2. DESCRIPCIÓN FÍSICA Y CINEMÁTICA DEL MANIPULADOR ROBÓTICO STÄUBLI RX-90.

El proyecto de simulación virtual del corte de piezas emula las características y capacidades del robot Stäubli Rx-90 que se encuentra en laboratorio de Automatización y Robótica de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.

En este apartado abarcamos extensamente todos los aspectos técnicos y de diseño del robot, además de un profundo estudio que resuelve el problema cinemático directo e inverso, resolviendo este último sobre todo con expresiones simples y elegantes pero a su vez rigurosas, que difieren de las obtenidas en proyectos anteriores que también incluían estudios de este tipo.

2.1. ROBOT STÄUBLI RX-90.

2.1.1. Introducción.

El sistema robótico utilizado consiste en un manipulador mecánico con configuración angular y un controlador modelo CS7 conectado a un ordenador.

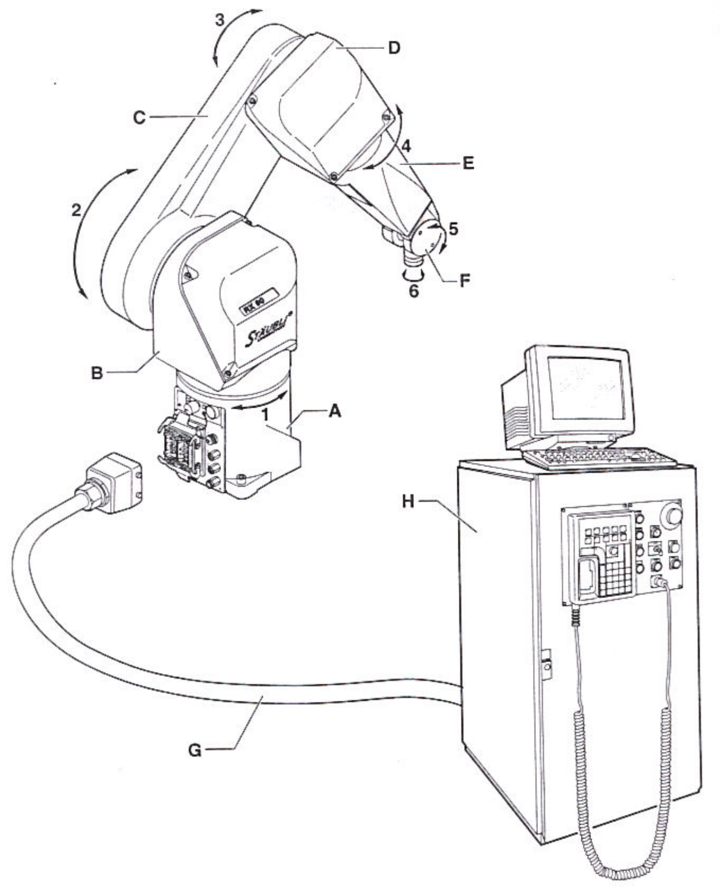

Figura 2. 1. Componentes del robot Rx-90 de Stäubli.

Los componentes de la figura 2.1 se enumeran a continuación:

- A: Pie.
- B: Hombro.
- C: Brazo.
- D: Codo.
- E: Antebrazo.
- F: Muñeca.

- G: Calbe de interconexión entre el manipulador y el controlador.
- H: Controlador.

2.1.2. Manipulador.

La configuración del brazo robótico es angular y consiste en una estructura con tres articulaciones de rotación (3G ó RRR). Asimismo también dispone de una muñeca con tres grados de libertad que permite darle la orientación deseada al efector final.

Este tipo de configuración convierte al manipulador en una máquina muy versátil a la hora de trabajar en diversos entornos industriales con una gran precisión y rapidez; permitiendo a su vez, gracias a sus entradas/salidas digitales, la implementación de tareas que impliquen una sincronización con otros manipuladores.

También es posible clasificar el Rx-90 atendiendo al método de control que admite el robot. En este sentido, es posible distinguir entre robots servo (usan bucles cerrados de control para determinar su movimiento) y no-servo (controlados en bucle abierto; las únicas limitaciones al movimiento vienen impuestas por los topes mecánicos). Los robots servocontrolados se pueden a su vez clasificar según el método que el controlador usa para guiar la garra. Un primer grupo es el de los robots punto a punto (que siguen un camino no definible externamente entre una serie de puntos que indique el operador). El otro grupo es el de los robots de trayectoria continua (es los cuales es posible especificar completamente la trayectoria a seguir por el extremo de la garra). Según estos criterios, el robot RX90 es servocontrolado de trayectoria continua.

2.1.2.1. Pliego de características técnicas.

En cuanto a las cualidades mecánicas del Rx-90 hay que reseñar:

- Peso: 112 Kg.
- Carga nominal: 6 Kg.
- Carga máxima: 12 Kg.
- Velocidad cartesiana máxima: 1.5 m/s.
- Repetitividad: ±0.02 mm
- Número de ejes: 6.

Otras características de interés son:

- Permite una rápida aceleración durante ciclos de tiempo reducidos.
- Garantiza una adecuada precisión a alta velocidad.
- Posee una estructura mecánica rígida.
- El RX-90 posee una muñeca -las articulaciones de la cadena cinemática que unen el brazo y la mano o garra del robot- esférica. Es decir, los ejes de las 3 articulaciones de la muñeca se cortan en un punto. La muñeca esférica permite simplificar el análisis cinemático ya que desacopla el problema del posicionamiento de la garra del problema de la orientación de la misma.
- El RX-90 tiene como actuadores 6 servomotores sin escobillas acoplados a resolvers.
- El conjunto del robot incluye además los frenos, mecanismos de transmisión del movimiento, cableado, circuitos neumáticos y eléctricos y el sistema de equilibrado, formado en este modelo por un conjunto integrado de muelles.

A continuación, se incluye una tabla en las que se pueden observar algunas características mecánicas interesantes de las distintas articulaciones del RX-90:

Articulación	**Valor Mín (º)**	**Valor Máximo (º)**	**V. máx (mm/s)**
1	-160	160	356
2	-200	35	356
3	-52.5	232.5	296
4	-270	270	409
5	-105	120	480
6	-270	270	1125

Tabla 2. 1. Rango de movimiento y velocidades de las articulaciones del Rx-90.

2.1.2.2. Pliego de características geométricas.

Se hace indispensable incluir una figura en la que aparezcan las dimensiones del manipulador y del espacio de trabajo (puntos alcanzables por parte del efector final).

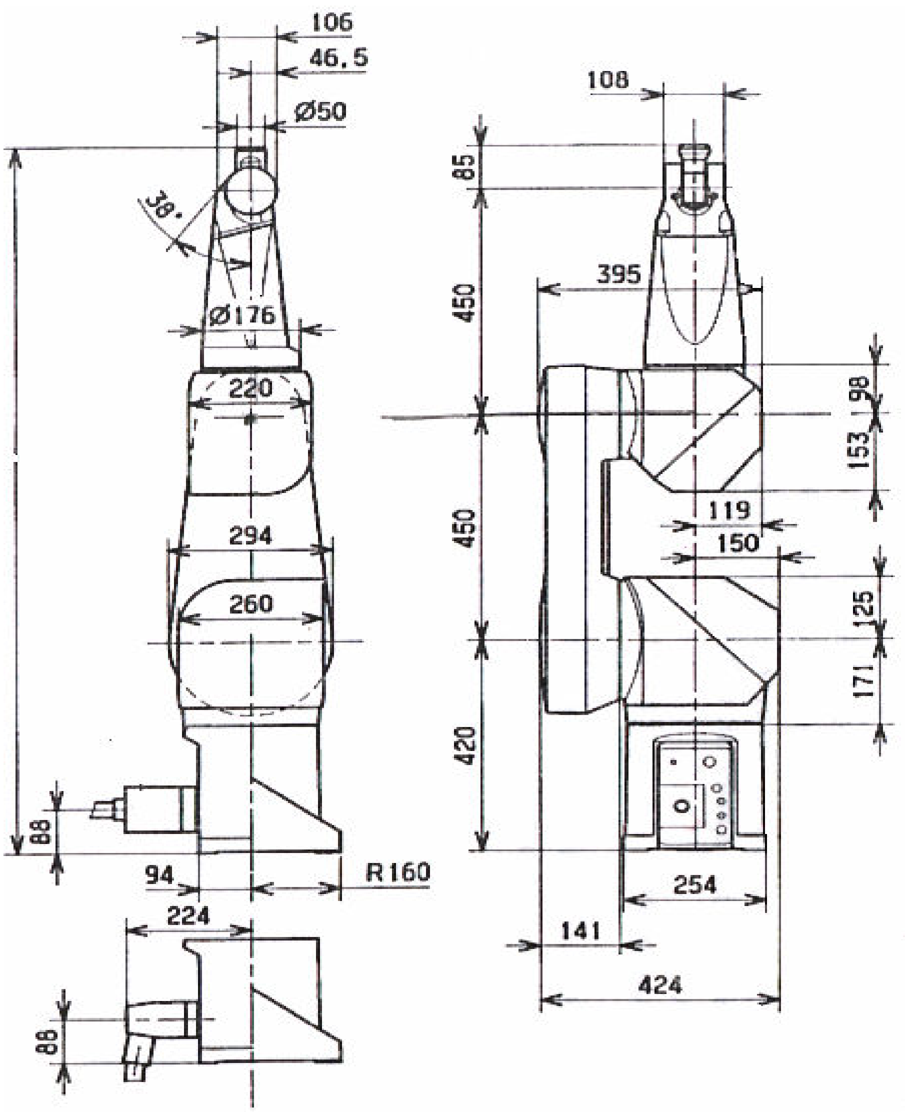

Figura 2. 2. Geometría del manipulador Rx-90.

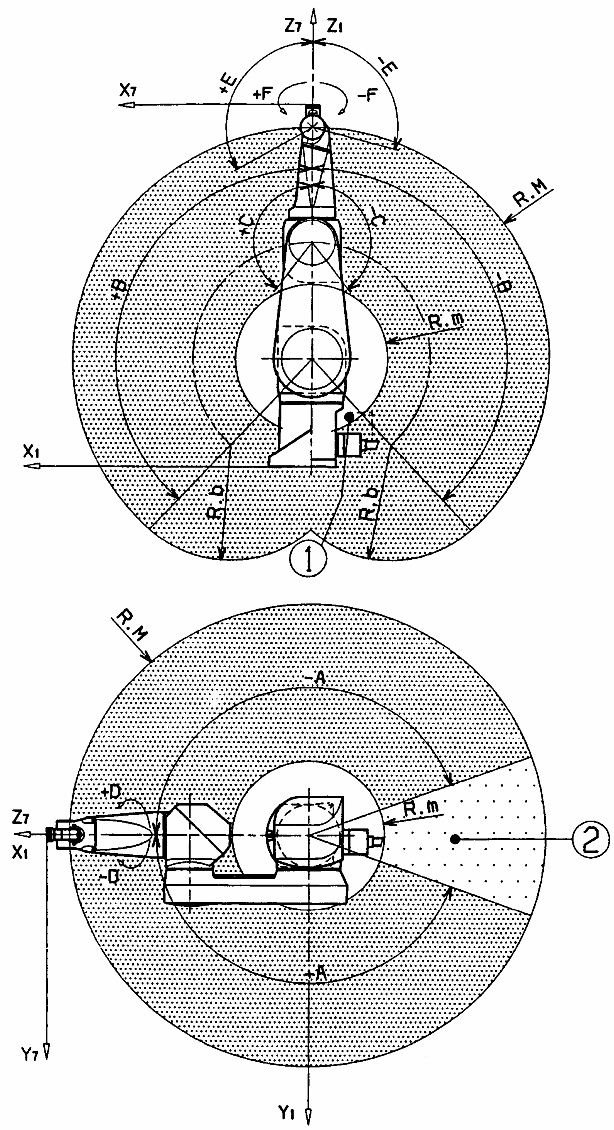

Figura 2. 3. Alcanzabilidad del robot Stäubli Rx-90.

2.1.2.3. Estudio cinemático.

Un robot articulado puede describirse definiendo cuatro magnitudes asociadas a cada articulación, representando las relaciones de traslación y rotación entre los enlaces adyacentes; a esta relación se le denomina representación de Denavit – Hartenberg (1955).

Así, como se explica en [1], la variable de una articulación i de rotación se representará mediante el ángulo θ_i y la de una prismática mediante el desplazamiento d_i. Los otros dos parámetros de la articulación son la distancia a_{i-1} entre el eje de la articulación *i-1* y el eje de la articulación *i*, medida sobre la perpendicular común, y el ángulo α_{i-1} entre estos dos ejes (ángulo entre las proyecciones de los dos ejes en un plano cuya normal es la perpendicular común) medido como rotación alrededor de la perpendicular común hasta hacer coincidir las direcciones de los ejes.

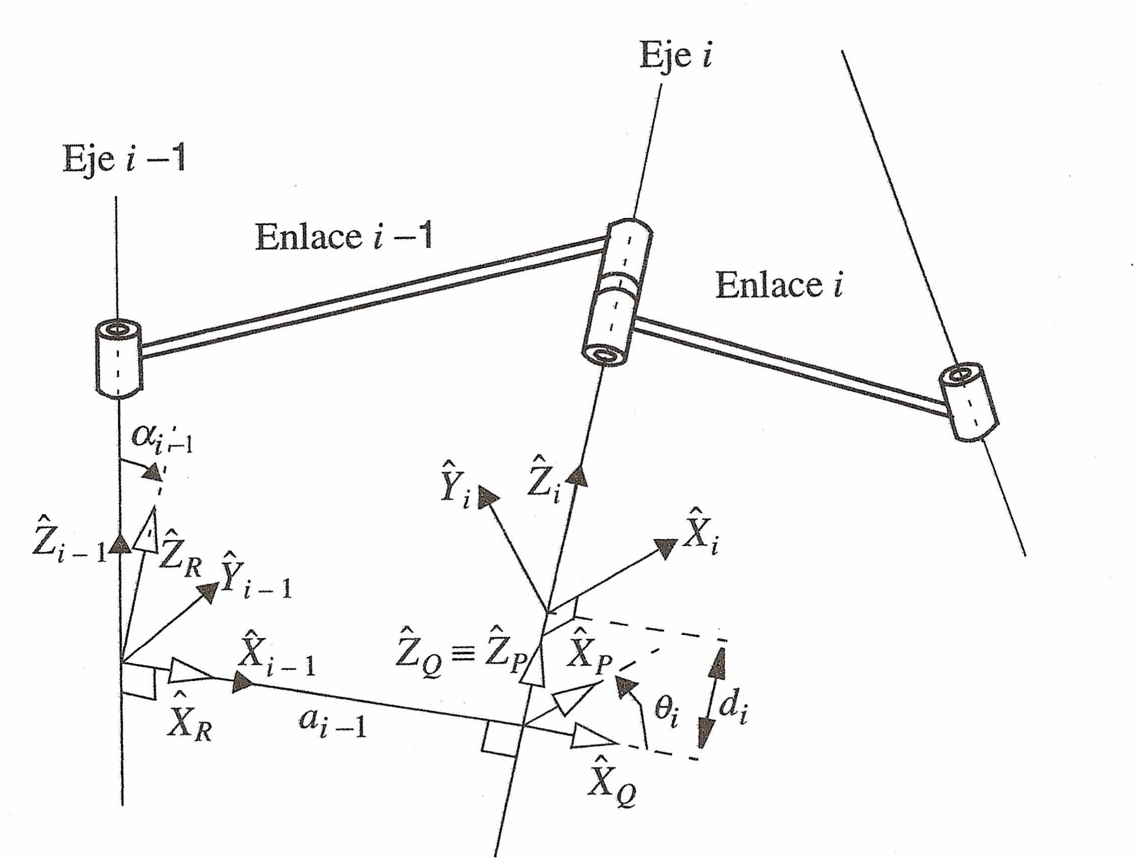

Figura 2. 4. Asignación de cuadros de referencia a articulaciones consecutivas.

Como resultado de todo lo anterior, rellenamos la tabla con los parámetros Denavit-Hartenberg del manipulador que tratamos en este proyecto (que como puede apreciarse es diferente de la utilizada en [4], implicando ello que tanto el problema cinemático directo como el inverso lo resolvemos aquí con distintas ecuaciones, así pues podemos decir que esta parte del código fuente de [4] está totalmente modificada).

Articulación	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90	0	0	θ_2
3	0	450	0	θ_3
4	90	0	450	θ_4
5	-90	0	0	θ_5
6	90	0	360	θ_6

Tabla 2. 2. Parámetros de Denavit-Hartenberg para el Rx-90.

2.1.2.3.1. Modelo cinemático directo.

El modelo directo viene dado por una función que permite expresar la posición y orientación del sistema de referencia asociado al extremo en el espacio cartesiano *p* en términos de las variables articulares *q*:

$$p = \varphi(q) \qquad (2.\ 1)$$

siendo φ un conjunto de funciones no lineales.

El modelado de manipuladores hace necesario representar el enlace *i* con respecto al enlace *i-1*, cada transformación puede definirse según tres parámetros y una variable de articulación. Si se componen estas transformaciones aplicando las matrices de transformación elementales para las rotaciones y las traslaciones, se obtiene la siguiente forma general asociada a la articulación:

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.\ 2)$$

donde *s* significa seno y *c* coseno.

Para construir el modelo directo de un robot con *n* articulaciones es necesario definir un sistema de referencia solidario a cada segmento y elegir sus parámetros. A continuación pueden obtenerse las matrices de transformación de cada articulación; y a partir de éstas, la transformación compuesta $T_{0->n}$ que relaciona la localización *n* con la *0*.

$$p = \varphi(q) = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T \cdots {}^{n-1}_{n}T = {}^{0}_{n}T \tag{2. 3}$$

La estructura de una matriz de transformación homogénea es la siguiente:

$$ {}^{j}_{i}T = \begin{bmatrix} & {}^{j}_{i}R & & {}^{j}_{i}P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^{j}_{i}X & {}^{j}_{i}Y & {}^{j}_{i}Z & {}^{j}_{i}P \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2. 4}$$

donde ${}^{j}_{i}R$ es la matriz de rotación formada por las componentes de los vectores unitarios principales del sistema {i} referidos al {j}, ${}^{j}X_i$, ${}^{j}Y_i$ y ${}^{j}Z_i$ y ${}^{j}P_i$ es el vector de posición del origen de {i} referido igualmente a {j}.

Teniendo en cuanta los parámetros de Denavit-Hartenberg de la *tabla 2.2* y las notaciones siguientes para simplificar las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} s_i = \sin\theta_i & s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \\ c_i = \cos\theta_i & c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j) \end{array} \tag{2. 5}$$

vamos a calcular las matrices una a una.

$$\begin{array}{ll} {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_6 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2. 6}$$

Si realizamos ahora los productos matriciales expresados en (2.3):

$$ {}^{0}_{2}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & -s_1 & 0 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2. 7} $$

$$ {}^{0}_{3}T = {}^{0}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & c_1c_2a_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & s_1c_2a_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -s_2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2. 8} $$

$$ {}^{0}_{4}T = {}^{0}_{3}T \cdot {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - s_1s_4 & -c_1c_{23}s_4 - s_1c_4 & c_1s_{23} & c_1s_{23}d_4 + c_1c_2a_2 \\ s_1c_{23}c_4 + c_1s_4 & -s_1c_{23}s_4 + c_1c_4 & s_1s_{23} & s_1s_{23}d_4 + s_1c_2a_2 \\ -s_{23}c_4 & s_{23}s_4 & c_{23} & c_{23}d_4 - s_2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2. 9} $$

$$ {}^{0}_{5}T = \begin{bmatrix} (c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5 & -(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)s_5 - c_1s_{23}c_5 & -c_1c_{23}s_4 - s_1c_4 & c_1s_{23}d_4 + c_1c_2a_2 \\ (s_1c_{23}c_4 + c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}s_5 & -(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4)s_5 - s_1s_{23}c_5 & -s_1c_{23}s_4 + c_1c_4 & s_1s_{23}d_4 + s_1c_2a_2 \\ -s_{23}c_4c_5 - c_{23}s_5 & s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 & s_{23}s_4 & c_{23}d_4 - s_2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2. 10} $$

Finalmente, la matriz ${}^{0}_{6}T$ la vemos a continuación por columnas para, seguidamente, explicar el sentido físico de cada columna. La notación usada es la misma que la utilizada en [4], aunque los resultados sean diferentes como ya se explicó al mostrar la *tabla 2.2.* de los parámetros de Denavit-Hartenberg.

$$ {}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2. 11} $$

donde

$$\begin{aligned}
n_x &= ((c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5)c_6 + (-c_1c_{23}s_4 - s_1c_4)s_6 \\
n_y &= ((s_1c_{23}c_4 + c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}s_5)c_6 + (-s_1c_{23}s_4 + c_1c_4)s_6 \\
n_z &= (-s_{23}c_4c_5 - c_{23}s_5)c_6 + s_{23}s_4s_6
\end{aligned} \qquad (2.\ 12)$$

$$\begin{aligned}
s_x &= -((c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5)s_6 + (-c_1c_{23}s_4 - s_1c_4)c_6 \\
s_y &= -((s_1c_{23}c_4 + c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}s_5)s_6 + (-s_1c_{23}s_4 + c_1c_4)c_6 \\
s_z &= -(-s_{23}c_4c_5 - c_{23}s_5)s_6 + s_{23}s_4c_6
\end{aligned} \qquad (2.\ 13)$$

$$\begin{aligned}
a_x &= (c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)s_5 + c_1s_{23}c_5 \\
a_y &= (s_1c_{23}c_4 + c_1s_4)s_5 + s_1s_{23}c_5 \\
a_z &= -s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5
\end{aligned} \qquad (2.\ 14)$$

$$\begin{aligned}
p_x &= ((c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)s_5 + c_1s_{23}c_5)d_6 + c_1s_{23}d_4 + c_1c_2a_2 \\
p_y &= ((s_1c_{23}c_4 + c_1s_4)s_5 + s_1s_{23}c_5)d_6 + s_1s_{23}d_4 + s_1c_2a_2 \\
p_z &= -(s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)d_6 + c_{23}d_4 - s_2a_2
\end{aligned} \qquad (2.\ 15)$$

Con las ecuaciones anteriores, a partir de las cuales se obtienen los vectores $\{n, s, a, p\}$, podemos precisar la localización en cuanto a posición y orientación del efector final del manipulador a partir de sus coordenadas articulares. El significado físico de dichos vectores es el siguiente:

- *n*: Vector normal a la mano. Suponiendo una mano del tipo de mordaza paralela el vector *n* es ortogonal a los dedos del brazo del robot.
- s: Vector de deslizamiento de la mano. Está apuntando en la dirección del movimiento de los dedos cuando la pinza se abre y se cierra.
- *a*: Vector de aproximación de la mano. Está apuntando en la dirección normal a la palma de la mano (es decir, normal a la placa de montaje de la herramienta del robot).
- *p*: Vector de posición de la mano. Apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas de la mano, que se suele localizar en el punto central de los dedos totalmente cerrados.

2.1.2.3.2. Modelo cinemático inverso.

En la mayor parte de las aplicaciones, interesa definir los movimientos del robot en el espacio cartesiano con relación a la tarea que se pretende desarrollar. Por tanto el control del robot hace necesario obtener los valores de las coordenadas articulares para que la posición y la orientación del extremo del robot sean la deseada.

Este problema presenta una complejidad muy superior a la del cálculo directo, debido sobre todo a la falta de existencia de una solución unívoca del problema. Mientras que en el cálculo directo a cada configuración interna le correspondía una y sólo una configuración cartesiana, ahora podemos encontrarnos casos para los que no exista configuración interna del robot o casos para los que existan múltiples configuraciones.

En primer lugar, se estudiarán las condiciones que debe de cumplir un punto del espacio para que pertenezca a la región accesible del robot; es decir, para que sea posible el posicionamiento en dicho punto del extremo del mismo. Un punto puede no ser accesible al robot por varias razones, que se van a explicar a continuación.

Como se ha comentado, las posibles causas de que un punto dado caiga fuera del alcance del robot pueden ser:

- Articulaciones fuera de rango. Se producirá en el caso de que un valor de ángulo para alguna articulación tenga que exceder del rango alcanzable por la misma para posicionarse en un punto determinado.
- Localizaciones demasiado alejadas. Al manipulador le es imposible alcanzar una posición en el espacio por hallarse ésta fuera de su espacio alcanzable.

Para simplificar el proceso vamos a separar el efector final del cálculo general, esto significa, que al punto $P = \{p_x, p_y, p_z\}$ hay que restarle el valor d_6 (longitud del extremo, en este caso con la fresa) en la dirección del vector (a_x, a_y, a_z) que representa la orientación.

Por lo tanto tenemos un nuevo punto objetivo *P'*:

$$P' = P - d6 \cdot A \Rightarrow \begin{cases} p_x' = p_x - d6 \cdot a_x \\ p_y' = p_y - d6 \cdot a_y \\ p_z' = p_z - d6 \cdot a_z \end{cases} \tag{2. 16}$$

Con esta operación hemos separado el cálculo de las tres primeras variables articulares, las de posicionamiento, de las tres últimas, las de orientación (que evidentemente, debido a las dimensiones del efector final, modifican la posición del extremo de éste).

- **Cálculo de θ_1:**

Analizamos las expresiones expuestas en (2.15) únicamente con los términos que no van asociados a d_6, ya que le hemos quitado el efector final.

$$\left.\begin{aligned} p_x' = (s_{23}d_4 + c_2 a_2)c_1 = \rho \cdot c_1 = \rho \cos(\theta_1) \\ p_y' = (s_{23}d_4 + c_2 a_2)s_1 = \rho \cdot s_1 = \rho \sin(\theta_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tag{2. 17}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{(p_x')^2 + (p_y')^2} \\ \theta_1 = \arctan 2(p_x', p_y') \end{cases} \tag{2. 18}$$

Hemos hecho un cambio de variables para despejar θ_1, cuya representación gráfica se puede observar en la *figura 2.5*, midiendo el ángulo que se ha desplazado la proyección del brazo robótico sobre el plano XY.

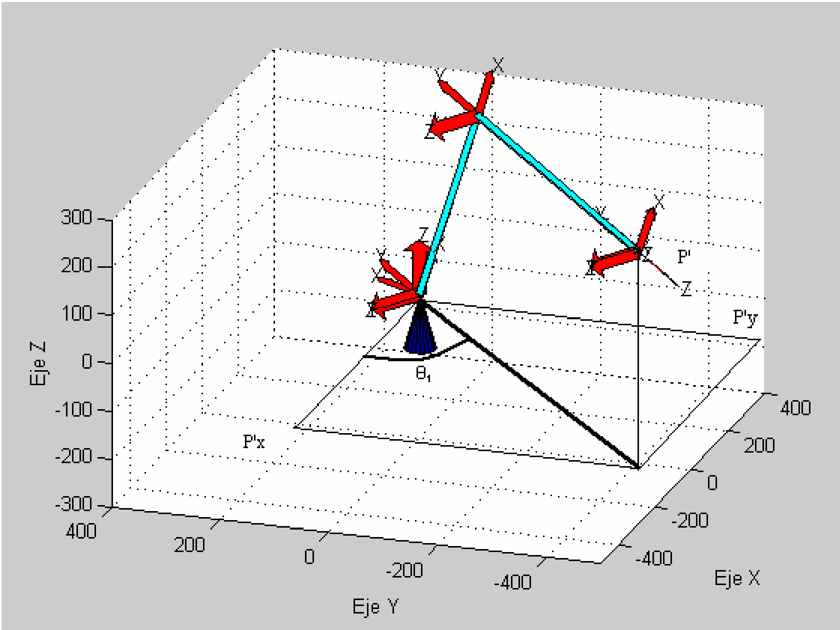

Figura 2. 5. Cálculo de theta1.

Como hemos dicho anteriormente, la solución no es única, a un mismo punto puede llegarse girando en un sentido o en otro, es lo que se llama posición en brazo derecho o en brazo izquierdo. Para eliminar soluciones, definimos una variable llamada BRAZO, que incorpora un signo a la ecuación de θ_1:

- BRAZO = +1 si la configuración es de brazo izquierdo.
- BRAZO = -1 si la configuración es de brazo derecho.

Obteniéndose finalmente una ecuación para la primera variable articular:

$$\theta_1 = \arctan 2(BRAZO \cdot p_x', p_y') \qquad (2.\ 19)$$

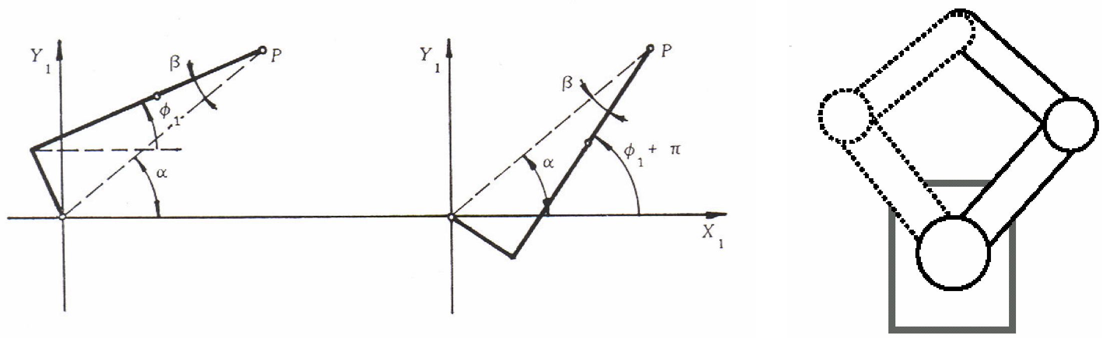

Figura 2. 6. Configuración en brazo derecho e izquierdo.

- **Cálculo de θ_2 :**

Para el cálculo de θ_2 podemos seguir todo el modo teórico expuesto en [4], pero podemos llegar a otras expresiones más simples siguiendo la máxima de que un problema complejo se puede dividir en la suma de varios problemas más simples con sólo analizar el sistema gráficamente en la *figura 2.7.*

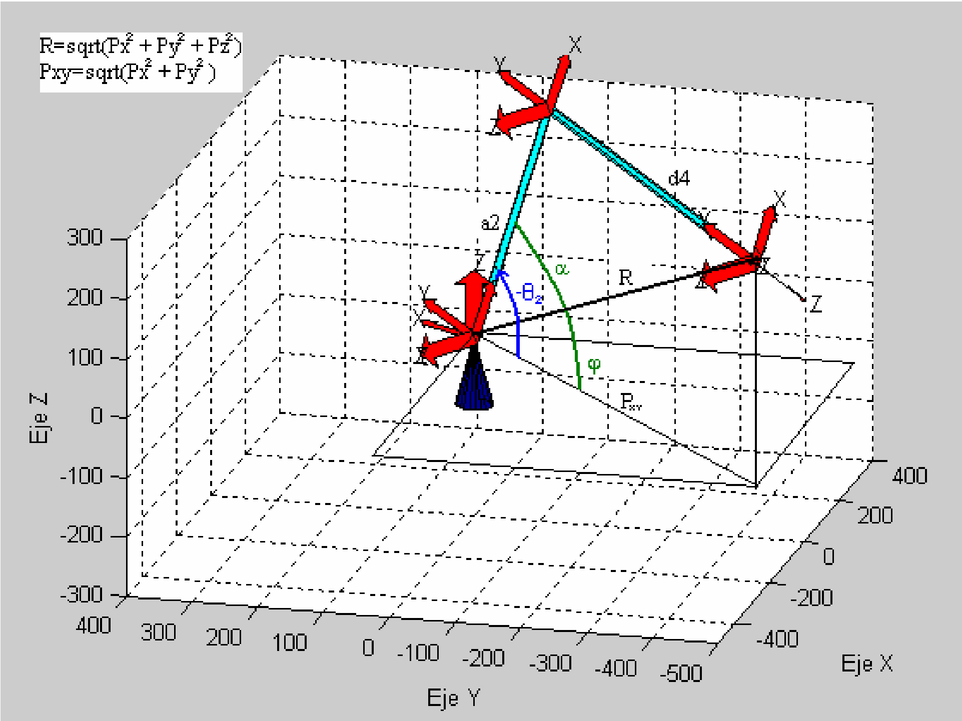

Figura 2. 7. Cálculo de theta2.

La segunda variable articular viene a ser la suma de dos ángulos.

$$\theta_2 = \alpha + \varphi \qquad (2.\ 20)$$

Siendo

$$\varphi = \arctan 2\left(p_z',\pm\sqrt{(p_x')^2 + (p_y')^2}\right) \qquad (2.\ 21)$$

y α un ángulo entre dos lados de un triángulo formado por las aristas a_2, d_4 y *R*; que se puede resolver fácilmente mediante el teorema del coseno:

$$d_4^{\ 2} = R^2 + a_2^{\ 2} - 2Ra_2 \cos(\alpha) \qquad (2.\ 22)$$

con

$$R = \sqrt{(p_x')^2 + (p_y')^2 + (p_z')^2} \qquad (2.\ 23)$$

Despejando:

$$\cos(\alpha) = \frac{{d_4}^2 - R^2 - {a_2}^2}{-2Ra_2} \Rightarrow \alpha' = \arccos\left(\frac{{d_4}^2 - R^2 - {a_2}^2}{-2Ra_2}\right) \qquad (2.\ 24)$$

ecuación que no siempre tiene solución, porque aunque siempre se cumple que tanto R como a_2 son mayores que cero, puede ser que

$$\left|{d_4}^2 - R^2 - {a_2}^2\right| > \left|-2Ra_2\right| \Rightarrow \left|\frac{{d_4}^2 - R^2 - {a_2}^2}{-2Ra_2}\right| > 1 \qquad (2.\ 25)$$

que significaría que el punto *P'* estaría demasiado alejado para pertenecer al espacio alcanzable por el manipulador.

En este momento observamos que nuevamente tenemos varias soluciones, según el signo de la raíz en la ecuación (2.21), para φ, y el signo del seno de α, (puesto que sólo tenemos el del coseno, y al ángulo obtenido con la función *arccos* lo hemo denominado α'). Para acabar con esta ambigüedad añadimos otra variable llamada CODO además de la que ya teníamos con BRAZO:

- CODO = +1 si la configuración es de codo arriba.
- CODO = -1 si la configuración es de codo abajo.

Finalmente nos queda:

$$\theta_2 = BRAZO(\alpha + \varphi) \qquad (2.\ 26)$$

Donde α y φ se obtiene ahora mediante las siguientes expresiones

$$\alpha = \arctan 2(CODO \cdot \sin(\alpha'), \cos(\alpha)) \qquad (2.\ 27)$$

$$\varphi = \arctan 2\left(p_z', CODO \cdot \sqrt{(p_x')^2 + (p_y')^2}\right) \qquad (2.\ 28)$$

- **Cálculo de θ_3:**

En este caso concreto, dado que $a_2 = d_4$ según las especificaciones del robot, lo que tenemos es un triángulo isósceles entre las aristas formadas por el brazo del robot (a_2), el antebrazo (d_4) y la línea que une el origen (situado en la base) con el punto *P'* (llamada *R* anteriormente).

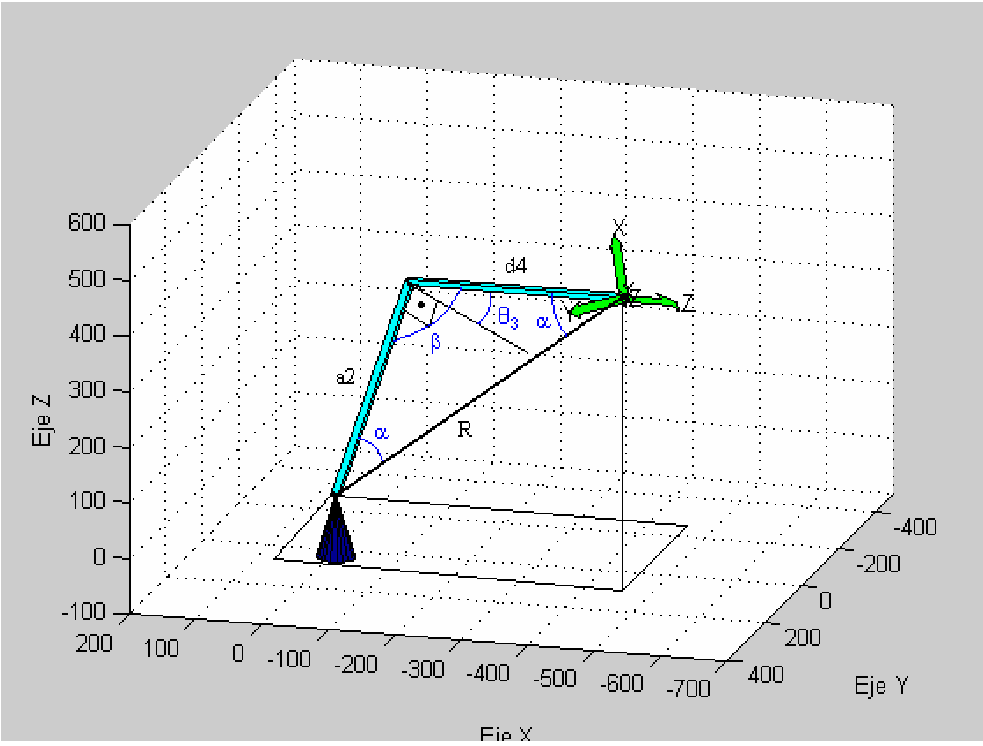

Figura 2. 8. Cálculo de theta3.

Como vemos en la *figura 2.8* nos encontramos ante un triángulo isósceles, cuyos ángulos iguales valen α y el ángulo diferente β, a partir del cual obtenemos

$$\theta_3 = \beta - \pi/2 \tag{2. 29}$$

siendo

$$2\alpha + \beta = \pi \tag{2. 30}$$

despejando β y sustituyendo en (2.27) nos queda:

$$\theta_3 = \pi/2 - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{d_4^{\ 2} - R^2 - a_2^{\ 2}}{-2Ra_2}\right) \tag{2. 31}$$

que tiene solución siempre que no se cumpla la ecuación (2.25).

El problema de esta forma tan simple de obtener la ecuación de θ_3 es que no hay dependencia con θ_2, por lo que nos resulta imposible conocer el cuadrante en el que lo situaríamos. Por ello hacemos un cálculo más preciso utilizando las expresiones para p_x' y p_z' que recordamos a continuación:

$$\begin{aligned} p_x' &= c_1(s_{23}d_4 + c_2a_2) \\ p_z' &= c_{23}d_4 - s_2a_2 \end{aligned} \qquad (2.\ 32)$$

y despejando:

$$\left.\begin{aligned} s_{23} &= \frac{p_x'/c_1 - c_2a_2}{d_4} \\ c_{23} &= \frac{p_z' + s_2a_2}{d_4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_{23} = \arctan 2\left(\frac{p_x'/c_1 - c_2a_2}{d_4}, \frac{p_z' + s_2a_2}{d_4}\right) \qquad (2.\ 33)$$

Finalmente

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \qquad (2.\ 34)$$

- **Cálculo de θ_4:**

Al calcular la matriz de transformación homogénea, hicimos observar que los términos de la tercera columna nos hacían referencia a la orientación del efector final del robot. Ese vector orientación pertenece a un sistema de referencia con origen en la base del robot. Sería interesante entresacar la matriz de transformación homogénea que relaciona la base del robot con el tercer eje, esto es ${}^{3}_{0}T$ que es la inversa de la que calculamos en su momento ${}^{0}_{3}T$. En concreto nos interesa nada más que la matriz de rotación o, mejor dicho, su inversa.

$${}^{3}_{0}R = \left({}^{0}_{3}R\right)^{-1} = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.35)$$

Multiplicando el vector orientación de la fresa por la matriz de rotación anterior, obtendremos un nuevo vector orientación en el sistema de referencia del tercer eje, que es donde se producen los giros de las tres variables articulares que quedan por calcular. Siendo

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}_{6}T(1,3) \\ {}^{0}_{6}T(2,3) \\ {}^{0}_{6}T(3,3) \end{bmatrix} \qquad (2.\ 36)$$

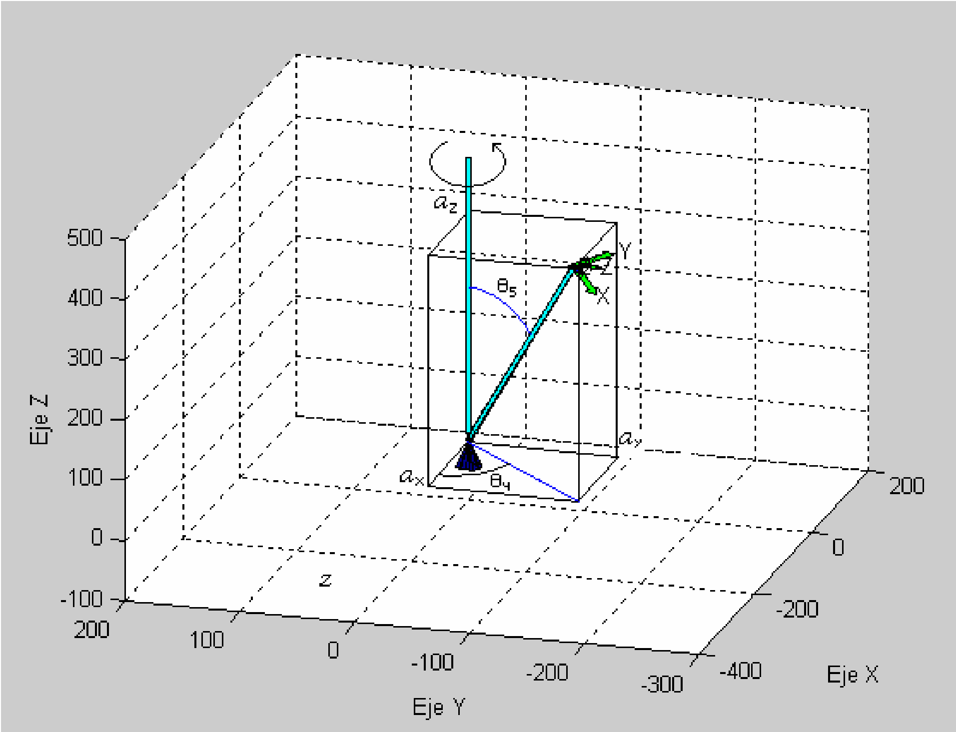

Figura 2. 9. Orientación del extremo del manipulador con el sistema de referencia situado en el tercer eje del robot.

Multiplicamos

$$A' = \begin{bmatrix} a_x' \\ a_y' \\ a_z' \end{bmatrix} = {}^3_0R \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} a_x + s_1 c_{23} a_y - s_{23} a_z \\ -c_1 s_{23} a_x - s_1 s_{23} a_y - c_{23} a_z \\ -s_1 a_x + c_1 a_y \end{bmatrix} \qquad (2.\ 37)$$

Obteniendo por tanto (si nos fijamos en la figura 2.9

$$\theta_4 = \arctan 2(a_y', a_x') \qquad (2.\ 38)$$

Al igual que en los casos anteriores, existen varias soluciones, la primera de ella es la representa en la figura 2.9, con θ_5 positivo, pero la misma posición es posible si a θ_4 le sumamos un ángulo π y usamos θ_5 negativo. Esta ambigüedad se resuelve añadiendo una variable que llamamos MUÑECA que implica

- MUÑECA = +1 si θ_5 es positivo ($s_5 > 0$).
- MUÑECA = -1 si θ_5 es negativo ($s_5 < 0$).

De forma que replanteamos la ecuación (2.38):

$$\theta_4 = \arctan 2\left(MUÑECA \cdot a_y', MUÑECA \cdot a_x'\right) \qquad (2.\ 39)$$

- **Cálculo de θ_5:**

Aprovechando el razonamiento empleado para θ_4 y observando nuevamente la *figura 2.9* la ecuación es trivial:

$$\theta_5 = \arctan 2\left(a_z', \sqrt{(a_x')^2 + (a_y')^2}\right) \qquad (2.\ 40)$$

Según la opción que se eligió en el caso anterior, habrá que cambiarle el signo, o no, al seno de θ_5 según la variable *MUÑECA*.

$$\theta_5 = \arctan 2\left(MUÑECA \cdot a_z', \sqrt{(a_x')^2 + (a_y')^2}\right) \qquad (2.\ 41)$$

- **Cálculo de θ_6:**

En este proyecto se tiene colocado como efector final una fresa neumática, no una pinza. Por tanto la variable θ_6 puede ser cualquiera sin que cambie nada en absoluto de los puntos de la trayectoria. Esto se debe a la simetría radial de la fresa con respecto al eje *Z* del sistema de referencias solidario con el efector final.

En el caso de la pinza sí es importante esta última variable ya que afecta directamente sobre la dirección en la que se cierra y se abre la garra. Para el cálculo haría falta usar el vector (n_x, n_y, n_z) de la expresión (2.12) de la matriz de transformación homogénea calculada en el apartado del modelo cinemático directo.

2.1.3. Controlador CS7.

El armario de mando o de control del Rx-90 se denomina CS7 y contiene el hardware encargado de controlar el brazo robótico y la comunicación con otros dispositivos. A continuación mostramos sus características técnicas:

- CPU: Motorota 68030 a 40 MHz.
- FPU: Motorota 68882 a 33 MHz.
- Disco duro: Mínimo 80 Mbytes.
- Memoria RAM: 4 Mbytes.
- Interfaz de E/S:
    - 4 puertos serie RS-232 (uno de ellos para la conexión con el terminal u ordenador).
    - 1 puerto serie RS-422/485.
    - 12 entradas y salidas digitales.
- Dimensiones: (alto x ancho x profundo) 1200 x 600 x 910 mm.
- Peso: 250 Kg.
- Clase de protección: IP-54.

El controlador dispone además de un mando con el cual permite al operario manejar el robot directamente, o si se prefiere, ejecutar instrucciones desde un ordenador mediante el lenguaje VAL+.

2.1.3.1. Software de generación y seguimiento de trayectorias V_TRAJSIG.

V_TRAJSIG es un paquete informático de generación de trayectorias cartesianas a partir de puntos de referencia. Permite controlar perfectamente todos lo parámetros asociados a dichas trayectorias, tanto estáticos (geometría, posición…) como dinámicos (velocidades, aceleraciones, breaks,…). Haciéndose cargo además de los periféricos asociados.

2.1.4. Adaptador mecánico.

Como se ha mencionado en apartados anteriores, un manipulador industrial es una máquina muy versátil que permite realizar múltiples tareas. Parte de esta flexibilidad se debe a la posibilidad de sustituir la garra que viene de serie por cualquier otra herramienta que sea necesaria, que en nuestro caso es una fresadora neumática.

Puesto que el útil de corte empleado no era una herramienta específicamente diseñada y fabricada por Stäubli para ser usada con el robot RX-90, no había disponible un sistema que permitiera unir ambos elementos de forma eficiente y segura. Por tanto, era necesario diseñar un sistema mecánico que posibilitara el acoplamiento de la fresadora neumática en el extremo del brazo robótico.

Para ello se estudiaron diversas posibilidades tanto con elementos planos como curvos. Los objetivos fundamentales en el diseño fueron varios:

- Por una parte, el sistema utilizado debía ser lo suficientemente robusto para que no se produjera imprecisiones en el movimiento.
- Por otra, debía ser simple y su coste no podría ser excesivamente alto.
- Además, se buscaba que la transformación cinemática entre el extremo del manipulador y el punto de operación de la herramienta fuera lo más sencilla posible.
- Por último, un requisito imprescindible era que el sistema debía ser ligero, ya que la carga máxima del manipulador es de 6 Kg. Además, la ligereza del conjunto permite una mayor precisión de las trayectorias.

Finalmente se optó por un conjunto compuesto de tres piezas de características cilíndricas realizadas en aluminio y acero. Una de las razones por las cuales se decidió realizar el conjunto con piezas cilíndricas fue que la transformación cinemática entre el extremo del robot y el punto de aplicación (corte) de la fresa fuera lo más sencilla posible. De hecho con el esquema realizado, dicha transformación queda reducida a un desplazamiento en el eje Z en el sistema de referencia asociado al extremo del manipulador (sistema de referencia TOOL en la programación del robot). Dicho desplazamiento es de unos 275 mm., dependiendo del decalaje de la fresa.