Apéndice B

El Filtro de Kalman

B.1. Introducción teórica del filtro de Kalman

El Filtro de Kalman es una potente herramienta matemática que juega un importante papel cuando se incluyen medidas del mundo real en el sistema con el que se trabaja. Fue inventado por Rudolph Emil Kalman a finales de la década de 1950, con la finalidad de filtrar y predecir sistemas lineales. En este apéndice tan sólo se dará una introducción al KF y al EKF, pudiéndose encontrar más información en [12], [24], [22].

Básicamente es un conjunto de ecuaciones matemáticas que implementan un estimador óptimo del tipo predictor-corrector. Procesa todas las medidas disponibles, sin importar su precisión, para estimar el valor actual de las variables de interés. Esto es posible gracias a:

a) el conocimiento del sistema y a dispositivos dinámicos de medida,

b) a la descripción estadística de los ruidos del sistema, errores de medida e incertidumbre en los modelos dinámicos,

c) y a cualquier información disponible acerca de las variables de interés.

El KF es un algoritmo de procesamiento de datos, y no es más que un programa de ordenador. Por ello, tendrá que trabajar sobre medidas discretas en vez de trabajar en tiempo

	Algoritmo KF$(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{P}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{z}_t)$**:**
	Etapa de Predicción:
1.-	Proyección del estado hacia adelante.
	$\overline{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t$
2.-	Proyección de la covarianza del error hacia adelante.
	$\overline{\mathbf{P}}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t$
	Etapa de Actualización:
3.-	Cómputo de la ganancia de Kalman.
	$\mathbf{K}_t = \overline{\mathbf{P}}_t \mathbf{C}_t^T (\mathbf{C}_t \overline{\mathbf{P}}_t \mathbf{C}_t^T + \mathbf{Q}_t)^{-1}$
4.-	Actualización del estado con la medida $(\mathbf{z}_t)$
	$\mathbf{x}_t = \overline{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t(\mathbf{z}_t - \mathbf{C}_t \overline{\mathbf{x}}_t)$
5.-	Actualización de la covarianza del error
	$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{C}_t) \overline{\mathbf{P}}_t$
6.-	Devuelve $\mathbf{x}_t, \mathbf{P}_t$

Tabla B.1: Algoritmo del KF

continuo. Además, al ser un algoritmo recursivo, no requiere ir almacenando todos los datos previos para procesarlos de nuevo cada vez que se tome una nueva medida.

B.2. El algoritmo del Filtro de Kalman

El KF representa una creencia o confianza en el estado $\mathbf{x}_t$ en el tiempo t que viene dada por la media, $\mathbf{x}_t$ y la covarianza, $\mathbf{P}_t$. La entrada que recibe el KF es la creencia en el tiempo $t-1$, representada por $\mathbf{x}_{t-1}$ y $\mathbf{P}_{t-1}$. Para actualizar dicha creencia, el KF requiere también las señales de control $(\mathbf{u}_t)$ y las observaciones del entorno que proporcionan los sensores $(\mathbf{z}_t)$. La salida del KF sería la creencia en el instante de tiempo t, representada por $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{P}_t$.

En la tabla B.1 se pueden ver los pasos de que consta el algoritmo del KF.

- Etapa de predicción, en la que se proyecta la creencia en el instante t actual, a través de la odometría. Tan sólo es la adición al desplazamiento y al giro del robot del instante $t-1$ del desplazamiento y el giro del que se han producido desde el instante $t-1$ al t.

- Etapa de actualización, en la que se consideran las características reobservadas. Gracias a la estimación de la posición proporcionada por la etapa de Predicción, es posible estimar dónde debería estar la característica, permitiendo corregir la posición del robot.

- Adición de nuevas características al mapa. Aunque este paso no se vea reflejado en la tabla B.1, es necesario añadir al mapa las nuevas características detectadas, para poder reobservarla más adelante. Esto se puede llevar a cabo usando información acerca de la posición actual y añadiendo información sobre la relación entre las nuevas y las viejas características.

A continuación se definen las matrices que aparecen en dicha tabla B.1.

- $\mathbf{A}_t$: Matriz n x n que relaciona el estado en el instante $t-1$ con el estado en el instante t, en ausencia de señales de control.

- $\mathbf{B}_t$: Matriz n x l que relaciona las señales de control, opcionales, con el estado actual.

- $\mathbf{R}_t$: Matriz n x n que representa a la covarianza del ruido del proceso.

- $\mathbf{C}_t$: Matriz m x n que relaciona el estado actual con las observaciones del entorno.

- $\mathbf{Q}_t$: Matriz n x n que representa a la covarianza del ruido de las observaciones.

- $\mathbf{K}_t$: Matriz n x m que representa a la ganancia de Kalman. La ganancia de Kalman indica la confianza en las características observadas, empleando la incertidumbre de las mismas junto con una medida de la calidad de los datos proporcionados por el láser y por la odometría. Si la odometría es buena y los datos que suministra el láser no lo son tanto, tendrá más peso la odometría que las observaciones, originando un valor bajo de la ganancia de Kalman. Si se diera la situación contraria, la ganancia de Kalman sería elevada, y tendría más peso las observaciones suministradas por el láser.

	Algoritmo EKF$(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{P}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{z}_t)$**:**
	Etapa de Predicción:
1.-	Proyección del estado hacia adelante.
	$\overline{\mathbf{x}}_t = g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})$
2.-	Proyección de la covarianza del error hacia adelante.
	$\overline{\mathbf{P}}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{G}_t^T + \mathbf{R}_t$
	Etapa de Actualización:
3.-	Cómputo de la ganancia de Kalman.
	$\mathbf{K}_t = \overline{\mathbf{P}}_t \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \overline{\mathbf{P}}_t \mathbf{H}_t^T + \mathbf{Q}_t)^{-1}$
4.-	Actualización del estado con la medida $(\mathbf{z}_t)$
	$\mathbf{x}_t = \overline{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t(\mathbf{z}_t - h(\overline{\mathbf{x}}_t))$
5.-	Actualización de la covarianza del error
	$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \overline{\mathbf{P}}_t$
6.-	Devuelve $\mathbf{x}_t, \mathbf{P}_t$

Tabla B.2: Algoritmo del EKF

Como se deduce del primer paso de la tabla B.1 el KF se puede utilizar para procesos que se rijan por una ecuación en diferencias lineal. Sin embargo, bien podría ocurrir que dicha ecuación no fuera lineal. El KF no sería entonces válido, por lo que sería necesario usar el Filtro Extendido de Kalman (EKF), que se verá a continuación.

B.3. El algoritmo del Filtro Extendido de Kalman

Como ya se comentó en el apartado anterior, el EKF se emplea para procesos que vengan descritos por una ecuación en diferencias no lineal. El EKF no es más que un KF que se ha linealizado en torno a la media y covarianza actuales y cuyo algoritmo se muestra en la tabla B.2.

Se puede observar como el algoritmo consta de los mismos pasos que en el caso del KF.

Sin embargo, varían algunas ecuaciones y algunas matrices, que se definirán a continuación. Además, tal y como puede verse en el primer paso de la tabla B.2, la ecuación en diferencias que rige el comportamiento del sistema, es no lineal.

- $\mathbf{G}_t$: Jacobiano del modelo de predicción, de dimensiones n x n y que corresponde a las matrices $\mathbf{A}_t$ y $\mathbf{B}_t$ del KF.

$$\mathbf{G}_t = \frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})}{\partial \mathbf{x}_{t-1}} \tag{B.1}$$

- $\mathbf{R}_t$: Matriz n x n que representa a la covarianza del ruido del proceso.

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{M}_t \mathbf{V}_t \mathbf{M}_t^T \tag{B.2}$$

- $\mathbf{M}_t$: Jacobiano de dimensiones n x l.

$$\mathbf{M}_t = \frac{\partial g(\mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1})}{\partial \mathbf{u}_t} \tag{B.3}$$

- $\mathbf{V}_t$: Matriz de covarianzas de ruido del espacio de control, con dimensiones l x l.

- $\mathbf{H}_t$: Jacobiano del modelo de medida, de dimensiones m x n y que corresponde a la matriz $\mathbf{C}_t$ del KF.

$$\mathbf{H}_t = \frac{\partial h(\overline{\mathbf{x}}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \tag{B.4}$$

- $\mathbf{Q}_t$: Matriz n x n que representa a la covarianza del ruido de las observaciones.

- $\mathbf{K}_t$: Matriz n x m que representa a la ganancia de Kalman.