

Capítulo 2

Cobertura en grandes Redes inalámbricas WSN

2.1

Medidas de Cobertura en Grandes Redes inalámbricas de sensores

1) Un acercamiento a estas grandes redes: aplicaciones, estudios sobre el tema, y formas de caracterizar su cobertura.

Los avances en micro-sensores y en las tecnologías de comunicación han hecho posible fabricar pequeños sensores con capacidad de comunicación inalámbrica con una buena relación calidad-precio. Una red de sensores puede estar formada por un despliegue de sensores especializados en la región de interés para desempeñar ciertas tareas de sensibilidad y/o detección y de trabajo en red (como por ejemplo sucede en las aplicaciones relativas a vigilancia y monitorización de recintos de elevado valor industrial, militar, estratégico, etc.). Muchas de estas aplicaciones involucran a las **grandes** redes de sensores (redes de sensores de gran tamaño, ó a gran escala)), donde un elevado número de sensores son desplegados en una vasta área geográfica. De hecho, el área geográfica es lo suficientemente grande como para que se modele por un **plano infinito**, o por una **franja infinita bidimensional**. Por ello, es importante comprender y caracterizar el comportamiento de este tipo de grandes redes, lo que ayudará a mejorar su uso en diferentes escenarios de aplicación.

En este trabajo estudiaremos principalmente una medida fundamental de este tipo de grandes redes: su cobertura. La cobertura de una red de sensores es una medida de la calidad de servicio que dicha red puede proveer, lo que referido a las aplicaciones antes mencionadas se traduce en cómo de bien una región de interés es monitorizada por los sensores, o cómo de bien una de estas redes detecta un objeto intruso (el término “*intruso*”, o *agente*”, se usará a lo largo del trabajo para denominar el fenómeno a ser detectado por los sensores, como por ejemplo, un tanque enemigo moviéndose por la zona de conflicto).

A continuación describiremos tres de las medidas más utilizadas para caracterizar la cobertura de una red de sensores de larga escala: el área-cobertura, la nodo-cobertura y la detectabilidad.

En primer lugar, dada una red de esta clase, una medida directa de la cobertura de la red estriba en conocer la porción de área cubierta por dichos sensores (ó *área-cobertura*). La caracterización del área de cobertura es importante para planificar ó diseñar la red de sensores: se puede usar para determinar cómo de pequeño puede ser la señal de cada sensor, o cómo debe ser cada sensor desplegado para garantizar que cada fracción de la región sea cubierta. El consumo de energía es otro importante detalle de estas redes, ya que la energía suministrada normalmente por los sensores es limitada. Así, por ejemplo, en el artículo *Liu et al* (2004) se propone reducir el consumo de energía apagando los sensores redundantes siempre que se asegure que la correspondiente porción de área esté cubierta. En este proyecto estaremos también interesados en la fracción (o parte) de sensores que pueden ser eliminados sin que se reduzca el área cubierta (o *nodo-cobertura*). Dicha fracción representará el nivel de redundancia de los sensores desplegados.

Por otra parte, en las aplicaciones de vigilancia es importante conocer la capacidad de las redes de sensores para detectar objetos intrusos (o *detectabilidad* de la red de sensores), la cual se define como la probabilidad de que la red pueda detectar objetos que se mueven dentro o a través de la región de interés.

Desde hace un cierto tiempo, la cobertura ha sido campo de investigación de gran actividad en el marco de las redes de sensores. Muchos estudios se han orientado tanto a caracterizar el área-cobertura como a diseñar algoritmos para obtenerla, todo ello bajo distintos escenarios e hipótesis. Así, por ejemplo, al objeto de extender el tiempo de vida de la red de sensores, el trabajo de *Ye et al* (2003) aborda un esquema *conservador* para la cobertura, en el cual los sensores redundantes (y completamente cubiertos por otros sensores) se desactivan para reducir el consumo de energía, siempre que se preserve el área-cobertura. En esta línea de actuación conservadora, los mismos autores proponen un algoritmo que estudia cómo apagar sensores redundantes (para ahorrar energía y alargar la vida de la red) basado en utilizar sensores “latentes” que “despiertan” ocasionalmente para comprobar un determinado entorno, y que comienzan a funcionar si no existen otros sensores trabajando en dicho entorno.

Otra línea de trabajo sobre cobertura en redes de sensores estudia el llamado *camino de exposición* de objetos móviles, que es una medida cuantitativa de la capacidad de los sensores para detectar objetos en movimiento dentro de la red. En esta línea de investigación, *Meguerdichian et al* (2001) estudian procedimientos para encontrar los caminos más capaces y los menos capaces para ser detectados (esto es, para que objetos que se muevan por ellos sean detectado por los sensores), y también proponen un algoritmo para encontrar los caminos de *mínima exposición*, donde se minimiza la probabilidad de que un objeto en movimiento a lo largo de los mismos sea detectado por los sensores de la red.

La mayoría de estas líneas de investigación se han centrado tanto en el funcionamiento de los distintos sistemas (en función de su diseño), como en el comportamiento de los algoritmos propuestos. Aquí abordaremos el problema de la cobertura desde una perspectiva diferente, estudiando las principales propiedades y limitaciones que presenta la cobertura en redes de sensores. Estas propiedades y limitaciones están determinadas por parámetros básicos de la red (como estrategia de despliegue de los sensores, la densidad de los mismos, etc.), pero pueden también incidir sobre los mecanismos de funcionamiento de la red de sensores: por ejemplo, cuando la densidad del sensor sobrepasa cierto umbral (densidad de filtración), ningún algoritmo puede encontrar un camino a través del cual un objeto pueda cruzar la red sin ser detectado.

El objetivo de nuestro trabajo es caracterizar el comportamiento asintótico de la cobertura de las redes de sensores de gran escala, y explorar los límites fundamentales de la cobertura de la red, para lo cual consideraremos diferentes escenarios de trabajo. Respecto a la topología de las redes, estudiaremos las redes de sensores a larga escala situados tanto en un plano bidimensional como en una franja bidimensional. Por otra parte la ubicación de los sensores puede variar significativamente según las distintas aplicaciones. Así, en una aplicación “estructurada” (como en un sistema de vídeo-vigilancia), los sensores están colocados en localizaciones específicas exactas, mientras que en una aplicación “desestructurada” (como en una vigilancia orientada a misiones militares y/o bélicas), los sensores pueden ubicarse aleatoriamente. Respecto a este último caso (sensores ubicados aleatoriamente en el recinto), *Liu et al* (2004) propone estudiarlos aplicando tanto un modelo de sensibilidad Booleano como un modelo más general (ambos ampliamente

adoptados en la literatura sobre el tema). Se examinarán cada uno de los modelos caracterizando, en cada caso, el área-cobertura, la nodo-cobertura, y la detectabilidad de la red, y se obtendrá que la cobertura exhibe diferentes comportamientos al considerar diferentes escenarios de red. Las caracterizaciones analíticas de cada uno de los problemas darán posteriormente lugar a un examen sobre las consecuencias e implicaciones que tienen en el diseño y funcionamiento de cada tipo de red.

Al considerar el **modelo Booleano** en el caso de la ubicación aleatoria de los sensores, el área de cobertura se obtiene mediante técnicas estocásticas. De hecho, el número de sensores ubicados en una determinada región se modeliza mediante una función de densidad de probabilidad, la cual es posteriormente utilizada para deducir la densidad de sensores requerida para alcanzar una determinada área-cobertura. En cuanto al nodo-cobertura, los resultados de tal simulación sugieren que si los sensores no se despliegan con una elevada densidad, la fracción de nodos redundantes que puede ser apagada sin que se reduzca el área cubierta es pequeña. Y respecto al análisis de la detectabilidad, los resultados indican que la probabilidad de que un objeto intruso pueda ser detectado al trasladarse desde un origen S a un destino D atravesando la red se minimiza cuando el objeto toma un camino recto entre tales puntos, y dicha probabilidad aumenta (se aproxima a uno) cuando la distancia entre ambos puntos tiende a infinito.

Si la localización de los sensores es conocida, y si la red de sensores se sitúa en una franja bidimensional, un objeto puede casi seguramente encontrar un camino a través de la red sin ser detectado, pero en el caso de considerar la red en un plano bidimensional, la correspondiente detectabilidad varía en función de un determinado umbral o *densidad crítica*, de forma que si la densidad de los sensores está por debajo de la crítica, un objeto intruso puede encontrar un camino que cruce la red sin ser detectado. Pero si dicha densidad sobrepasa la densidad crítica, no existirá camino que un objeto pueda cruzar por la red sin ser detectado.

Para una red de sensores a gran escala bajo el **modelo general**, se obtendrán resultados analíticos para el área-cobertura. En cuanto al nodo-cobertura, se demuestra que no se pueden eliminar sensores sin reducir el área cubierta. Y con respecto a la detectabilidad de las redes de sensores bajo el modelo de detección general, aunque su obtención es más difícil y compleja que en el modelo Booleano, se mostrará que si la densidad de los sensores sobrepasa un determinado valor crítico, no existe camino que

un objeto pueda seguir para cruzar por la red sin ser detectado, lo que complementariamente permite conjeturar que cuando dicho valor crítico no es sobrepasado, un objeto intruso puede casi seguramente encontrar un camino que cruce la red sin ser detectado.

2) Modelos para las grandes Redes de Sensores

En esta sección, primero se describirá el modelo de localización y los dos modelos de detección para redes de sensores a gran escala. Luego definiremos las tres medidas de cobertura antes citadas: área-cobertura, nodo-cobertura y detectabilidad.

A) Modelo de localización:

Vamos a considerar una red con un gran número de sensores colocados en una amplia región bidimensional. Asumiremos que la localización de los sensores es independiente y uniformemente distribuida en la región. Este despliegue aleatorio inicial es deseable en escenarios donde no se dispone de un conocimiento previo de la zona, e igualmente el despliegue aleatorio puede ser consecuencia directa de ciertas estrategias de despliegue (por ejemplo, cuando los sensores pueden ser lanzados vía artillería en campos de batalla o entornos hostiles). Bajo esta asunción, la localización de los sensores puede ser modelizada por un proceso estacionario de Poisson bidimensional. Si denotamos por λ el número de sensores por unidad de área, el número de sensores localizados en la región A , $N(A)$, es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda\|A\|$, (donde $\|A\|$ representa el área de la región). Por tanto:

$$P(N(A) = k) = \frac{e^{-\lambda\|A\|} (\lambda\|A\|)^k}{k!}$$

B) Modelos de detección:

En este apartado, vamos a considerar dos modelos diferentes: un modelo Booleano y un modelo general. Ambos modelos han sido ampliamente usados en la literatura sobre el tema (ver *Tian et al* (2002) y *Ye et al* (2003) entre otros).

1) *Modelo Booleano:*

El modelo de detección Booleano simple que exponemos es el utilizado por *Liu et al* (2004), y ha sido ampliamente adoptado en los estudios sobre el tema. En este modelo cada sensor tiene un cierto *rango de sensibilidad* (ó de detección), r . Un sensor sólo es sensible y es capaz de detectar eventos dentro de un entorno de radio r .

Una localización se dice que será cubierta por un sensor si se sitúa dentro del área de detección del sensor. El espacio se divide así en dos regiones, la *región cubierta*, que es la región cubierta por al menos un sensor, y la *región vacante*, que es complementaria a la anterior. Un objeto es detectado si pasa a través de la región cubierta. Al objeto de computar la detectabilidad de la red, decimos que dos sensores de localizaciones X_i y X_j están directamente conectados si el área de detección de los dos sensores intersectan, esto equivale a decir que $|X_i - X_j| \leq 2r$, donde $|X_i - X_j|$ es la distancia entre dos sensores. Un cluster es cada una de las componentes conexas de la región cubierta, y dos nodos se dicen conectados si pertenecen al mismo cluster. Un objeto no puede atravesar un cluster sin ser detectado (puesto que se moverá a través de una región cubierta y por tanto será detectado).

2) *Modelo general*

A pesar de su simplicidad, el anterior modelo Booleano no captura la degradación de la capacidad de detección de los sensores a medida que la distancia entre el sensor y el punto intruso aumenta. En general, y dependiendo del tipo de dispositivos, de su fabricación y del entorno en el cual sean instalados, los sensores presentan una amplia variedad de características distintas de detección. El modelo general que exponemos aquí, y que es el más ampliamente utilizado en la literatura, es aplicable para una amplia gama de señales: de radio, acústicas, sísmicas, etc.

Para un sensor s , la señal de detección en un punto arbitrario p , viene dada por:

$$S(s, p) = \begin{cases} \frac{\alpha}{d(s, p)^\beta}, & \text{para } A \leq d(s, p) < B \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}, \text{ donde:}$$

- α es la energía emitida por un evento ocurrido en el punto p ,
- $d(s, p)$ es la distancia euclídea entre el sensor s y el punto p ,
- A y B son parámetros que definen el rango de detección de los sensores.
- La señal de detección decae de acuerdo con una ley potencial de exponente β , donde usualmente el valor del exponente se asume conocido (o estimado experimentalmente).

Según viene definido en Meguerdichian et al (2001) la **Intensidad conjunta** de todos los sensores en un punto arbitrario p , I_p , será la suma de las señales de detección de todos los sensores $(s_1, s_2, \dots)$ en p :

$$I_p = \sum_{i=1}^{\infty} S(s_i, p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha}{d(s_i, p)^\beta}$$

Decimos que un punto p está cubierto si la intensidad conjunta de todos los sensores en p es mayor que un cierto umbral θ , es decir, si $I_p \geq \theta$. El conjunto de puntos que están cubiertos según dicha definición es lo que conocemos por **región cubierta**. La complementaria a la región de cobertura es llamada **región vacante**.

Claramente esta definición requiere de la información de todos los sensores de la red para computar la intensidad conjunta de todos los sensores. Sin embargo, este requerimiento puede ser relajado considerando tan solo las contribuciones de los $N \geq 1$ sensores más cercanos, y en tal caso nos referiremos a I_p como la intensidad conjunta de los N sensores más cercanos, mientras que la anterior definición de I_p se refiere a la intensidad conjunta de *todos* los sensores. Claramente esta última (de todos los sensores) es no menor que la intensidad conjunta de los N sensores más cercanos. La intensidad conjunta de todos los sensores caracteriza la mejor cobertura que una red de sensores puede ofrecer. (Notar que el Modelo Booleano puede ser fácilmente obtenido a partir del caso $N=1$).

3) Medidas de Cobertura de las grandes Redes de Sensores

A continuación pasamos a definir las tres medidas de cobertura descritas al principio de este capítulo, que son una caracterización cuantitativa de la cobertura de una red de sensores a gran escala.

Área-Cobertura (f_a): La parte del área geográfica cubierta por uno o más sensores.

Hay que reseñar que el hecho de que una localización sea cubierta depende del modelo de detección bajo consideración. En el Modelo Booleano, una localización es cubierta si está dentro del área de detección de algún sensor. En el Modelo General, una localización es cubierta si la Intensidad conjunta de todos los sensores del campo es mayor que el umbral θ . El Área-Cobertura es una medida que directamente cuantifica cómo de bien una región es cubierta por una red de sensores.

Nodo-Cobertura (f_n): La fracción (o parte) de sensores que puede ser eliminada sin reducir el área-cobertura. Como ya se ha indicado, esta medida es un indicador del nivel de redundancia de los sensores desplegados.

Detectabilidad ($p_d(S, D)$): La probabilidad de que una red de sensores pueda detectar un objeto moviéndose desde el punto S hasta el punto D a través de la red.

Esta medida es asimismo un indicador de la capacidad de la red para detectar intrusos, y obviamente su obtención depende tanto del despliegue de los sensores como de las localizaciones de los dos puntos finales S y D . Por ello, aquí estudiaremos la detectabilidad en un sentido esperado, esto es, como el valor esperado para todas las diferentes realizaciones de la red de sensores (o esperanza matemática). Consecuentemente, la Detectabilidad estará sólo en función de la densidad de los sensores y la distancia entre los dos puntos finales ($x = |SD|$, longitud del segmento SD).

En algunos escenarios específicos de redes de sensores, nos interesarán algunas variaciones sobre la anterior definición de Detectabilidad. Introduciremos dichas variaciones más adelante, cuando describamos dichos escenarios (algunos de ellos están relacionados con escenarios *reales* de aplicación de la detectabilidad, como pueden ser la detección de objetivos móviles en escenarios bélicos, o bien rastrear el mundo animal en un entorno monitorizado).

2.2

Red de Sensores Aleatoria: Modelo Booleano

En esta sección estudiaremos la cobertura de las redes de sensores a gran escala, aleatorias y bajo un modelo Booleano. Consideraremos dos situaciones: que la red esté situada dentro de un plano bidimensional infinito y que esté en una franja bidimensional, y en cada caso describiremos las correspondientes tres medidas de cobertura: Área-cobertura, Nodo-cobertura y Detectabilidad.

A) Caso del plano bidimensional

1) Área-Cobertura

En el caso de un plano bidimensional, donde los sensores están desplegados uniformemente y con densidad λ , y siendo r el rango de detección de los sensores, el Área-cobertura de dicha red está dada por:

$$f_a = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}$$

Este resultado se deduce de la asunción --ya indicada en el punto anterior-- de que el número N de sensores localizados en una determinada (y suficientemente amplia) región A es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $E(N) = \lambda \|A\|$, (donde $\|A\|$ representa el área de la región). La fórmula anterior puede ser usada para determinar, con una seguridad casi total, la densidad λ de sensores requerida para alcanzar una determinada Área-

cobertura f_a (con $0 < f_a < 1$). Dicha densidad viene dada por:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - f_a)}{\pi r^2}$$

2) Nodo-Cobertura

En el caso del plano bidimensional, resulta difícil obtener una expresión cerrada para el nodo-cobertura. De hecho el comportamiento del nodo-cobertura se obtiene empíricamente, a partir de simulaciones en un plano bidimensional donde se consideran redes de sensores con distintas densidades para los sensores desplegados en dicho plano.

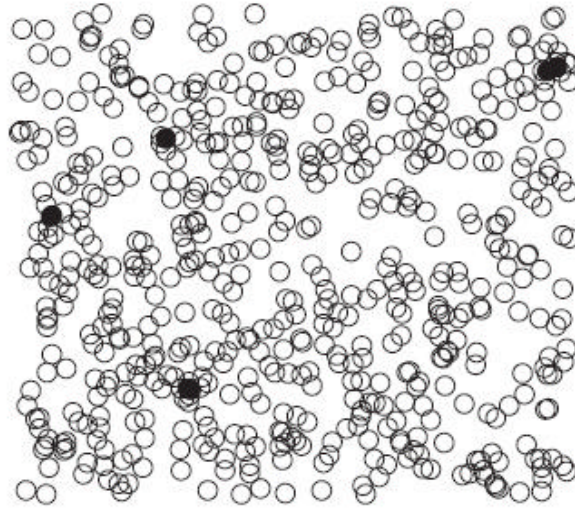


Figura 2.1: Ejemplo de una red de sensores (detalle) con una densidad de 2×10^{-3}

En este ejemplo, propuesto por *Liu et al.* (2004), cada sensor está representado por un círculo con un rango de detección común. El área-cobertura es la región cubierta por los sensores, mientras que los círculos rellenos representan los sensores que están cubiertos completamente por otros sensores (Figura 2.1). Podemos observar que la densidad es relativamente alta y los sensores redundantes (que están completamente cubiertos por otros sensores) están escasamente distribuidos en la red. Este resultado sugiere que en escenarios donde los sensores no pueden desplegarse con una elevada densidad (debido al coste económico, o a otras razones), la fracción de sensores redundantes que puede ser eliminada sin que se reduzca el área cubierta es pequeña.

3) Detectabilidad:

Vamos a estudiar la detectabilidad de una red de sensores en 2 escenarios diferentes. En el primer escenario, asumiremos que las localizaciones de los sensores son desconocidas para el objeto intruso, mientras que en el segundo escenario dichas localización serán conocidas.

(i) Localizaciones de los sensores desconocidas

Consideremos un escenario donde un objeto se mueve desde un punto S a otro D a lo largo de un camino p , (tal y como muestra la Figura 2.2).

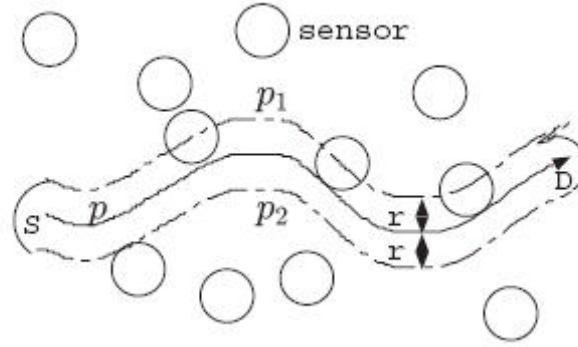


Figura 2.2: Zona de detección de un camino p entre dos puntos S y D

Definiremos primero el dominio Z_p entre 2 curvas (p_1 y p_2) que distan r a p como la Zona de detección del camino p , tal que un objeto moviéndose a lo largo del camino p será detectado por los sensores localizados dentro de Z_p . Sea $\|Z_p\|$ el área de Z_p . Entonces, el número de sensores en Z_p : N_p , es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\lambda\|Z_p\|$. De igual forma, la probabilidad de que un objeto que se mueve a lo largo del camino p pueda ser detectado es:

$$P_d(p) = 1 - P(N_p = 0) = 1 - e^{-\lambda\|Z_p\|} = 1 - \frac{1}{e^{\lambda\|Z_p\|}}$$

Consecuentemente, para minimizar la probabilidad de ser detectado, un objeto debería elegir un camino cuya zona de detección presente la mínima área, lo cual se

consigue si el objeto intruso elige el *camino recto* entre S y D . Así, para minimizar la probabilidad de ser detectado, la mejor estrategia es coger el camino más directo.

Si denotamos la longitud del segmento SD como x , tenemos que $\|Z_p\| = 2rx + \pi r^2$. La probabilidad de que un objeto sea detectado a lo largo de SD es, por tanto:

$$P_d(x) = 1 - e^{-\lambda(2rx + \pi r^2)} = 1 - \frac{1}{e^{\lambda(2rx + \pi r^2)}}$$

Cuando la distancia entre 2 puntos finales aumenta y se aproxima a infinito ($x \rightarrow \infty$), la detectabilidad (P_d^∞) de una red de sensores puede ser interpretada como la capacidad de dicha red para detectar objetos que intentan cruzarla. Llamaremos a esta detectabilidad P_d^∞ , la *Detectabilidad Asintótica* de una red de sensores. De la anterior ecuación podemos deducir que:

$$P_d^\infty \rightarrow 1, \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Consecuentemente, sin conocer la localización de los sensores, un objeto **no** puede cruzar la red sin ser detectado.

(ii) Conociendo la localización del sensor

Desafortunadamente, es muy difícil computar la detectabilidad para el caso general donde la distancia entre los 2 puntos finales es un parámetro. A pesar de ello, cuando la distancia entre los dos puntos extremos tiende a infinito se puede obtener la *Detectabilidad Asintótica*. Hay que tener en cuenta que dicha detectabilidad representa la capacidad de una red de sensores para detectar objetos que intentan cruzar a red.

En el límite, como la distancia entre 2 puntos finales se aproxima a infinito, la Detectabilidad Asintótica de una red de sensores se puede relacionar con el continuo *filtrado* de los sensores, de acuerdo a lo expuesto en el artículo de Meester (1996). Dicho trabajo se apoya en la Teoría de filtración para establecer que existe una densidad crítica λ_c , por debajo de la cual un objeto puede atravesar la red sin ser detectado, y por encima de la cual un cluster no acotado de infinitos sensores *filtra* toda la red, y cualquier objeto que intente cruzarla será detectado casi con total seguridad. Esta fase de transición respecto de

la densidad crítica λ_c presenta un comportamiento discontinuo y binario, debido al cual la Detectabilidad Asintótica sólo puede tomar los valores 0 y 1, esto es:

$$P_d^\infty = \begin{cases} 0, & \lambda < \lambda_c \\ 1, & \lambda \geq \lambda_c \end{cases}$$

La densidad crítica (λ_c) depende del rango de detección de los sensores, y puede ser obtenida vía simulación.

B) Caso de la franja bidimensional:

En algunos escenarios, debido a las restricciones geográficas del terreno, la región de interés puede tener una larga extensión en una dirección particular. En tal caso las redes de sensores pueden modelizarse mejor mediante una franja bidimensional.

Por conveniencia, colocaremos los límites de de la franja bidimensional tangentes al área de detección de los sensores más periféricos (Figura 2.3). Si la anchura de la franja es mucho mayor que el rango de detección de los sensores, esto es, $h \gg r$, el efecto "frontera" introducido por los dos límites de la franja sobre el Área-cobertura y el Nodo-cobertura es escaso, de tal forma que el comportamiento de este modelo es similar al obtenido para el modelo del plano bidimensional, y el Área-cobertura y el Nodo-cobertura pueden aproximarse por las correspondientes expresiones que se obtienen para el caso plano bidimensional

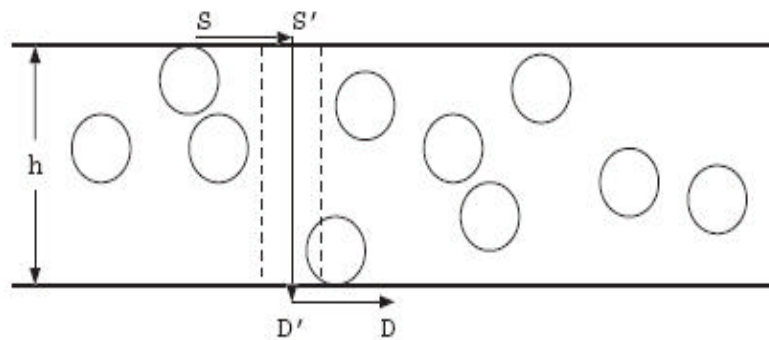


Figura 2.3: Red de sensores en una franja Bidimensional

En este escenario es más interesante estudiar la Detectabilidad cuando los dos puntos extremos, S y D , están en lados opuestos de la franja. Esta detectabilidad representa la capacidad de una red de sensores para detectar objetos que intentan cruzar la franja desde el principio hasta el final. Como en el apartado anterior, estudiaremos los casos en los que la localización de los sensores es desconocida y conocida.

(i) Detectabilidad para localizaciones de los sensores desconocidas.

Es fácil mostrar que un objeto debería cruzar la franja perpendicularmente a algún punto arbitrario al objeto de minimizar la posibilidad de que sea detectado (Figura 2.3). En tal caso, *Meguerdichian et al* (2001) obtiene que la probabilidad de que un objeto sea detectado viene dada por:

$$P_d(2 - \dim \text{franja}) = 1 - e^{-2\lambda rh}$$

(ii) Detectabilidad para localizaciones de los sensores conocidas.

Para el caso de un plano infinito bidimensional, ya hemos visto que debido al filtrado de los sensores en la red, la detectabilidad de la red de sensores exhibe una fase de transición con respecto a una densidad crítica. Por encima de la densidad crítica, un cluster infinito de sensores *filtra* la región, y ningún intruso puede atravesar la red sin ser detectado. Sin embargo, para una franja finita de anchura h , nunca hay filtrado. Por tanto, existe casi con seguridad un camino en la franja bidimensional por el que un objeto puede cruzar la red sin ser detectado por los sensores, y donde la probabilidad de que un objeto sea detectado es nula, esto es:

$$P_d(2 - \dim \text{franja}) = 0$$

2.3

Red de Sensores Aleatoria: Modelo General

En este apartado veremos el Área-cobertura, el Nodo-cobertura, y la Detectabilidad para una red de sensores a gran escala, aleatoria y bajo el modelo de detección general:

A) Área-Cobertura

Para un punto arbitrario p , la Intensidad Conjunta de todos los sensores es, como ya hemos visto anteriormente

$$I_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha}{d(s_i, p)^\beta}$$

La condición necesaria y suficiente de convergencia de I_p será, según se expresa en *Liu et al. (2004)*:

$$\int_y^{\infty} \frac{\alpha}{t^{\beta-1}} dt < \infty, \quad \text{para "y" suficientemente grande, y donde } \beta > 2$$

En tal caso, la convergencia de I_p está garantizada para cualquier punto arbitrario p .

Para deducir el Área-cobertura, primero obtenemos la función densidad de probabilidad (PDF) de la Intensidad conjunta de todos los sensores en un punto arbitrario p , que denotamos por $f_{I_p}(x)$. Para obtener dicha función de densidad $f_{I_p}(x)$, *Liu et al. (2004)* se basan en hipótesis ampliamente aplicadas en la literatura, que asumen que, en este tipo de redes, la intensidad conjunta I_p puede ser modelada como un proceso de ruido de proyectil que sigue una distribución de Poisson bidimensional (la homogeneidad del proceso de Poisson implica que la función de densidad es la misma para todos los puntos del plano). Con estas hipótesis, y conociendo el comportamiento de Poisson para el proceso de ruido de proyectil unidimensional, se obtiene la siguiente expresión para la PDF de I_p :

$$f_{I_p}(x) = \frac{1}{\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jwx - \lambda \pi \alpha^D (-jw)^D \Gamma(1-D)] dw$$

donde $D = 2/\beta$, y la función Gamma está definida como: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Omitimos los cálculos requeridos para la obtención de esta expresión y las que siguen, ya que se pueden consultar con más detalle en *Liu et al. (2004)*.

Recordemos que un punto está cubierto si $I_p \geq \theta$. Una vez se tiene la función de densidad de la Intensidad Conjunta de todos los sensores, el Área-cobertura se computa de la siguiente manera:

$$f_d = P(\text{punto } p \text{ sea cubierto}) = P(I_p \geq \theta) = \int_{\theta}^{\infty} f_{I_p}(x) dx$$

Por lo general, la PDF de I_p y por tanto el Área-cobertura pueden ser computadas numéricamente. Así por ejemplo, para el caso particular de $D = 1/2$ ó $\beta = 4$, *Liu et al. (2004)* obtienen la siguiente expresión para $f_{I_p}(x)$:

$$f_{I_p}(x) = \frac{\lambda \pi \alpha^{1/2}}{2} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{\lambda^2 \pi^3 \alpha}{4x}\right]$$

Por tanto, el área de cobertura será: $f_d = \int_{\theta}^{\infty} f_{I_p}(x) dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2, \frac{\alpha \lambda^2 \pi^3}{4\theta})$

donde, para simplificar notación, en el segundo miembro aparece la función Gamma incompleta, definida como $\Gamma(x, a) = \int_a^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

La siguiente Figura 2.4 muestra, para el caso especial anterior de $\beta = 4$, el Área-cobertura que resulta para $\alpha = 1$, al considerar diferentes densidades λ de los sensores, concretamente para $\lambda = 0.006$ y $\lambda = 0.01$:

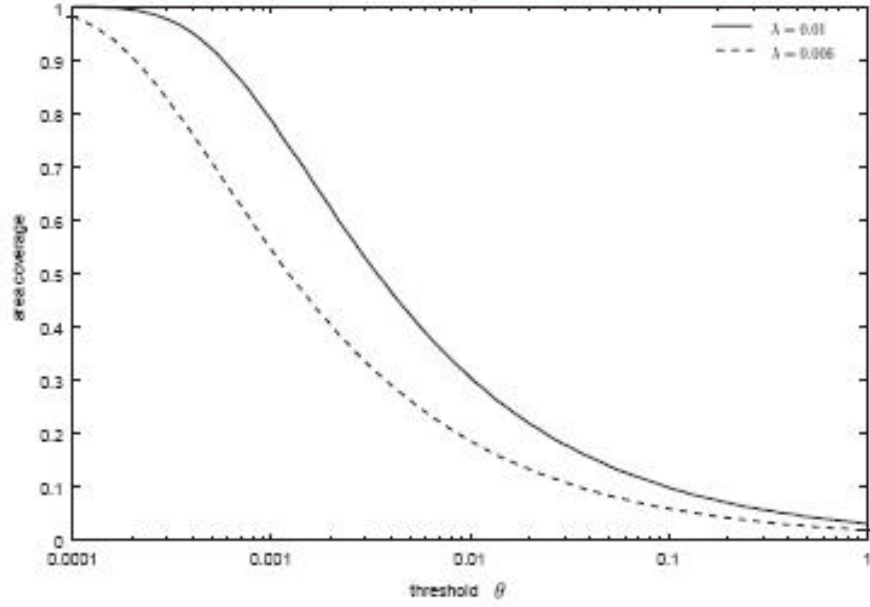


Figura 2.4: Área-cobertura bajo el modelo general, cuando $\alpha = 1$, $\beta = 4$

B) Nodo-Cobertura

El principal resultado de este apartado es que, en este modelo, **la Nodo-Cobertura es nula**: $f_n = 0$. En otras palabras: en el modelo de detección general, un sensor no puede apagarse sin que se reduzca la región cubierta, como se verá a continuación.

En efecto, dicho resultado se basa en mostrar que existen puntos p en la red que no están cubiertos, (esto es, tales que $I_p < \theta$). Para obtener esto, sea un punto arbitrario p en la red. La distancia entre p y el sensor más cercano, $R_{\min}$, es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad (su PDF) viene dada por: $f_{R_{\min}}(x) = \lambda 2\pi x e^{-\lambda \pi x^2}$

Denotando $r_c = \left[\frac{2\pi\lambda\alpha}{(\beta-2)\theta} \right]^{\frac{1}{\beta-2}}$, para un $R_{\min} = r_c$ dado la intensidad conjunta de

todos los sensores en el punto p se puede aproximar considerando un anillo infinitesimal de una anchura dr , cuya circunferencia interior esté a una distancia r del punto p (Figura 2.5).

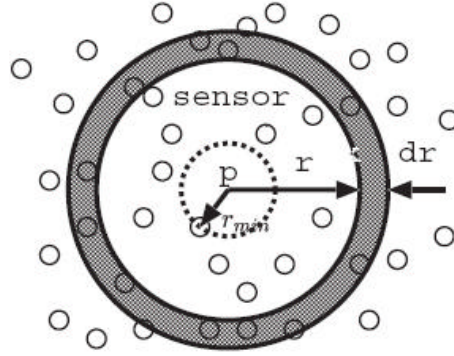


Figura 2.5: Aproximación de la Intensidad Conjunta

El área del anillo es por tanto $2\pi r dr$, lo que implica que el número de sensores localizados dentro del anillo es $\lambda 2\pi r dr$, y cada uno de estos sensores contribuye con $\frac{\alpha}{r^\beta}$ a la intensidad conjunta. Por tanto, la Intensidad conjunta de todos los sensores puede obtenerse integrando las contribuciones de una estructura en anillo desde el radio mínimo r_c hasta el infinito. Por lo que:

$$E[I_p \mid R_{\min} = r_c] = \int_{r_c}^{\infty} \lambda 2\pi r \frac{\alpha}{r^\beta} dr = \frac{2\pi\lambda\alpha}{\beta-2} \frac{1}{r_c^{\beta-2}} = \theta$$

De esta expresión se observa que $E[I_p \mid R_{\min} = r_c]$ es una función decreciente de la mínima distancia r , y por tanto $E[I_p \mid R_{\min} > r_c] < \theta$, de donde, trasladándola a las correspondientes probabilidades, resulta $P(I_p \geq \theta \mid R_{\min} > r_c) < 1$, o equivalentemente, $P(I_p < \theta \mid R_{\min} > r_c) > 0$. Consecuentemente, puesto que aquí existe una probabilidad no nula para $R_{\min} > r_c$, es decir, $P(R_{\min} > r_c) > 0$, entonces existen puntos no cubiertos ($I_p < \theta$) en la red.

Ordenando los índices de los sensores según sus distancias a p (bajo la asunción habitual de $\beta > 2$), y calculando la intensidad conjunta de los n más cercanos en el anterior orden se obtiene, por un proceso de paso al límite, que la Intensidad conjunta I_p es también una función continua de la localización del punto p .

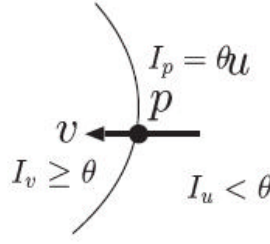


Figura 2.6: Existencia de puntos no cubiertos en la red

Consecuentemente, y puesto que existen puntos no cubiertos en la red, basta considerar el punto no cubierto u y el punto cubierto v (Figura 2.6), y se tendrá por definición que $I_u < \theta$ y $I_v \geq \theta$. Y puesto que I_p es una función continua a lo largo del segmento $(u, v]$ que va de u a v , existe un punto $p \in (u, v]$ tal que $I_p = \theta$. Finalmente, y para coronar el resultado sobre Nodo-cobertura nula, basta con recordar que, dado que $I_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha}{d(s_i, p)^\beta} = \theta$, si cualquier sensor se apaga, un término no negativo desaparecerá en el anterior sumatorio e I_p decrecerá por debajo de θ . Por tanto, ningún sensor puede apagarse sin que se reduzca la región de cobertura, esto es: en este modelo, la Nodo-cobertura $f_n = 0$

C) Detectabilidad

Obtener la Detectabilidad según el Modelo de detección General (P_d^{GM}) es más difícil que en el modelo Booleano. Recordemos que, en dicho modelo, la detectabilidad solamente dependía de la distribución del número de sensores localizados en la zona de detección; y la detectabilidad asintótica estaba directamente relacionada con el filtrado del modelo Booleano de Poisson subyacente. Sin embargo, bajo el modelo de detección general, la región cubierta es un campo aleatorio bidimensional cuya dependencia respecto del proceso estocástico subyacente es más compleja que en el caso anterior. Esto hace que la Detectabilidad bajo el modelo general sea más difícil de computar que con el modelo Booleano. No obstante, se pueden obtener algunos resultados para la detectabilidad asintótica, el más importante de ellos es el siguiente:

Teorema: Existe una densidad crítica λ_c , tal que la detectabilidad asintótica es casi seguramente igual a 1 si la densidad de los sensores está por encima de la crítica:

$$P_d^{GM} = 1 \quad \text{casi seguramente, si } \lambda > \lambda_c.$$

La idea que se sigue para establecer dicho resultado consiste, básicamente, en construir un Modelo Booleano de Poisson cuya región cubierta sea un subconjunto de la región originalmente cubierta en el Modelo General. Por tanto, si no existe ningún camino tal que un objeto pueda cruzar la red sin ser detectado en el modelo Booleano de Poisson construido, dicho camino tampoco existe bajo el Modelo de detección General.

En el Modelo Booleano de Poisson que se construye (según las pautas ya vistas anteriormente), el mínimo rango de detección r_c de los sensores se fija como $r_c = (\alpha/\theta)^{1/\beta}$. Entonces, para un punto p de la región cubierta en dicho modelo, la distancia entre p y su sensor más cercano s_p es menor o igual que r_c , esto es, $d(s_p, p) \leq r_c$, y la Intensidad Conjunta de todos los sensores en p es estrictamente mayor que la contribución del sensor más cercano:

$$I_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha}{d(s_i, p)^\beta} > \frac{\alpha}{d(s_p, p)^\beta} \geq \frac{\alpha}{r_c^\beta} = \theta$$

Con lo cual, aplicando los resultados ya vistos para el modelo Booleano, existe una densidad crítica λ_c , de forma que si la densidad de los sensores es superior a la crítica, un cluster de sensores no acotado *filtra* toda la red y la detectabilidad asintótica es casi seguramente igual a 1. Y como la región cubierta bajo el Modelo General es un superconjunto de la cubierta por el modelo Booleano, la no existencia en éste último modelo de un camino a través del cual un objeto intruso pueda cruzar la red sin ser detectado implica la no existencia de tal camino en el Modelo de detección General. O, equivalentemente

$$P_d^{GM} = 1 \quad \text{casi seguramente, si } \lambda > \lambda_c$$

Por el contrario, cuando la densidad de los sensores está por debajo de la densidad crítica, en el modelo Booleano se demostró que la detectabilidad asintótica es casi con seguridad cero. La consistencia de los resultados obtenidos permite conjeturar que un comportamiento similar se produce bajo el Modelo General, esto es: si la densidad de los

sensores es inferior a alguna densidad crítica, la detectabilidad asintótica del Modelo general es, casi seguramente, cero.

2.4

Conclusiones

Hemos visto tres medidas de cobertura fundamentales de las redes de sensores a gran escala; el Área-cobertura, el Nodo-cobertura y la Detectabilidad. Estas medidas están determinadas por parámetros básicos de la red y tienen importantes implicaciones tanto en la planificación como en el funcionamiento de las redes de sensores. Hemos considerado dos Modelos de detección fundamentales para las redes de sensores: el Modelo Booleano y el Modelo General, ambos ampliamente asumidos y aplicados en la literatura sobre el tema. Para cada modelo de detección, se ha estudiado la cobertura de la red considerando diferentes escenarios bajo los que la red puede ser modelada: así, hemos visto los escenarios determinados por un plano bidimensional infinito, y por una franja bidimensional.

Para una red de sensores aleatoria a gran escala bajo el Modelo Booleano, se han aplicado métodos de geometría estocástica para determinar el Área-cobertura y la Nodo-Cobertura, obteniéndose que ambas medidas están en función de la densidad de los nodos. De hecho, los resultados obtenidos en la simulación para el Nodo-cobertura sugieren que si los sensores no se despliegan con una densidad muy elevada, la fracción de nodos redundantes que se pueden apagar sin reducir el área cubierta es pequeña. También en este caso, se ha obtenido la caracterización analítica de la Detectabilidad de una red de sensores tanto si los intrusos no conocen la localización de los sensores como en caso contrario. En éste último caso (localización conocida de los sensores), para el caso de una franja bidimensional un objeto puede casi con seguridad encontrar un camino que cruce la franja sin ser detectado. Para el caso del plano bidimensional infinito, la detectabilidad de una red de sensores presenta una fase de transición con respecto a la densidad crítica, de forma que si la densidad de los sensores es inferior a la crítica, un objeto intruso puede casi con seguridad encontrar un camino que cruce la red sin ser detectado; sin embargo, si

la densidad de los sensores es superior a la crítica, no existe camino por el que un objeto pueda cruzar la red sin ser detectado.

Para una gran red de sensores aleatoria bajo el Modelo general, se han obtenido resultados analíticos para el Área- cobertura modelizando la Intensidad Conjunta de todos los sensores como un proceso de ruido de Poisson bidimensional. Para el Nodo-cobertura se ha establecido que en este modelo su valor es nulo, esto es, que ningún sensor puede ser eliminado sin que se reduzca la región cubierta. Y en cuanto a la Detectabilidad, su obtención bajo el modelo general es más complejo y difícil que bajo el modelo anterior, sin embargo se ha establecido un resultado que muestra que la Detectabilidad en el modelo General se comporta de modo similar al caso Booleano, ya que presenta una fase de transición con respecto a una determinada densidad crítica: si la densidad de los sensores está por encima (por debajo) de un valor crítico, casi con seguridad no existe camino por el que un intruso pueda cruzar la red sin ser detectado (un objeto puede casi con seguridad encontrar un camino que cruce la red sin ser detectado).

Una vez visto esto, pasaremos a analizar la cobertura desde un punto de vista diferente, estudiando cómo calcular la mejor y la peor cobertura, para lo cual entrarán en juego elementos de Geometría Computacional, como los Diagramas de Voronoi y las Triangulaciones de Delaunay, que veremos a continuación.