

# Capítulo 2: Teoría Electromagnética

---

Nuestro estudio sobre la puesta a tierra, se centra en el flujo de corriente en variedad de conductores, como cables, PCBs, o antenas. Las ecuaciones de Maxwell nos ayudarán a entender con precisión el comportamiento de las corrientes de tierra en esas estructuras conductoras.

## 1 Introducción

A bajas frecuencias, las dimensiones de los circuitos son diminutas comparadas con la longitud de onda, por lo que podemos ignorar el retardo de fase de la señal, y diseñar dispositivos usando las reglas de los circuitos de parámetros concentrados.

Nosotros nos vamos a centrar en los circuitos de microondas, donde las dimensiones de los circuitos son comparables a la longitud de onda. Estos compondrán los llamados circuitos de parámetros distribuidos.

## 2 Electrostática y Tierra en Continua

La electrostática es un caso especial de la teoría electromagnética, en el que el campo eléctrico es estático, y las únicas fuentes son cargas en reposo.

### 2.1 Postulado de Coulomb y Campo Electrostático

El postulado de Coulomb formula que la fuerza entre dos partículas cargadas, estacionarias, es proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de su separación. La fuerza ejercida por la partícula 2 sobre la partícula 1 viene dada por:

$$F_{12} \approx \frac{1_{R_{12}} q_1 q_2}{R_{12}^2}$$

Donde  $q_1$  y  $q_2$  son las cargas de las partículas,  $R_{12}$  es la distancia entre sus centros, y  $1_{R_{12}}$  es un vector unitario apuntando en dirección de la fuerza ejercida en la partícula 1 por la partícula 2.

La intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  se define como la fuerza por unidad de carga que una carga experimenta cuando se coloca en una región en la que está sujeta a interactuar con otras partículas cargadas.  $\mathbf{E}$  es un vector paralelo a  $\mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , y  $q$  es la carga de la partícula.

Dado el postulado de Coulomb, podemos mostrar las dos ecuaciones que describen las características del campo electrostático:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Donde  $\rho$  es la densidad eléctrica volumétrica de carga.

De esta última ecuación podemos deducir que el campo electrostático no es rotacional,

teniendo como solución:

$$E = -\nabla\Phi$$

Donde  $\Phi$  es el potencial electrostático, medido en voltios, de una carga positiva colocada en el punto  $(x,y,z)$ . Para una distribución de carga volumétrica arbitraria,  $\rho(x',y',z')$  el potencial vendrá dado por:

$$\Phi(x,y,z) = \iiint \frac{\rho(x',y',z')}{4\pi\epsilon_0(r-r')} dx' dy' dz'$$

## 2.2 Conductores

Un conductor es un tipo de material. En los conductores, los electrones en la banda de valencia (la banda más externa del átomo), pueden saltar libremente migrando fácilmente a otros átomos. En los metales hay muchos de esos electrones libres. Por encima de la temperatura cero absoluta, estos electrones pueden moverse en direcciones aleatorias, siendo el flujo neto de electrones igual a cero. Si colocamos un grupo de cargas en el conductor, los electrones libres en el conductor ejercerán una fuerza sobre este grupo, forzándolos a ir separadamente hacia la superficie del conductor. Los electrones se redistribuirán rápidamente, por lo que la carga neta será cero. Por consecuencia, como la carga neta es cero, decimos que el campo eléctrico dentro del conductor es cero.

En la superficie de un conductor, la componente tangencial del campo eléctrico debe ser cero. Por ello, en equilibrio, la superficie de un conductor es una superficie equipotencial.

Además, se debe dar la siguiente condición de borde en la superficie para la densidad de flujo normal electrostático en un conductor:

$$D_n = \epsilon E_n = \rho_s$$

Donde  $D_n$  es la componente normal de la densidad de flujo eléctrico, y  $\rho_s$  es la

densidad de carga superficial en el conductor.

Cuando aplicamos un campo eléctrico a un conductor, sobre el movimiento aleatorio de los electrones existe una velocidad de arrastre en dirección opuesta al campo aplicado, definida como sigue a continuación:

$$v = \mu E$$

Donde  $\mu$  es la movilidad de los electrones (partículas arrastradas), que es una función de las propiedades del material y de la magnitud del campo aplicado. Como las cargas se mueven, tendremos una corriente de conducción. La densidad de corriente transversal es:

$$J = qv$$

Podemos definir la conductividad estática como:

$$J = \sigma E \quad \rightarrow \quad \sigma = qv/E = q\mu$$

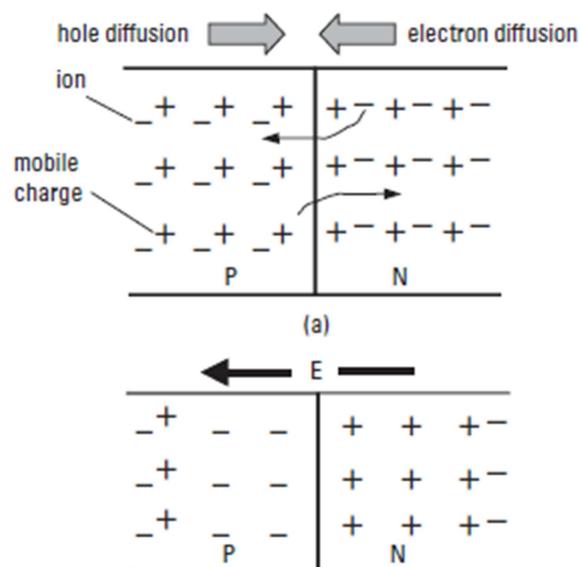
Un material es clasificado como conductor, semiconductor, o aislante, dependiendo de su valor para la conductividad.

### 2.3 Semiconductores y Dieléctricos

Los aislantes o dieléctricos tienen muy baja conductividad, ya que los electrones de su capa de valencia están unidos muy fuertemente al núcleo, por lo que solo estarán disponibles para la conducción bajo muy fuertes campos aplicados. En un aislante perfecto,  $\sigma = 0$ , por lo que la corriente de conducción no podrá fluir, sin importar cómo sea de fuerte el campo aplicado. Sin embargo esto es ideal, y siempre la conductividad será distinta de cero, aunque podría ser cercana. Por ello, cuando suficiente carga con polaridad opuesta se acumula en el aislante, podría producirse un arco eléctrico. Se dará una descarga electrostática (ESD) cuando un objeto acumula suficiente carga con suficiente potencial para producir un arco a través del aire y otro

objeto. La propia puesta a tierra en baja frecuencia previene los posibles daños causados por ESD.

Los semiconductores poseen ciertas cargas libres en la capa de valencia, aunque la cantidad es pequeña en comparación con los conductores. La unión *pn* que observamos en la siguiente figura es el bloque usado en la construcción de muchos dispositivos de microondas. El material tipo p posee una alta concentración de cargas positivas (huecos), y el material tipo n tiene alta concentración de cargas negativas (electrones). Una corriente de difusión, provocada por la diferencia de concentración de partículas, mueve a los electrones a través de la unión al material tipo p, moviéndose los huecos a su vez a la parte n. Una vez movidas las partículas, y balanceadas las cargas electrostáticas, las cargas dejan de moverse, dejando un potencial electrostático.



**Ilustración 1: Unión PN**

Por ello, y como importante conclusión, no puede mantenerse una corriente estable en la misma dirección como en un circuito cerrado, si aplicamos un campo eléctrico estático conservativo. Las fuentes de campo no conservativas, como las baterías, o los generadores eléctricos, podrían mantener un flujo de corriente unidireccional en el circuito.

## 2.4 La Tierra en Continua (DC)

La tierra puede ser definida como fuente o sumidero de las líneas de campo, y a menudo se elige como potencial de 0 V en un sistema. Veamos tres casos, con las siguientes figuras:

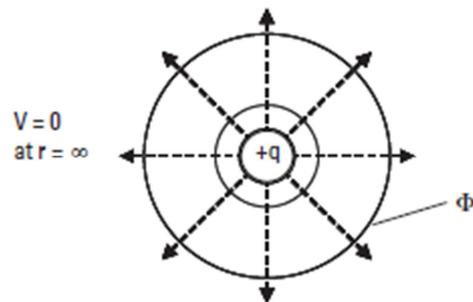


Ilustración 2: Tierra en el Infinito para una Partícula

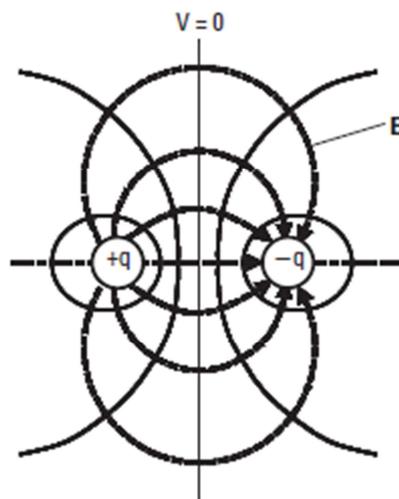
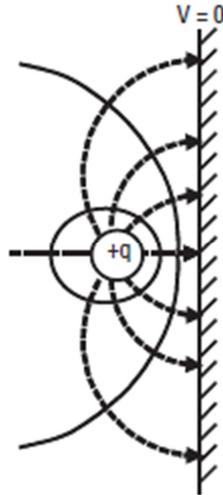


Ilustración 3: Tierra para un dipolo



**Ilustración 4: Tierra para una Partícula Cercana a un Plano de Conductor Perfecto**

En la figura 9, las líneas de campo realmente no acaban en otra carga, por lo que la tierra estará a una distancia infinita de la partícula, donde el potencial decrecerá hasta 0 V.

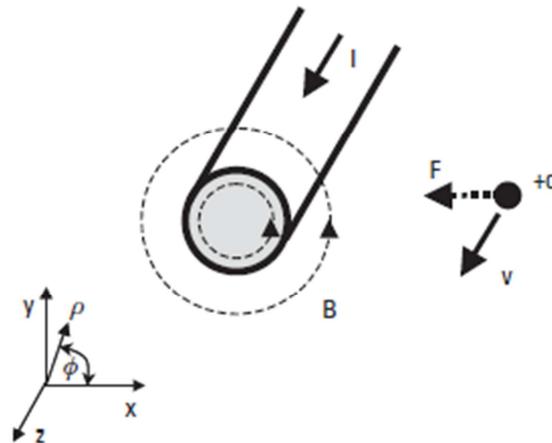
En la figura 10, podemos observar un dipolo formado por dos cargas de diferente polaridad, con potencial 0 V justo en la mitad de ambas. Por ello, en este caso, se podría elegir como tierra cualquiera de las dos cargas de forma arbitraria. Normalmente elegimos la carga negativa.

Si eliminamos la carga negativa y la reemplazamos por un conductor perfecto, como en la figura 11, los electrones libres del conductor se moverán para eliminar todo el campo electrostático tangencial, terminando todas las líneas de campo perpendiculares a la superficie del conductor. Dada esta situación, dentro del conductor tendremos un potencial nulo, por lo que el conductor puede ser denominado como la tierra.

### 3 Magnetostática

La magnetostática abarca la teoría de las cargas en movimiento a una tasa estable. Este movimiento genera cierta fuerza a una distancia de naturaleza magnética. El equivalente al postulado de Coulomb en magnetostática, es:

Donde  $q$  es la carga,  $V$  su velocidad, y  $B$  es la densidad de flujo magnético. El campo magnético de una distribución constante de corriente es solenoidal, enrollando al cable como podemos ver en la siguiente figura:



**Ilustración 5: Campo Solenoidal**

En otras palabras, el campo magnético no se origina, ni termina en las cargas que fluyen a través del cable. Es más el campo es perpendicular al flujo de corriente. Podemos describir matemáticamente los fenómenos magnetostáticos con las siguientes ecuaciones:

La primera de ellas, nos dice que las líneas de flujo magnético no terminan en las

fuentes eléctricas; y la segunda la podemos interpretar como que las líneas de campo magnético se enrollan alrededor del elemento de corriente  $J$ , donde  $J$  es la densidad de corriente transversal. La ecuación de continuidad de carga viene dada por la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot J = 0$$

Podemos establecer una condición de borde para la intensidad de campo magnético  $H$ , justo en la parte externa de la superficie de un conductor perfecto:

$$n \times H = J$$

Donde  $n$  es un vector normal a la superficie del conductor.

La inductancia es una importante característica del conductor que proporciona la tierra, por ello vamos a tratar de averiguar cuál es su valor. El flujo total magnético que pasa a través de un conductor por un área transversal  $S$  viene dado por:

$$\Phi = \iint B \cdot dS$$

Como  $B$  es proporcional a  $J$ , el flujo  $\Phi$  debe ser proporcional a  $J$ . El factor de proporcionalidad es llamado *auto-inductancia* del cable:

$$\Phi = LJ \quad \rightarrow \quad L = \Phi/J, \text{ medida en henrios (H).}$$

## 4 Electromagnetismo

La teoría de campos estática es suficiente para explicar el comportamiento de los circuitos de parámetros concentrados en baja frecuencia y en alta frecuencia, pero de estructuras eléctricamente cortas. Sin embargo en cuanto subimos más la frecuencia esta teoría deja de ser útil para nuestros objetivos.

Una vez que el campo eléctrico y magnético varían con el tiempo, se acoplan entre sí: el campo eléctrico variable produce un campo magnético variable y viceversa. Mientras que los campos electrostáticos lo único que pueden hacer es almacenar energía, los campos electromagnéticos pueden transferir energía a través de la distancia gracias al fenómeno de radiación.

### 4.1 Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times E(x, y, z, t) = \frac{\partial B(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times H(x, y, z, t) = J(x, y, z, t) + \frac{\partial D(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B(x, y, z, t) = 0$$

$$\nabla \cdot D(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t)$$

Donde E es la intensidad de campo eléctrico en voltios/metros, H es la intensidad de campo magnético en amperios/metros, B es la densidad de flujo magnético en Teslas, D es la densidad de flujo eléctrico en coulombios/metros, J es la densidad de corriente eléctrica en *amperios/metros<sup>2</sup>*, y  $\rho$  es la densidad de carga volumétrica medida en *coulombios/metros<sup>3</sup>*.

A partir de estas ecuaciones podemos derivar la ecuación general de continuidad de carga:

$$\nabla \cdot J(x, y, z, t) = -\frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t}$$

El comportamiento del campo electromagnético depende del material en el que exista. El comportamiento en el aire puede ser aproximado al del vacío. En otros materiales existen partículas que interactúan modificando el campo electromagnético. Para ello tenemos las relaciones constitutivas:

$$D(x, y, z, t) = \epsilon E(x, y, z, t)$$

$$B(x, y, z, t) = \mu H(x, y, z, t)$$

$$J(x, y, z, t) = \sigma E(x, y, z, t)$$

Podemos asumir que los campos tienen una dependencia con el tiempo sinusoidal. Es más, podemos asumir que la dependencia con el tiempo y con el espacio de los campos, se pueden separar en dos funciones, una del tiempo, y otra del espacio. Por ello podemos escribir el campo eléctrico como  $E(x, y, z, t) = \Re\{E(x, y, z)e^{j\omega t}\}$ , y de manera similar para los otros campos. Dada esta situación podemos transformar las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia:

$$\nabla \times E(x, y, z) = -j\omega B(x, y, z)$$

$$\nabla \times H(x, y, z) = J(x, y, z) + j\omega D(x, y, z)$$

$$\nabla \cdot B(x, y, z) = 0$$

$$\nabla \cdot D(x, y, z) = \rho(x, y, z)$$

Manipulando las anteriores ecuaciones convenientemente podemos llegar a una igualdad que nos permite ver que el campo electromagnético es una onda, dado que cumple la ecuación de ondas:

$$\nabla \times \nabla \times E = -j\omega \mu J + \omega^2 \mu \epsilon E$$

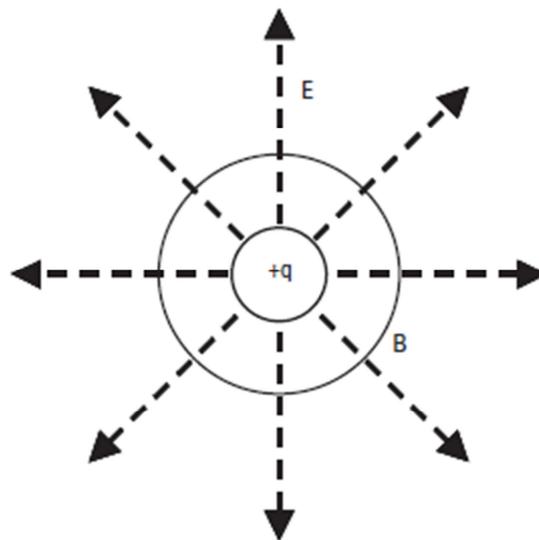
Las ondas electromagnéticas transfieren energía. El vector de Poynting nos dará el flujo instantáneo de energía por unidad de superficie en un punto del espacio:

en wátios/

Dicho vector de Poynting representa que la energía es transportada por el campo electromagnético en dirección perpendicular al plano del campo.

## 4.2 La Tierra a Frecuencias de RF

Retornando a que la tierra es bien fuente, o bien sumidero de corrientes incluso con la polaridad de la carga continuamente cambiando, la tierra estará colocada en el infinito para la siguiente figura:



**Ilustración 6: Carga Única con Tierra en Infinito**

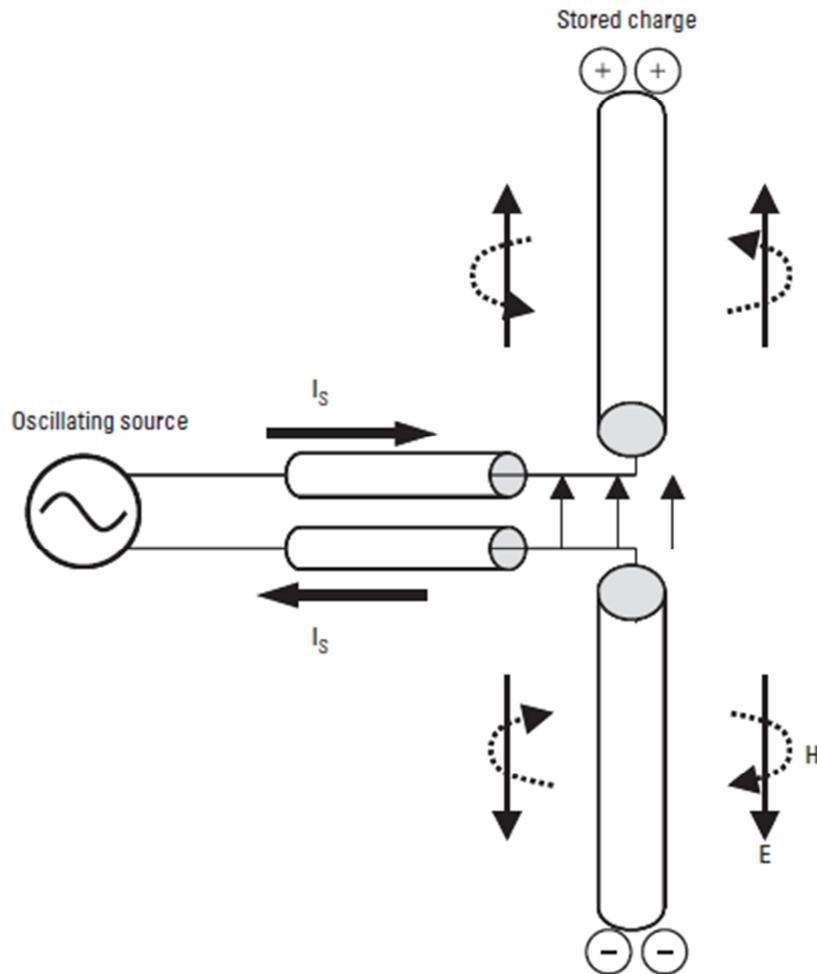
De igual manera, la tierra es una referencia de potencial en circuitos electromagnéticos, que debe incluir conductores donde terminen o se originen las líneas de campo.

## 5 Antenas y Radiación Electromagnética

La radiación es la emisión de energía en forma de ondas electromagnéticas. El mecanismo físico por el que se produce la radiación es por la aceleración de partículas cargadas. La radiación se produce, por ejemplo, cuando una distribución de corrientes variantes con el tiempo que fluye por una línea de transmisión encuentra una discontinuidad, que provoca un cambio abrupto en su dirección y su velocidad.

El vector de Poynting representa que la energía es transmitida a través del campo electromagnético. Ambos, campo eléctrico y magnético, deben estar presentes y deben estar acoplados. Si alguno de los dos es cero, no se podrá radiar energía. En el espacio libre, la energía en la onda electromagnética se propaga a través frentes de ondas esféricos, por lo que la potencia de la onda en un punto dado decae como  $1/r^2$ , donde  $r$  es la distancia a la fuente.

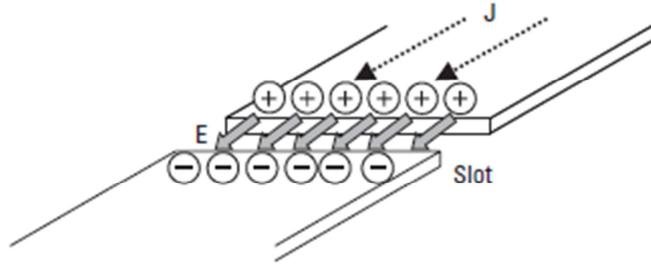
Acabamos de ver que las fuentes de radiación son las ondas electromagnéticas, y a su vez las fuentes de éstas son las cargas y las corrientes. Por ello, las antenas (estructuras radiantes) se construirán a partir de conductores por los que fluirá corriente. Los dieléctricos que forman parte de las antenas, para lo único que sirven es para dar forma a la radiación electromagnética. Como ejemplo podemos poner el dipolo de la siguiente figura:



**Ilustración 7: Antena Dipolo**

El principal mecanismo de radiación del dipolo es su abrupta terminación del flujo de corriente. La longitud del dipolo determinará la separación de las cargas, y de ese modo cómo la radiación procedente de ambos extremos de la antena se combina en el espacio. Cuando escogemos la longitud del dipolo aproximadamente como la mitad de la longitud de onda, la impedancia de entrada será resonante, la energía radiada será máxima.

De igual forma que el dipolo, un hueco en una lámina conductora radiará. Veamos cómo. En uno de los bordes se acumulará carga debida la discontinuidad, y en el otro borde se acumularán cargas de polaridad opuesta. Los dos extremos cargados crean un campo eléctrico a través del hueco. Si la corriente es oscilante, el hueco podrá radiar un campo electromagnético.



**Ilustración 8: Hueco**

Como consecuencia, una fina ranura en un plano de tierra, podrá radiar campo, y además cuando la longitud del hueco sea la mitad de la longitud de onda, resonará haciendo máxima la radiación.