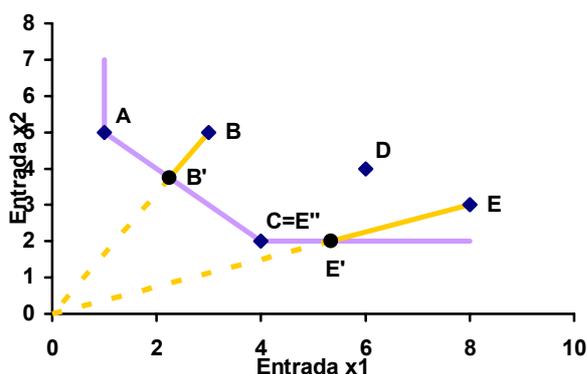


Figura 3: Solución CCR-Input con dos entradas y una salida

La frontera eficiente está representada mediante la línea que une los puntos A y C, correspondiente a la representación del plano que pasa por el origen y por dichas unidades. De esta forma, los hiperplanos paralelos a los ejes no forman parte de la frontera eficiente (no se proyectan sobre sí mismas, es decir, t_k^* y s_i^* no son 0). Un ejemplo de esto es el caso representado de la unidad E' , puesto que

solucionado el problema dual para esta unidad, la proyección resultante se produciría en el punto C, mediante una reducción rectangular (paralela a los ejes) de la entrada t_1 .

En el caso general, por tanto, aparecerán unidades que sólo necesitarán reducción radial para proyectarse sobre la frontera eficiente (unidad B), sólo reducción rectangular (unidad E') o ambos tipos de reducción (unidad E).

2.1.3 Modelo CCR-OUTPUT

En este caso linealizamos el modelo RATIO de forma análoga a como se hizo en el modelo CCR-INPUT, pero teniendo en cuenta que la orientación es de salida.

El problema que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} && \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i && i = 1, 2, \dots, m \\
 & && \sum \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + t_k && k = 1, 2, \dots, p \\
 & && \lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \\
 & && \gamma_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Aparece en este modelo una nueva variable que no es más que la amplificación radial que debe producirse en las salidas para proyectarse en la frontera eficiente.

Observando el mismo ejemplo anterior, con una sola entrada y una sola salida, pero resolviéndolo con este nuevo modelo se obtiene:

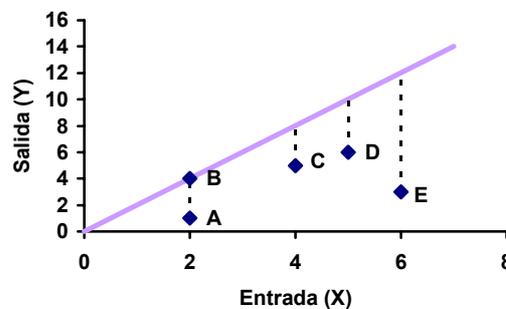


Figura 4: Proyecciones CCR-Output con una entrada y una salida

Ahora una solución admisible del problema es:

$$\gamma_J = 1$$

$$\lambda_J = 1$$

$$\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq J$$

$$s_i = t_k = 0 \quad \forall i, k$$

y como en el anterior modelo, corresponden a los valores que toman estas variables en el caso de unidades eficientes. Asimismo, de nuevo las restricciones establecen una combinación lineal entre el punto (x_{iJ}, y_{kJ}) y los restantes puntos en estudio (x_{ij}, y_{kj}) , que dan como resultado la unidad virtual $(x_{iJ}, \gamma_J y_{kJ})$. La solución siempre admisible expuesta corresponde a considerar que el punto es combinación lineal de él mismo. Al maximizar γ_J , las componentes de las salidas aumentan hasta llegar al punto en que, con las mismas entradas, obtiene la mayor salida admisible con la combinación lineal de las unidades en estudio. Esto corresponde a proyectar el punto sobre la frontera eficiente del problema, aumentando de forma radial las entradas. Por esto es un problema con orientación de salida.

De la misma forma que en el modelo anterior, si $\gamma_J^* = 1$ y $t_k^*, s_i^* \neq 0$ para alguna entrada o para alguna salida se produce una proyección paralela al eje correspondiente al término que no es nulo. Si $\gamma_J^* = 1$ y $t_k^* = s_i^* = 0$, no se produce ninguna proyección, y por tanto la unidad es eficiente (se proyecta sobre sí misma).

En este caso, también podemos exponer un ejemplo en el que tenemos una entrada constante y dos salidas:

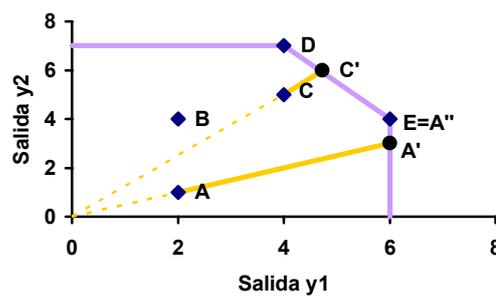


Figura 5: Solución CCR-Output con una entrada y dos salidas

Vemos que el punto C sólo necesita la Fase I para alcanzar la frontera eficiente, y por tanto encontrar el punto en el que debe proyectarse. Sin embargo el punto A, tras la Fase I no queda proyectado en la frontera eficiente y mediante la Fase II, es decir, una amplificación rectangular llegamos al punto A''.

2.2 Modelos con retornos de escala variables

Se considera que existen retornos de escala variables (VRS⁴) cuando algunas DMUs de tamaño diferente a las eficientes pueden no ser capaces de alcanzar la productividad de éstas. Por lo tanto, cada unidad tomará como referencia a la unidad eficiente de su tamaño.

Este tipo de modelos tienen como posibles puntos admisibles el conjunto:

$$T_{VRS} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}; \bar{\lambda}e^T = 1\}$$

A continuación expondremos los modelos utilizados en estos casos.

2.2.1 Modelo BCC-INPUT

Para que el modelo considere los retornos de escala variable, hay que introducir, a partir del modelo RATIO linealizado, alguna restricción que le indique al modelo que cada DMU tiene que ser comparada con aquéllas de su tamaño y no con todas las unidades presentes en el problema.

Modificando la forma envolvente del modelo CCR-INPUT de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{iJ} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \\ & \theta_j \text{ libre} \end{aligned}$$

se puede observar que la restricción adicional que aparece en la forma envolvente de este modelo, suma de las componentes del vector $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ igual a uno, obliga a que la proyección de la unidad se efectúe sobre el hiperplano que forman las unidades más productivas de su tamaño. En general, para este caso, aparecerán unidades observadas que no eran eficientes en el anterior modelo (retornos de escala constantes) y que sin embargo en este modelo sí lo son. De ahí que la frontera eficiente, denominada frontera de eficiencia técnica, esté formada por más unidades observadas que en el modelo CCR-INPUT.

⁴ VRS: Variable Return to Scale

Al igual que en el modelo anterior, la siguiente solución siempre será admisible:

$$\theta_j = 1$$

$$\lambda_j = 1$$

$$\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq J$$

$$s_i = t_k = 0 \quad \forall i, k$$

y la eficiencia relativa de cada unidad es θ_j . En este caso se pueden hacer las mismas consideraciones sobre la frontera y las variables de holgura que para el modelo de retorno de escala constante CCR-INPUT. Se puede observar que el problema tiene orientación de entrada porque la reducción radial sólo es permitida para las entradas.

La nueva forma que adquiere la frontera eficiente en este caso de retorno de escala variable si se considera el caso de una sola entrada y una sola salida es la mostrada a continuación:

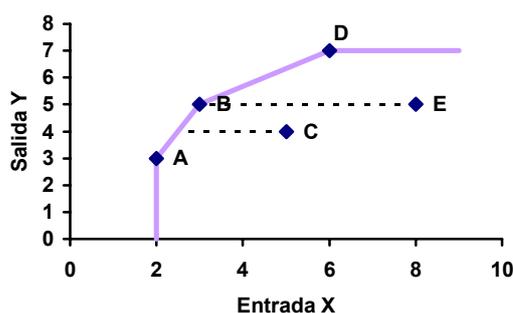


Figura 6: Proyecciones BCC-Input con una entrada y una salida

La frontera eficiente es la línea quebrada A-B y B-D. Las unidades eficientes son, por tanto, A, B, y D. Las posibles proyecciones se encuentran representadas en el gráfico. Las unidades C y E sólo necesitan de una reducción radial de su entrada para proyectarse sobre la frontera, sin embargo podrían existir unidades que con la reducción radial no consiguieran llegar a la frontera y necesitaría de una reducción rectangular adicional.

El conjunto de unidades de las que la proyección de una determinada DMU es combinación lineal se denomina peer group. Por ejemplo, el peer group de la unidad E son las unidades B y D. Se puede decir que la DMU analizada se debe comparar con su proyección para conseguir una eficiencia igual a uno, y esta proyección es una unidad que no existe en la realidad del problema pero cuyo tamaño de escala es el tamaño de las unidades que conforman el peer group.

La unidad productiva A opera con retornos de escala crecientes (Increasing Return to Scale) puesto que se encuentra en una zona de la frontera eficiente constituida por unidades que, para conseguir el tamaño de la unidad más productiva debería incrementar su entrada. Por otra parte, la unidad C opera con retornos de escala decrecientes (Decreasing Return to Scale) puesto que las

unidades pertenecientes a la frontera eficiente de la zona donde se encuentra deberían disminuir sus entradas. Por último la unidad B opera con retornos de escala constantes (CRS) ya que es la unidad más productiva del problema.

2.2.2 Modelo BCC-OUTPUT

En este caso la orientación es de salida por lo que el modelo resultante es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} && \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & && \lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \\
 & && \gamma_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Este modelo también podemos resolverlo de forma gráfica, para una sola entrada y una sola salida:

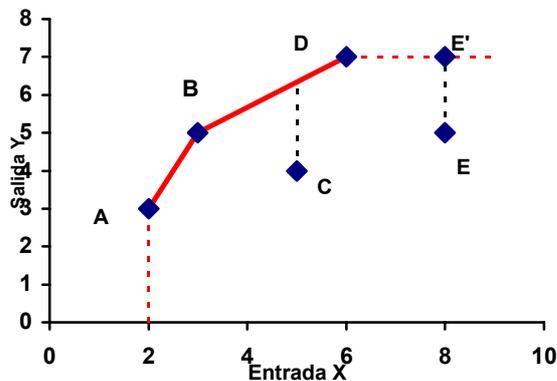


Figura 7: Proyecciones BCC-Output con una entrada y una salida

La frontera eficiente coincide con la que teníamos en el ejemplo anterior. Las proyecciones se realizan amplificando de forma radial las salidas, en primer lugar, y si es necesario, proyectando además de forma rectangular para el caso de la DMU_E .

3 OTROS MODELOS DEA

En este apartado describiremos otros modelos DEA que solucionan diferentes tipos de situaciones no contempladas en los modelos anteriores para

completar la teoría sobre la metodología DEA.

3.1 Modelo Aditivo (Additive Model)

Es un modelo que utiliza retornos de escala variables. La diferencia con los modelos BCC es que en este caso la solución no se halla mediante la proyección radial de las unidades sobre la frontera eficiente (aumento radial de las salidas o reducción radial de las entradas), sino que sólo se realiza la segunda fase de los modelos BCC y CCR, es decir, sólo se efectúa la proyección rectangular de las unidades.

Eliminando la variable que representaba la amplificación o reducción radial, en los modelos BCC con orientación de salida o entrada respectivamente, obtenemos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} && \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \\
 & \text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - s_i && i = 1, 2, \dots, m \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k && k = 1, 2, \dots, p \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & && \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & && s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k
 \end{aligned}$$

Puesto que en este modelo se trata de maximizar las holguras, ya sea modelo de orientación de entrada o de salida, este modelo no distingue entre estos dos tipos de orientaciones.

Las unidades eficientes que se obtienen con este modelo aditivo y con el modelo BCC no varían, es decir, en ambos modelos se va a obtener la misma frontera eficiente. Sin embargo cuando una DMU es ineficiente su medida de eficiencia será diferente en los dos modelos.

3.2 Modelos con salidas y entradas no discretionales

Entrada no discrecional es aquella que no puede ser variada por la unidad en el problema. La misma definición puede aplicarse para la *salida no discrecional*. Esto puede ocurrir en multitud de problemas reales, en los que los recursos son extrínsecos a la unidad productiva, y ésta no puede controlar el nivel que consume. De igual manera se encuentran problemas donde las salidas están fijadas y no pueden ser variadas.

Existen varias formas de implantar este aspecto a los modelos ya expuestos. A continuación exponemos una de ellas, que consiste en dividir el conjunto de entradas y salidas en otros dos subconjuntos de la siguiente forma:

$$I = I_D \cup I_{ND}$$

$$O = O_D \cup O_{ND}$$

donde el subíndice D indica el conjunto discrecional (en el cuál se pueden variar las entradas o salidas) mientras que el subíndice ND indica el subconjunto no discrecional (entradas o salidas invariables).

Por ejemplo, introduciendo estos conjuntos en la forma dual del modelo CCR-INPUT:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k \in O_D} t_k + \sum_{i \in I_D} s_i \right] \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{iJ} - s_i \quad \forall i \in I_D \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - s_i \quad \forall i \in I_{ND} \\ & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\ & s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k \\ & \theta_j \text{ libre} \end{aligned}$$

Se puede observar que la variable θ_j no afecta a las entradas no discretionales. Además, las únicas holguras que son maximizadas en la función objetivo son las pertenecientes a los conjuntos discretionales. Esto significa que no se hace proyección radial ni rectangular de los recursos o productos que no se pueden modificar.

También podemos aplicar las entradas y salidas no discretionales al modelo aditivo. En este caso sólo se harán máximas las holguras de las entradas o salidas discretionales, ya que con las demás se carece de capacidad de decisión. Esto se muestra en la página siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} && \sum_{k \in O_D} t_k + \sum_{i \in I_D} s_i \\
 & \text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & && \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & && s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k
 \end{aligned}$$

3.3 Modelos FDH (Free Disposal Hull)

Son modelos que resuelven problemas donde las posibles unidades admisibles que pueden ser analizadas corresponden a los elementos del siguiente conjunto:

$$T_{FDH} = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda} X \leq \bar{x}; \bar{\lambda} Y \geq \bar{y}; \bar{e}^T \bar{\lambda} = 1; \lambda_j \in \{0, 1\} \right\}$$

Como puede observarse sólo una de las componentes del vector $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ será uno y las restantes cero. Así que las unidades se proyectarán siempre sobre una de las unidades existentes. Puede observarse que esta tecnología es más restrictiva que las anteriores, en las que la proyección podía hacerse sobre cualquier punto de la frontera eficiente.

El modelo en el caso de orientación de salida es el mostrado en la página siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \gamma_J \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \quad \quad \lambda_j \in \{0, 1\} \\
 & \quad \quad s_i, t_k \geq 0 \\
 & \quad \quad \gamma_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Con este modelo obtenemos un conjunto $D(J)$ de unidades productivas que dominan a la DMU_J , es decir, que son candidatas a ser su proyección:

$$\begin{aligned}
 D(J) = \{j : \exists i' : x_{i'j} < x_{i'J} \text{ con } x_{ij} \leq x_{iJ} \quad \forall i \neq i' \text{ y } y_{kj} \geq y_{kJ} \quad \forall k \text{ y/ó} \\
 \exists k' : y_{k'j} > y_{k'J} \text{ con } y_{kj} \geq y_{kJ} \quad \forall k \neq k' \text{ y } x_{ij} \leq x_{iJ} \quad \forall i\}
 \end{aligned}$$

Si $D(J)$ fuese el conjunto vacío, DMU_J se proyecta sobre sí misma. En el modelo no están penalizadas las holguras, ya que sólo interesa la amplificación radial.

La representación de la resolución del modelo anterior, con una sola entrada y una sola salida, en el caso de orientación de salida, se expone a continuación.

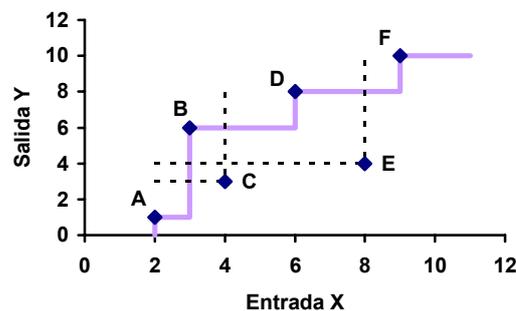


Figura 8: Conjunto de unidades dominantes FDH-Output con una entrada y una salida

La línea quebrada representada es el límite del conjunto T_{FDH} anteriormente expuesto. Las unidades que dominan a E son B y D, que son las únicas candidatas a ser su proyección. Sin embargo la única candidata a ser proyección de la DMU_C es la B. La resolución del problema consiste en realizar la proyección radial, y luego la

proyección rectangular que consiga terminar en una unidad del conjunto $D(J)$, como vemos en la siguiente figura:

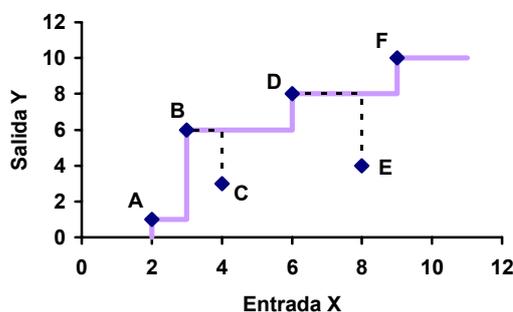


Figura 9: Proyecciones FDH-Output con una entrada y una salida

El caso de dos salidas (y_1, y_2) y una entrada (x) no puede ser representado en el plano a no ser que las entradas sean las mismas para todas las unidades, ya que el modelo FDH no tiene retornos de escala constantes. Considerando tal suposición resolvemos el modelo de la siguiente forma:

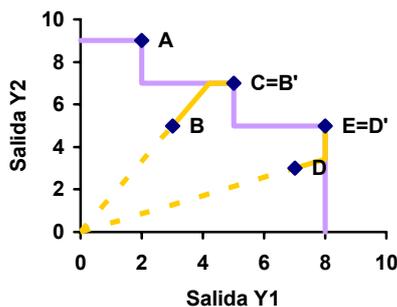


Figura 10: Proyecciones FDH-Output con una entrada y dos salidas

Si observamos las unidades B y D vemos que en primer lugar se efectúa la amplificación radial de las salidas y posteriormente se proyecta de forma rectangular sobre la unidad $D(J)$ correspondiente.

Este modelo lineal tiene variables binarias, lo que puede complicar su resolución, ya que habría que recurrir a métodos como la Exploración Dirigida. Sin embargo, debido a las características del problema, podemos solucionarlo de una manera más sencilla mediante el siguiente algoritmo (para el caso de orientación de salida):

$$\gamma^* = \max_{j \in D(J)} \left\{ \min_{k=1, \dots, s} \left\{ \frac{y_{kj}}{y_{kJ}} \right\} \right\}$$

Este algoritmo se basa en el hecho de que una γ admisible debe cumplir que:

$$\gamma \leq \frac{\sum_{j \in D(J)} \lambda_j y_{kj}}{y_{kJ}}$$

a causa de la restricción del modelo:

$$\sum_{j \in D(J)} \lambda_j y_{kj} \geq \gamma \cdot y_{kj}$$

Como λ_j debe ser 0 ó 1, la solución γ^* es el valor máximo de esa restricción. Para la orientación de entrada se tiene un modelo similar, que se expone a continuación:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && \theta_j \\ & \text{s.a.} && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{iJ} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & && \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & && \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & && \lambda_j \in \{0, 1\} \\ & && s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k \\ & && \theta_j \text{ libre} \end{aligned}$$

El caso de dos entradas y una salida se puede representar gráficamente siempre que todas las unidades tengan la misma cantidad de salida. Con esta suposición la resolución sería:

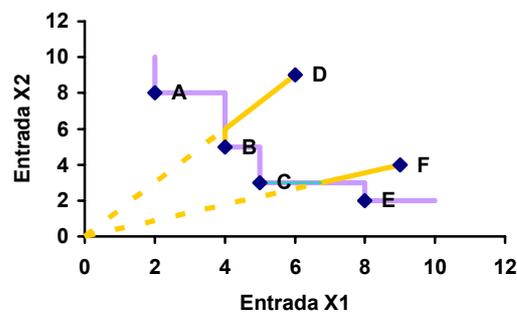


Figura 11: Proyecciones FDH-Input con dos entradas y una salida

El conjunto de DMUs que dominan a D y F son:

$$D(D) = \{A, B, C\}, \quad D(F) = \{C, E\}$$

El algoritmo de resolución correspondiente para el modelo con orientación de entrada es el siguiente:

$$\theta^* = \min_{j \in D(J)} \left\{ \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{ij}}{x_{iJ}} \right\} \right\}$$