

3 REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS: MODELOS DE RETORNOS DE ESCALA CONSTANTES Y VARIABLES

En este capítulo, formularemos los modelos DEA centralizados.

1 INTRODUCCIÓN

En los problemas centralizados, existirá una entidad superior que será la encargada de gestionar a todas las unidades productivas.

Es decir, tendríamos una serie de unidades productivas, que estarían controladas por una entidad central. Cada unidad productiva estaría formada por una serie de parámetros (variables), de entrada y de salida.

En este caso, no se trata de optimizar los recursos de entrada y de salida de cada unidad productiva por separado y uno a uno, sino de conseguir optimizar el global de los recursos de todas ellas. Se busca optimizar el conjunto, y para ello contamos con una serie de recursos que no serán fijos, y que el coordinador central podrá gestionar, transfiriéndolos de una unidad productiva a otra para lograr el beneficio global.

En orientación de entrada no se busca la minimización de los recursos consumidos por cada unidad productiva individualmente sino la reducción del total de cada una de las entradas consumidas por todas las unidades. Igualmente, para los problemas con orientación de salida el propósito será maximizar el valor de la suma de la producción de todas las unidades para cada tipo de salida considerada.

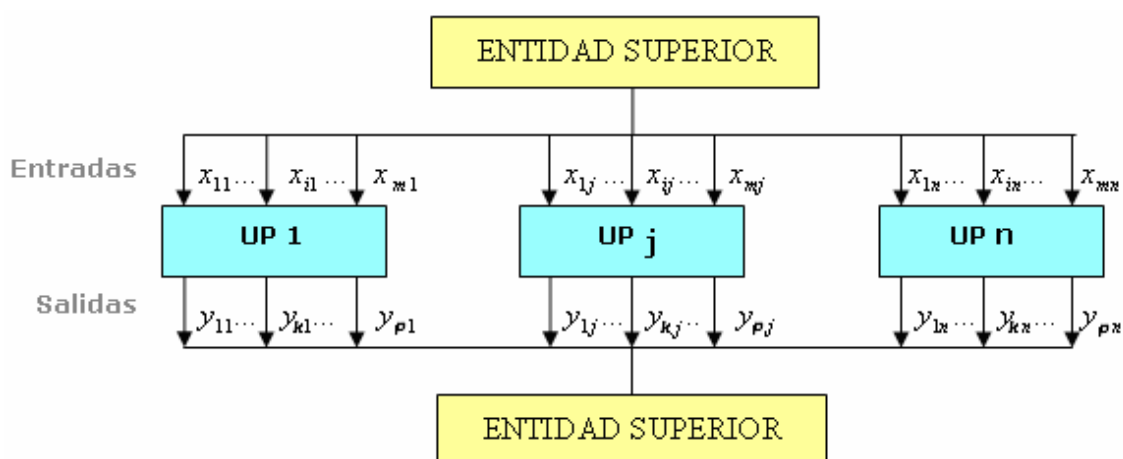


Ilustración 2: Representación del problema centralizado

En este caso las unidades no podrán ser llamadas DMUs porque no son ellas las que gestionan sus recursos, sino que lo hará la entidad superior.

Concretando en un ejemplo, se podría considerar el caso de un banco, que a su vez gestiona una serie de sucursales bancarias. Cada una de estas sucursales, tendrá una serie de entradas y de salidas, que nos servirán para tener una medida de la eficiencia de la entidad. Estos parámetros de entrada, podrían ser por ejemplo

el número de ordenadores, el número de clientes, el tamaño de la oficina, etc. Los parámetros de salida podrían ser el número de créditos concedido por cada sucursal, o bien el número de domiciliaciones realizadas, entre otros.

Dichas sucursales serían controladas, como se ha comentado anteriormente, por la entidad superior.

Por tanto, ahora no tendremos que resolver un problema para cada DMU por separado, sino que se resolverá un único problema que minimice los recursos totales utilizados para el caso de orientación de entrada, o que maximice las salidas totales producidas para el caso de orientación de salida.

Ahora podría ocurrir por ejemplo, que para el caso de orientación de entrada, una determinada unidad aumentara sus recursos, respecto a los que inicialmente tenía, pero ello está permitido siempre y cuando el global de los recursos totales mejore. Lo importante será que la suma total de entradas del conjunto, haya mejorado respecto a la situación inicial. Es decir, al aumentar una unidad sus recursos, otra u otras deberán disminuir los suyos, para que el resultado global mejore. De modo análogo, esto se cumple para la orientación de salida. Podría suceder que una unidad disminuya sus salidas, siempre y cuando otras las hayan aumentado y se cumpla que la suma total de las salidas es superior a la que teníamos inicialmente.

En los modelos tradicionales, nada de esto podía ocurrir, ya que no estaba permitido de ningún modo el empeoramiento, ni de las entradas, ni de las salidas. Por ello podemos pensar, que los modelos centralizados, nos van a llevar a obtener mejores resultados en la búsqueda de la solución óptima a nuestro problema.

2 MODELOS CRS CENTRALIZADOS

Para escribir la formulación de estos modelos partiremos de los modelos CCR del capítulo anterior, por lo que estos modelos tendrán retornos de escala constantes.

2.1 Modelo CRS-INPUT Centralizado

Este modelo está basado en el CCR-INPUT. La diferencia se encuentra en que el objetivo es reducir el consumo total de recursos por lo que tan solo resolveremos un problema, y por tanto, todas las unidades son proyectadas simultáneamente.

Partimos del modelo mostrado en la página siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && \theta_J - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & s.a. && \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_J x_{iJ} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & && \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & && s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k \\
 & && \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Resolviendo los n problemas en uno obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && \theta - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p \sum_{r=1}^n t_{kr} + \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n s_{ir} \right] \\
 & s.a. && \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta \cdot x_{ir} - s_{ir} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \forall r \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = y_{kr} + t_{kr} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad \forall r \\
 & && \lambda_{jr} \geq 0 \quad \forall j, r \\
 & && s_{ir}, t_{kr} \geq 0 \quad \forall i, k, r \\
 & && \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Y sumando las restricciones de entrada y salida la forma de este modelo es la mostrada en la página siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad \theta - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0 \\
 & \quad \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Al sumar las restricciones, las holguras s_i y t_k dejan de depender de cada unidad, y tan solo tendremos una holgura para cada entrada y cada salida

Una de las principales diferencias con el modelo no centralizado es que la reducción radial θ es la misma para todas las unidades.

Este modelo, al igual que ocurría con el no centralizado, se resuelve dividiéndolo en dos fases y resolviéndolas consecutivamente:

Fase I:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad \theta \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\
 & \quad \lambda_{jr} \geq 0 \\
 & \quad \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Resolviendo este modelo, lineal con $n^2 + 1$ variables y $m + p$ restricciones, obtenemos el valor θ^* , que es el máximo ahorro equiproporcional que se puede obtener.

Fase II:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0
 \end{aligned}$$

Éste también es un problema lineal con $n^2 + m + p$ variables y $m + p$ restricciones. Resolviendo, se obtiene el vector $(\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$ que definirá, para cada DMU_r , los puntos con los que se debe comparar para llevar a cabo la solución que se propone. Las entradas y salidas de la solución serán:

$$x'_{ir} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad \forall i$$

$$y'_{kr} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj} \quad \forall j$$

Como cada DMU es proyectada sobre la frontera de eficiencia técnica, sería lógico pensar que una DMU existente que es ya eficiente debería proyectarse sobre ella misma. Pero esto no siempre se cumple en los modelos centralizados ya que puede ocurrir que sea conveniente para el resultado final que una DMU eficiente se proyecte sobre un punto diferente en la frontera eficiente.

2.2 Modelo CRS-OUTPUT Centralizado

Al igual que en el caso de orientación de entrada, podemos partir del modelo CCR-OUTPUT inicial mostrado en la página siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \quad \quad \sum \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & \quad \quad \quad \lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \\
 & \quad \quad \quad \gamma_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Si resolvemos en un mismo modelo los problemas de todas las unidades y sumamos las restricciones de entrada y salida el modelo centralizado quedará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \gamma + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\
 & \quad \quad \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \quad \quad \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0 \\
 & \quad \quad \quad \gamma \text{ libre}
 \end{aligned}$$

También resolvemos este modelo en dos fases. Las mostramos en la página siguiente:

Fase I:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \gamma \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} \geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\
 & \quad \lambda_{jr} \geq 0 \\
 & \quad \gamma \text{ libre}
 \end{aligned}$$

De nuevo tenemos un problema lineal con $n^2 + 1$ variables y $m + p$ restricciones. Siendo γ^* el óptimo del modelo anterior pasamos a resolver la segunda fase.

Fase II:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0
 \end{aligned}$$

En este caso lo que se pretende es maximizar la salida total. También podrá ocurrir que una determinada DMU eficiente no se proyecte sobre sí misma, ya que lo que se busca es la eficiencia global.

3 MODELOS VRS CENTRALIZADOS

A continuación presentamos los modelos centralizados con retornos de escala variables, basados en los modelos BCC del segundo capítulo, mediante un desarrollo matemático análogo al realizado en el anterior apartado.

3.1 Modelo VRS-INPUT Centralizado

Partiendo del modelo BCC-INPUT no centralizado formulamos este modelo, que queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} && \theta - \varepsilon \left[\sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k \right] \\
 & \text{s.a.} && \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i && \forall i \\
 & && \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k && \forall k \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 && \forall r \\
 & && \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0 \\
 & && \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Como en los anteriores casos, resolvemos el modelo en dos fases:

Fase I:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && \theta \\
 & \text{s.a.} && \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^n x_{ir} && \forall i \\
 & && \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} && \forall k \\
 & && \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 && \forall r \\
 & && \lambda_{jr} \geq 0 \\
 & && \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Este problema es lineal con $n^2 + 1$ variables y $m + p + n$ restricciones. Siendo θ^* el óptimo del modelo anterior, la segunda fase del modelo es la mostrada en la página siguiente:

Fase II:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta^* \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0
 \end{aligned}$$

El resultado de esta fase es el vector $(\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$ que define para cada DMU_r el punto al cual debe tender.

3.2 Modelo VRS-OUTPUT Centralizado

El modelo puede formularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \gamma + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} = \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0 \\
 & \quad \gamma \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Las dos fases de resolución se muestran en la página siguiente:

Fase I:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \gamma \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} \leq \sum_{r=1}^n x_{ir} \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} \geq \gamma \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \quad \lambda_{jr} \geq 0 \\
 & \quad \gamma \text{ libre}
 \end{aligned}$$

De esta fase obtenemos el valor óptimo γ^* , que utilizamos para la segunda fase:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\
 & \quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} = \gamma^* \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \quad \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0
 \end{aligned}$$