# 4 REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS CON TECNOLOGÍA FDH

En este capítulo estudiaremos los problemas que se resuelven mediante la tecnología FDH utilizando la visión centralizada que se ha desarrollado en el capítulo anterior.

Dedicaremos una atención especial a los métodos de resolución de estos modelos, que serán distintos a los de los modelos expuestos anteriormente, debido a la aparición de variables enteras.

Como consideración general aplicable al resto de apartados siguientes, todas las unidades productivas se proyectarán sobre las unidades eficientes.

## 1 MODELOS FDH CENTRALIZADOS PUROS

En este apartado definiremos los modelos FDH centralizados, tanto con orientación de entrada como de salida.

La centralización consistirá, al igual que para los modelos centralizados CRS y VRS en reducir el total de recursos consumidos, en el caso de orientación de entrada, o en aumentar la suma de producción generada en el caso de orientación de salida.

Las unidades productivas que dominan a una determinada $DMU_r$, en los modelos FDH convencionales son las pertenecientes al conjunto:

$$D(r) = \{ j : \exists\, i' : x_{i'j} < x_{i'r} \ con\ x_{ij} \le x_{ir} \ \forall i \ne i' \ y\ y_{kj} \ge y_{kr} \ \forall k \ y/ó \\ \exists\, k' : y_{k'j} > y_{k'r} \ con\ y_{kj} \ge y_{kr} \ \forall k \ne k' \ y\ x_{ij} \le x_{ir} \ \forall i \}$$

Es decir, las unidades sólo se proyectarán sobre otra que sea más eficiente que ella, o si éste es el conjunto vacío, se proyectará sobre ella misma.

Pero en los modelos centralizados cabe la posibilidad de que una unidad empeore, si ello supone una mejora global. Por lo tanto, el algoritmo empleado en el primer capítulo, basado en este conjunto de unidades dominantes, proporcionará una solución admisible, pero no necesariamente óptima.

### 1.1 Modelo FDH Centralizado Puro con orientación de entrada

Partiendo del modelo FDH no centralizado mostrado en la página siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} \quad && \theta_J \\
&s.a. && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = \theta_J x_{iJ} - s_i \quad i = 1,2,\dots,m \\
& && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{kj} = y_{kJ} + t_k \quad k = 1,2,\dots,p \\
& && \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
& && \lambda_j \in \{0,1\} \\
& && s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i,k \\
& && \theta_J \;\; libre
\end{aligned}
$$

Si resolvemos todos los modelos en uno nos quedaría:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimizar} \quad && \theta \\
&s.a. && \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} = \theta x_{ir} - s_{ir} \quad \forall i,r \\
& && \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} = y_{kr} + t_{kr} \quad \forall k,r \\
& && \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
& && \lambda_{jr} \in \{0,1\} \\
& && s_{ir}, t_{kr} \geq 0 \quad \forall i,k,r \\
& && \theta \;\; libre
\end{aligned}
$$

Sumando las restricciones de las entradas y las salidas, llegamos al modelo final, que como puede observarse tiene $n^2$ variables binarias $(\lambda_{jr})$ y una variable continua $(\theta)$. El número de restricciones es $m+p+n$. Lo mostramos en la página siguiente:

$$Minimizar \quad \theta$$

s.a. $$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} \leq \theta\sum_{r=1}^{n}x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} = \sum_{r=1}^{n}y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\theta \quad libre$$

A continuación pasamos a explicar el significado de cada grupo de restricciones que aparecen en el modelo.

El primer conjunto de restricciones

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} \leq \theta\sum_{r=1}^{n}x_{ir} \quad \forall i$$

representa, para cada recurso $i$, la obligación de que la suma de las combinaciones lineales de las entradas que se obtienen como solución del problema sea menor o igual que la multiplicación de la reducción radial del vector del total de las entradas y la suma del total de entradas consumidas en la situación inicial. Esto significa que tras resolver el problema la cantidad total de recursos consumidos debe ser menor o igual que la consumida inicialmente.

El segundo grupo de restricciones

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} = \sum_{r=1}^{n}y_{kr} \quad \forall k$$

compara la suma total de las producciones generadas en la solución adoptada con el total de las salidas iniciales, obligando a que las primeras sean mayores o iguales que las segundas, es decir, se debe mantener al menos la producción que se generaba en la situación de partida.

Por último, la restricción:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

impone que los valores de los coeficientes de la combinación lineal para cada unidad sumen uno.

La restricción que hace los modelos FDH distintos de los demás es $\lambda_{jr} \in \{0,1\}$, que indica que la proyección sólo puede ser efectuada sobre una de las unidades presentes en el problema. Es decir, en un problema con $n$ unidades productivas, el vector admisible $(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, ..., \lambda_{hr}, ..., \lambda_{nr}) = (0,0,...,1,...,0)$ significa que la unidad $r$ se proyectará sobre la $h$.

En la resolución de este modelo no es necesaria la fase de maximización de holguras, ya que la primera fase agota las posibilidades de mejoras rectangulares al igual que pasaba en el caso tradicional.

### 1.2 Modelo FDH Centralizado Puro con orientación de salida

En este modelo también partiremos del FDH no centralizado y deduciremos la forma del modelo que buscamos.

$$\mathit{Maximizar} \quad \gamma$$

$$\text{s.a.} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_{iJ} - s_i \quad i = 1,2,...,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{kj} = \gamma_J y_{kJ} + t_k \quad k = 1,2,..., p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \in \{0,1\}$$

$$s_i, t_k \geq 0$$

$$\gamma_J \ \mathit{libre}$$

Resolviendo todos los modelos en uno, obtenemos lo mostrado en la página siguiente:

$$Maximizar \quad \gamma$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} = x_{ir} - s_{ir} \quad \forall i, r$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} = \gamma \, y_{kr} + t_{kr} \quad \forall k, r$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$s_{ir}, t_{kr} \geq 0 \quad \forall i, k, r$$

$$\gamma \; libre$$

Sumando restricciones, para simplificar el modelo obtenemos la forma definitiva:

$$Maximizar \quad \gamma$$

s.a.

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\gamma \; libre$$

El modelo obtenido es lineal y tiene $n^2$ variables binarias y una variable continua libre.

Al igual que en el apartado anterior pasamos a describir el significado de cada grupo de restricciones.

El primer conjunto,

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \quad \forall i$$

impone que el consumo de recursos en la solución obtenida no sea mayor que la cantidad utilizada en la situación inicial.

Las restricciones que aparecen a continuación:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} \geq \gamma\sum_{r=1}^{n}y_{kr} \quad \forall k$$

amplifican radialmente la suma de la producción de todas las unidades productivas, y obligan a que la salida total de la solución final sea mayor que la suma de las salidas iniciales multiplicadas por $\gamma$.

El tercer grupo,

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

significa que la suma de los coeficientes de las proyecciones para cada unidad productiva sea uno.

Las restricciones propias de los modelos FDH

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

obligan a que cada estas variables sean binarias.

Estos dos últimos grupos hacen que para cada unidad sólo exista una variable igual a uno y las demás nulas en el vector $\vec{\lambda}_r$, por lo que la proyección de la unidad $r$ se realizará sobre una sola unidad existente.

# 2 MODELOS FDH CENTRALIZADOS HÍBRIDOS

Estudiaremos los modelos que combinan las entradas y salidas tradicionales, con otras que serán centralizadas. Éstos son los modelos más aproximados a la realidad y por eso constituyen un interesante caso de estudio.

Por tanto, tendremos variables que no podrán empeorar, y otras que sí podrán hacerlo para lograr la mejora del conjunto.

## 2.1 Modelo FDH Centralizado con entradas híbridas y orientación de entrada.

Usaremos el mismo modelo que para el caso FDH Tradicional, pero considerando ahora que alguna de las entradas serán centralizadas y otras tradicionales. Lo mostramos en la página siguiente:

$$Minimizar \quad \theta$$

s.a.
$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} \le \theta\sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i \in I'$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} \le x_{ir} \qquad \forall i \in I'', \forall r$$

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} \ge \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \qquad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\theta \quad libre$$

Se ha denotado como I′ al conjunto de las entradas que cumplen con el modelo centralizado, y por I′′ a aquéllas que siguen el modelo tradicional. Se cumple que I=I′ U I′′, es decir, que la unión de ambas proporciona el total de entradas al problema.

Vemos que la restricción primera:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} \le \theta\sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i \in I'$$

es la misma que aparecía en el modelo centralizado puro.

La segunda de ellas:

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} \le x_{ir} \qquad \forall i \in I'', \forall r$$

es la que pertenece a las entradas tradicionales, y es la restricción que diferencia este escenario de los casos anteriormente considerados.

Por último, se observa que las restricciones aplicadas a las salidas no han cambiado, ya que sólo se han actuado sobre las entradas.

### 2.2 Modelo FDH Centralizado con salidas híbridas y orientación de entrada.

Formulamos el modelo de la forma mostrada en la siguiente página:

$$Minimizar \quad \theta$$

s.a. $$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \quad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \quad \forall k \in K'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq y_{kr} \quad \forall k \in K'', \forall r$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\theta \quad libre$$

En este caso, el subconjunto K’ corresponde a las salidas centralizadas y el subconjunto K’’ con las salidas tradicionales. La unión de ambos proporciona el total de las salidas.

Por tanto, es fácil observar que ahora las restricciones han sido introducidas en la dimensión de salida.

### 2.3 Modelo FDH Centralizado con entradas y salidas híbridas y orientación de entrada.

Se muestra en la página siguiente:

$$Minimizar \quad \theta$$

s.a.
$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i \in I'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ir} \qquad \forall i \in I'', \forall r$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \qquad \forall k \in K'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq y_{kr} \qquad \forall k \in K'', \forall r$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\theta \quad libre$$

Con este modelo, hemos considerado ya todas las combinaciones posibles que existen con orientación de entrada. A continuación, explicaremos la formulación de los modelos para la orientación de salida.

### 2.4 Modelo FDH Centralizado con entradas híbridas y orientación de salida.

Partiremos del modelo centralizado puro con orientación de salida, pero añadiremos en las entradas algunas variables tradicionales.

La formulación del modelo sería la mostrada en la página siguiente:

$$Maximizar \quad \gamma$$

$$\text{s.a.} \qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i \in I'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ir} \qquad \forall i \in I'', \forall r$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \qquad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\gamma \quad libre$$

Vemos que aquí las restricciones a la salida no cambian, y que es la segunda condición, la más restrictiva, ya que el conjunto I’’ es el de las entradas tradicionales, e impide que dichas entradas empeoren, ni siquiera por el bien del conjunto.

## 2.5 Modelo FDH Centralizado con salidas híbridas y orientación de salida.

Ahora sí añadiremos al modelo las restricciones híbridas a las salidas:

$$Maximizar \quad \gamma$$

$$\text{s.a.} \qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \qquad \forall k \in K'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq y_{kr} \qquad \forall k \in K'', \forall r$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\gamma \quad libre$$

## 2.6 Modelo FDH Centralizado con entradas y salidas híbridas y orientación de salida.

Las características de este modelo serían las siguientes:

$$Maximizar \quad \gamma$$

*s.a.*

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i \in I'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ir} \quad \forall i \in I'', \forall r$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq \gamma \sum_{r=1}^{n} y_{kr} \qquad \forall k \in K'$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geq y_{kr} \quad \forall k \in K'', \forall r$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda_{jr} \in \{0,1\}$$

$$\gamma \quad libre$$