

Capítulo 4

***Un enfoque general: El Problema de la
 k -Cobertura en una Red de sensores
inalámbrica***

4.1

El problema de la k -cobertura

1) Objetivos de la k -cobertura

En los capítulos previos se ha visto cómo el concepto de cobertura es crucial en una red de sensores, ya que refleja cómo de bien una zona es controlada o monitorizada por sensores. Por otra parte, también se ha puesto de manifiesto que existen muchas formas de enfocar este problema, según el tipo y la estructura de la red de sensores y según los objetivos que se pretendan.

En este capítulo estudiaremos la cobertura desde un punto de vista más general. Básicamente, dada una red de sensores desplegada en una región (o en un área), el problema trata de determinar si dicha región está suficientemente k -cubierta, en el sentido de que cualquier punto de la misma esté cubierto por al menos k sensores, donde k es una constante prefijada de antemano. Cuando se dice que este planteamiento es más general, se debe a que algunos problemas de cobertura se pueden considerar (bajo ciertas condiciones y teniendo en cuenta las hipótesis y estructura de la red) como casos especiales de éste, para $k = 1$. Las aplicaciones en donde se requieran valores de $k > 1$ pueden encontrarse en situaciones donde la monitorización deba ser muy fuerte (por ejemplo en escenarios militares).

En este capítulo abordaremos el problema de la k -cobertura de una red de sensores, bajo las hipótesis de que el rango de sensibilidad de los sensores sea bien unitario, o no lo sea. El problema ha sido estudiado por *Huang et al.* (2003) los cuales hacen un acercamiento *fronterizo*, esto es, en lugar de determinar la cobertura de cada punto de la zona, lo que intentan es estudiar cómo está cubierto *el perímetro* del rango de sensibilidad de cada sensor. En efecto, ya que si el perímetro de los sensores está suficientemente cubierto, también lo estará toda la región. A partir de los resultados de dicho estudio se obtendrá un algoritmo que resolverá el problema eficientemente en tiempo polinomial.

2) Elementos del problema

Básicamente, la red de sensores está formada por un conjunto de sensores $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ en un región A bidimensional. Cada sensor s_i , $i = 1, \dots, n$, está ubicado en el punto de coordenadas (x_i, y_i) dentro de A , y tiene un rango de sensibilidad de r_i , esto es, el sensor puede detectar o monitorizar cualquier intruso que esté a una distancia inferior o igual a r_i . Entonces:

- Un punto de A se dice cubierto por s_i si está dentro de su rango de sensibilidad r_i , o equivalentemente (usando la distancia euclídea), si está en un disco centrado en s_i y de radio r_i .
- Un punto de A se dice j -cubierto si está dentro del rango de sensibilidad de al menos j sensores.

A continuación se considerarán dos casos en el problema de la k -cobertura (Figura 15):

- **Discos no unitarios (Problema k -NUC):** Dado un número natural k , el problema de la k -Cobertura para discos no unitarios es un problema de decisión cuyo objetivo es determinar si todos los puntos de A están k -cubiertos o no.
- **Discos unitarios (Problema k -UC):** Dado un número natural k , el problema de la k -Cobertura para discos unitarios es un problema de decisión cuyo objetivo es determinar si todos los puntos de A están k -cubiertos o no, bajo la restricción $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$.

A primera vista, el problema de cobertura propuesto parece ser bastante difícil. Una solución primitiva (o de “fuerza bruta”) es examinar todas las sub-regiones producidas por las divisiones e intersecciones de los n discos, y verificar si cada subregión está k -cubierta o no, como se muestra en la Figura 4.1. Pero este tratamiento del problema es computacionalmente costoso, dado que existen un número de $O(n^2)$ subregiones a ser examinadas y, por añadidura, la obtención de tales subregiones también es costoso en

términos computacionales. Por ello, *Huang et al.* (2003) proponen métodos alternativos de resolución para resolver el problema con mayor eficiencia.

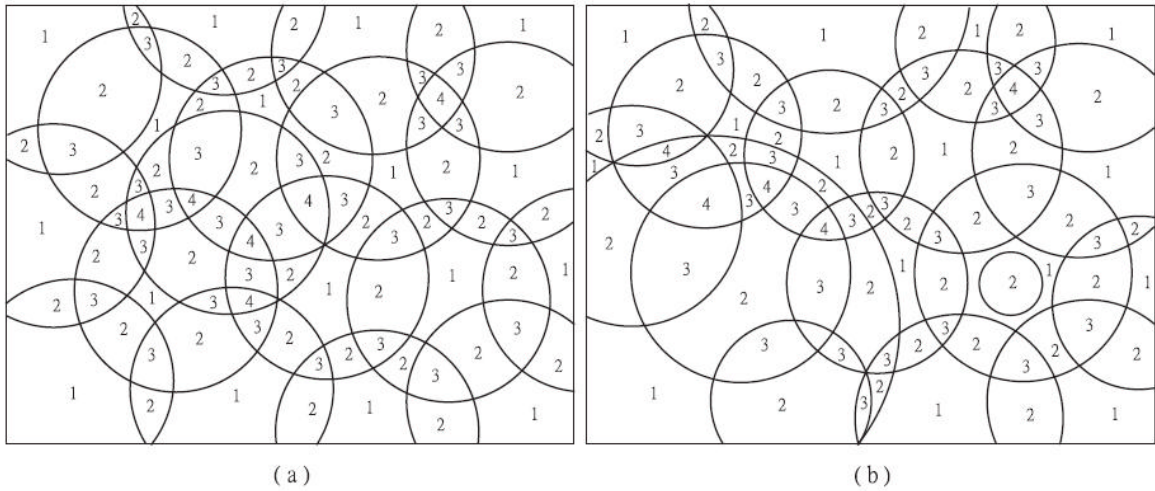


Figura 4.1: Ejemplos de k -Cobertura: (a) con rangos de sensibilidad unitarios y (b) no unitarios. Los números en cada sub-región son la k -cobertura de la misma.

4.2

k -Cobertura para discos unitarios

Aquí abordaremos el caso de que todos los discos tengan el mismo radio común r , para el cual *Huang et al.* (2003) proponen un algoritmo eficiente de resolución de complejidad es $O(nd \log d)$ (donde d es el máximo número de discos que pueden intersectar con uno dado). Como se ha apuntado antes, dicho algoritmo se basa en un procedimiento que trabaja en la periferia del rango de sensibilidad de cada sensor estudiando, para cada sensor, si el perímetro del disco correspondiente está suficientemente cubierto. Previamente se establecerán unas definiciones sobre la geometría de los discos.

- Perímetro-cobertura: Dados dos sensores s_i y s_j , un punto en el perímetro del rango de s_i está *perímetro-cubierto* por s_j si dicho punto está dentro del rango de sensibilidad de s_j .
- k -Perímetro-cobertura: Sea s_i un sensor dado. Diremos que s_i está *k -perímetro-cubierto* si todos los puntos del perímetro de s_i están perímetro-cubiertos por al menos k sensores (distintos del propio s_i). De forma semejante, un segmento del perímetro de s_i está *k -perímetro-cubierto* si todos los puntos del segmento están perímetro-cubiertos por al menos k sensores (distintos del propio sensor s_i).

A continuación se describe un procedimiento de complejidad $O(d \log d)$ para determinar si un determinado sensor está k -perímetro-cubierto, donde d es el número de sensores cuyas zonas de cobertura tienen intersección con la del sensor dado. Para dos sensores s_i y s_j , localizados en puntos de coordenadas (x_i, y_i) y (x_j, y_j) , respectivamente, la distancia euclídea entre ambos está dada por

$$d(s_i, s_j) = \sqrt{|x_i - x_j|^2 + |y_i - y_j|^2}$$

Si $d(s_i, s_j) > 2r$, entonces s_j no contribuye a la cobertura de ningún punto del perímetro de s_i . En caso contrario, el rango (o la amplitud) del perímetro de s_i cubierto por s_j puede calcularse como sigue. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que s_j y s_i están alineados, y que s_j está al oeste de s_i , esto es, $y_i = y_j$, y además $x_i > x_j$, (Figura 4.2 (a)). Puesto que ambos intersectan, el ángulo α del sector interceptado está dado por

$$\alpha = \arccos\left(\frac{d(s_i, s_j)}{2r}\right)$$

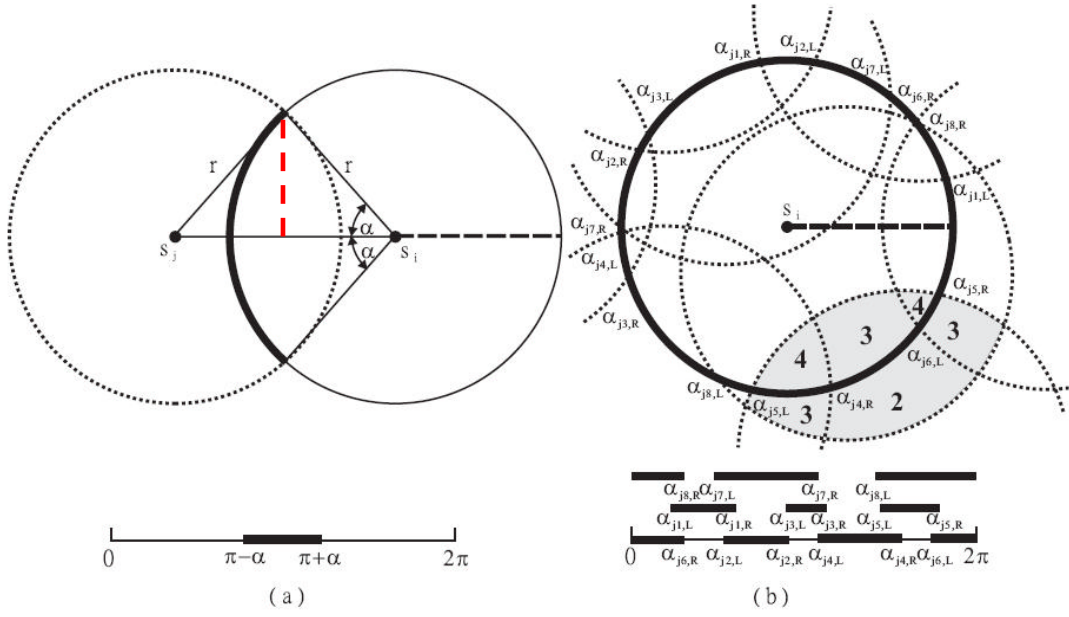


Figura 4.2: (a) Determinación del segmento del perímetro de s_i cubierto por s_j , y
(b) Perímetro de s_i que está perímetro-cubierto

Entonces, el arco de s_i interceptado en el ángulo $[\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ está perímetro-cubierto por s_j . El algoritmo geométrico para determinar el perímetro cubierto de s_i trabaja como sigue:

Algoritmo para calcular la Perímetro-Cobertura de un sensor dado:

1. Para cada sensor s_j tal que $d(s_i, s_j) \leq 2r$, determinar el ángulo α_j correspondiente al arco $[\alpha_{j,L}, \alpha_{j,R}]$ de s_i que está *perímetro-cubierto* por s_j .
2. Para todos los sensores s_j del entorno de s_i tales que $d(s_i, s_j) < 2r$, situar los puntos $\alpha_{j,L}$ y $\alpha_{j,R}$ en el segmento $[0, 2\pi]$, y ordenar crecientemente todos esos puntos en una lista L . Además, etiquetar cada punto como el extremo izquierdo y derecho del correspondiente rango de cobertura.
3. Atravesar el segmento $[0, 2\pi]$ de izquierda a derecha visitando cada elemento de la lista ordenada L , y determinar la perímetro-cobertura de s_i .

En la Figura 4.2 (b) se muestra geoméricamente el procedimiento descrito. Para evaluar la complejidad computacional, si d es el número máximo de sensores que están en el entorno de uno dado (con $d \leq n$), la complejidad del paso 1 es $O(d)$ (ya que se calcula un ángulo por cada sensor que intercepta con el dado), y la complejidad del paso 2 es $O(d \log d)$, ya que hay que ordenar la lista L (que tiene $2d$ elementos como mucho). Por último como dicha lista divide al segmento $[0, 2\pi]$ en un máximo de $2d + 1$ subsegmentos, la complejidad del paso 3 es $O(d)$. Consecuentemente, la complejidad del paso 2 domina a los demás, y es por tanto la complejidad final del algoritmo: $O(d \log d)$.

El anterior algoritmo permite determinar la cobertura de cada segmento del perímetro de s_i , informándonos además de *cuántos* sensores (excluido el propio s_i) cubren cada segmento del perímetro. Este resultado, junto con las propiedades de la *Perímetro-cobertura* de los sensores, permitirán establecer las propiedades para la k -cobertura de la red.

- Supongamos que no existen dos sensores superpuestos (en la misma localización), y consideremos, para un sensor s_i , cualquier segmento de su perímetro que divida en dos a alguna sub-región (del conjunto de subregiones producidas por las intersecciones de s_i con los sensores de su entorno, ver Figura 4.3). Si este segmento está k -perímetro-cubierto, la sub-región que está fuera del rango de sensibilidad de s_i está k -cubierta, y la subregión interior al rango de sensibilidad de s_i está $(k+1)$ -cubierta

El fundamento geométrico de esta propiedad se puede entender mejor en la Figura 4.3.

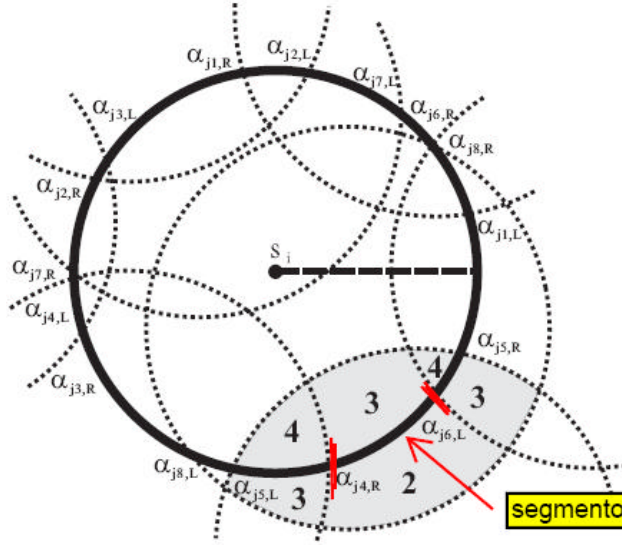


Figura 4.3: Segmento particionando en dos una sub-región: la zona exterior de dicha partición está k -cubierta y la interior está $(k+1)$ -cubierta.

- Supongamos que no existen dos sensores superpuestos. La región A de la red de sensores está k -cubierta si y sólo si cada sensor de la red está k -perímetro cubierto.

Claramente, este resultado es consecuencia de los anteriores. Consecuentemente, aplicando el algoritmo a cada uno de los sensores se podrá resolver el problema de la k -cobertura, y determinar si la región A está (o no) k -cubierta por la red, con una complejidad total de $O(nd \log d)$.

Finalmente hay que observar dos casos extremos que pueden suceder: El primero consiste en que existan varios sensores superpuestos (ubicados en la misma localización). En tal caso, el algoritmo no funciona. Sin embargo, y dado que en la mayoría de las aplicaciones se persigue mejorar la cobertura de áreas insuficientemente cubiertas, se puede solventar esta situación ignorando uno de los sensores coincidentes. El otro caso extremo aparece cuando el rango de sensibilidad de algunos sensores excede la región a cubrir A . Esta situación se puede resolver de forma sencilla sin más que asignar a los segmentos situados en el exterior de A una perímetro-cobertura de ∞ .

4.3

k-Cobertura para discos no unitarios

En este caso veremos cómo aplicar el algoritmo anterior para resolver el problema, sin más que introducir las modificaciones que este caso requiere. Como antes, partimos del conjunto de sensores $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ en una región bidimensional A, estando cada sensor s_i ubicado en el punto de coordenadas (x_i, y_i) , y con diferentes rangos de sensibilidad r_i , $i = 1, \dots, n$ (al menos dos no son iguales).

Primero se definirá cómo un sensor s_i está perímetro-cubierto por otro sensor s_j , esto es, cómo el perímetro del rango de sensibilidad de un sensor está cubierto por los demás. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que s_j está situado al oeste de s_i .

Consideraremos dos casos (Figura 4.4):

Caso 1: El sensor s_j está fuera del rango de s_i , esto es: $d(s_i, s_j) > r_i$. Entonces:

1. Si $r_j < d(s_i, s_j) - r_i$, entonces s_i no está perímetro-cubierto por s_j .
2. Si $d(s_i, s_j) - r_i \leq r_j \leq d(s_i, s_j) + r_i$, entonces el arco de s_i de amplitud angular $[\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ está perímetro-cubierto por s_j , donde α se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$r_j^2 = r_i^2 + d(s_i, s_j)^2 - 2r_i \cdot d(s_i, s_j) \cdot \cos \alpha$$

3. Si $r_j > d(s_i, s_j) + r_i$, entonces el rango completo $[0, 2\pi]$ está perímetro-cubierto por s_j .

Caso 2: El s_j está dentro del rango de s_i , esto es: $d(s_i, s_j) \leq r_i$. En tal caso:

1. Si $r_j < r_i - d(s_i, s_j)$, entonces s_i no está perímetro-cubierto por s_j .
2. Si $r_i - d(s_i, s_j) \leq r_j \leq r_i + d(s_i, s_j)$, entonces el arco de s_i de amplitud angular $[\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ está perímetro-cubierto por s_j , y el ángulo α se puede obtener de la misma forma que antes.

3. Si $r_j > d(s_i, s_j) + r_i$, entonces todo el rango $[0, 2\pi]$ de s_i está perímetro-cubierto por s_j .

Todos estos casos están ilustrados en la siguiente figura:

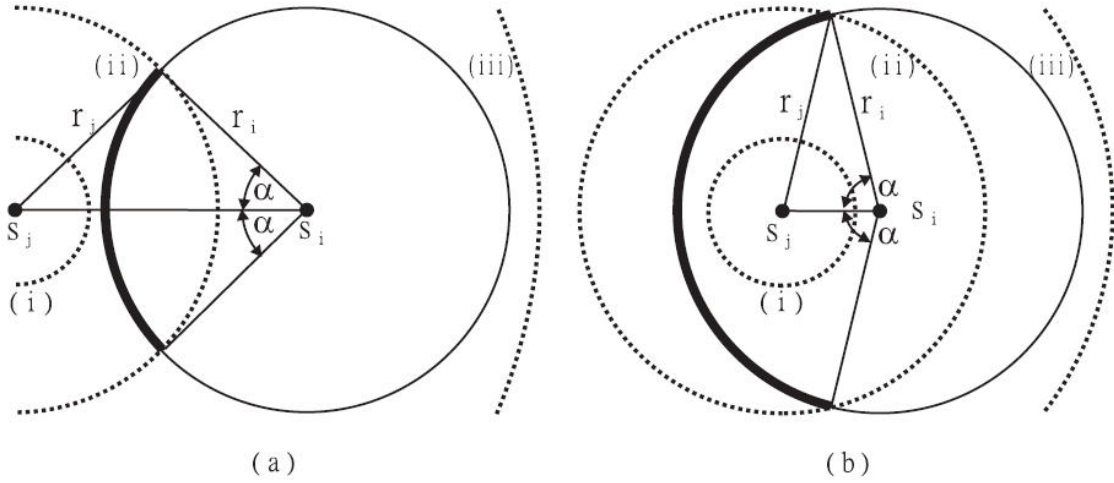


Figura 4.4: Sensores con diferentes rangos de sensibilidad: (a) s_j está fuera del rango de s_i , y (b) s_j está dentro del rango de s_i .

Teniendo en cuenta toda ésta clasificación, la perímetro-cobertura de un sensor se puede calcular mediante el algoritmo anterior. Consecuentemente, el problema de la k -cobertura con discos no unitarios también puede resolverse con complejidad $O(nd \log d)$, con la salvedad de que hay que redefinir los parámetros y entornos de cada sensor.

4.4

Algunas aplicaciones del Problema k -Cobertura

Aunque el problema aquí tratado se ha formulado como un problema de decisión, puede extenderse de varias formas según la situación a la que se aplique. Aquí se sugieren algunas de tales aplicaciones y/o extensiones del problema:

- **Descubrimiento de áreas insuficientemente cubiertas.** Supongamos para ello que existe un controlador central de la red, que transmite el valor deseado de k a todos los sensores. Cada sensor puede entonces comunicar con los sensores de su entorno y determinar qué segmentos de su perímetro están por debajo de la k -perímetro-cobertura. Tales resultados son transmitidos a la central que, con toda la información recibida, puede determinar qué áreas o sub-regiones están por debajo de la k -cobertura deseada. Claro está que de aquí surge otro problema (variante del anterior): ¿Cómo se pueden “parchear” tales zonas insuficientemente cubiertas con el menor número posible de sensores extra? Este problema está todavía en proceso de investigación, aunque existen algunos trabajos que abordan planteamientos alternativos. Entre éstos últimos cabe citar el artículo de *Yang et al.* (2005), en donde se aproxima un problema de cobertura de área mediante un problema de cobertura de nodos, y sobre este último modelo los autores proponen varios problemas orientados a calcular el mínimo conjunto de sensores que garantice la k -cobertura de toda la red.
- **Ahorro de potencia en redes de sensores.** Contrariamente al caso anterior, orientado a detectar insuficiente cobertura, puede suceder que una red está *sobrecubierta* por demasiados sensores en ciertas zonas. Esta cuestión ha sido abordada bajo la óptica de los sensores redundantes, que pueden ser apagados para ahorrar energía sin que la cobertura disminuya. Sin embargo, el ahorro de energía se puede enfocar de una forma más general desde la k -cobertura, de la siguiente

manera: Primero, hay que identificar a los sensores que pueden ser apagados, llamados *candidatos*. Un sensor s_i será un candidato si todos los sensores de su entorno siguen k -cubiertos aunque s_i sea apagado. Entonces, para identificar a s_i como candidato, basta con que s_i pueda solicitar a cada uno de los sensores de su entorno que reevalúen su perímetro cobertura “saltándose” a s_i , y que comprueben si siguen k -cubiertos. Si las respuestas de todos los sensores del entorno son positivas, entonces s_i es candidato. Después de identificar a todos los candidatos, se trata de planificar cómo se desactivan dichos candidatos y por cuánto tiempo.

- **Áreas de especial importancia (*Hot Spots*, o zonas calientes).** Son zonas, o subregiones, que por su importancia deben ser cubiertas por más sensores que el resto. El algoritmo que se ha propuesto puede aplicarse a determinar si una zona candente está k -cubierta o no: una zona candente está k -cubierta si y sólo si todos los segmentos de perímetro situados dentro de dicha zona están k -perímetro-cubiertos. En la Figura 4.5 se visualiza un ejemplo de esta aplicación.

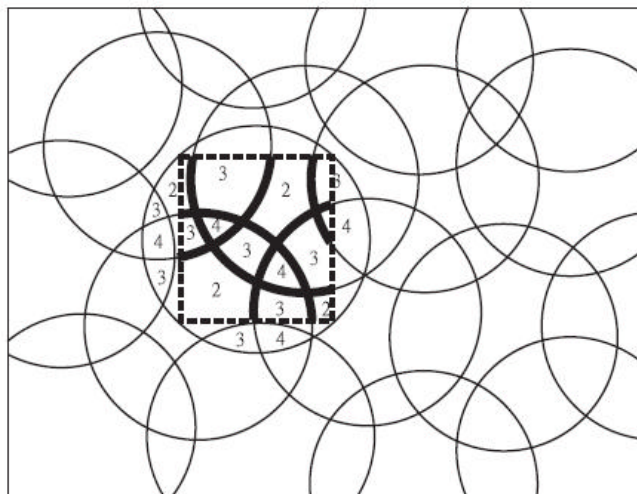


Figura 4.5: Zona Candente (en el rectángulo), y verificación de 2-cobertura.

- **Extensión a regiones de sensibilidad irregular.** La región de sensibilidad de un sensor no es necesariamente un círculo, de hecho en muchas aplicaciones, la región de sensibilidad de un sensor depende de su localización, del entorno y condiciones (físicas, geográficas, temporales, etc. en las que estén operando los sensores de la red). Los resultados de la k -cobertura se pueden aplicar a regiones de sensibilidad irregular, con la condición de que cada una de tales regiones se pueda determinar con precisión. Una vez hecho esto, hay que abordar el problema de cómo determinar la perímetro-cobertura para dos sensores cuyas regiones de sensibilidad son irregulares. Lo que se sugiere es una aproximación poligonal, tal y como muestra la Figura 4.6.

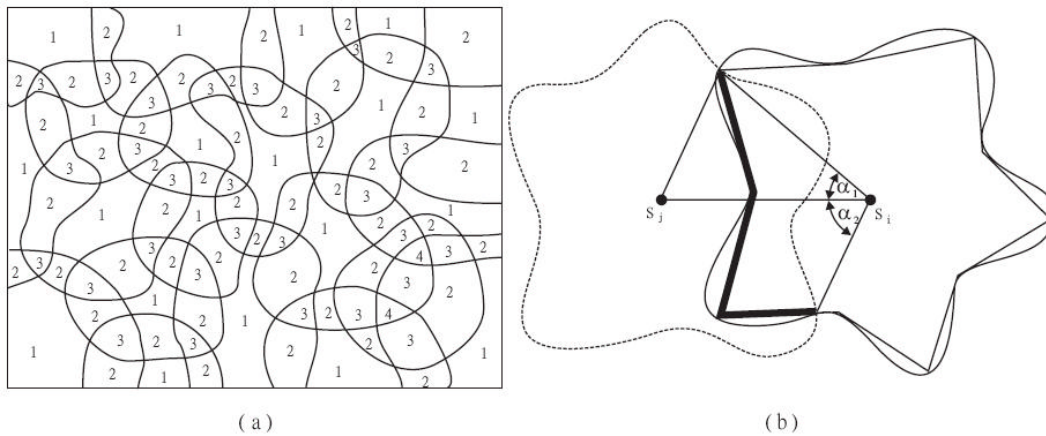


Figura 4.6: (a) - Cobertura con regiones irregulares y (b) aproximación poligonal de la región de sensibilidad de un sensor.