

Anexo A

Análisis de armónicos

En este anexo se muestran las expresiones y deducciones que permitirán el análisis y monitorización de los niveles de armónicos presentes en la red eléctrica, así como el cálculo de los indicadores de distorsión más usuales.

Se comienza comentando las expresiones que describe la Transformada discreta de Fourier, que será la que se utilice para el análisis de armónicos en una red. Justificación del uso de enventanado para secuencias. Algoritmo FFT usado. Por último, se describen los indicadores de armónicos y distorsión utilizados.

A.1 Transformada discreta de Fourier

La idea que surge en la Transformada discreta de Fourier (DFT⁶⁷) es trabajar con secuencias, tanto en el dominio temporal como en el frecuencial (recuérdese

⁶⁷ *Discrete Fourier Transform.*

que un microcontrolador trabaja con señales digitales y discretas en el tiempo). La definición formal de transformada discreta de Fourier de N puntos es:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.1})$$

La secuencia $X[k]$ obtenida como muestreo del espectro de la DTFT de $x[n]$ equivale a una DFT, pero no a la DFT de $x[n]$, sino a una extensión periódica de la misma: $\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN]$. En caso de tomar un menor número de muestras en el espectro DTFT, aparecerá un solapamiento entre las muestras de $x[n]$, por lo que $x[n] \neq x_r[n]$ (pérdida de información).

Para profundizar en la materia, se recomienda la consulta de (Oppenheim, y otros, 1999) y (Proakis, y otros, 1996).

A.2 Control de armónicos mediante DFT

Se comenzará estudiando una señal sinusoidal simple, dada por la ecuación:

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) = A \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) \quad (\text{A.2})$$

La transformada de Fourier (en tiempo continuo) se calcula como

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (\text{A.3})$$

Para el caso concreto de una senoide, es necesario calcular la transformada de un coseno enventanado (es decir, la función coseno multiplicada por un rectángulo) y posteriormente tomar límites al infinito. Realizando este proceso, se llega a

$$X(F) = \frac{A}{2} \left[\delta(F - F_0) e^{j\varphi_0} + \delta(F + F_0) e^{-j\varphi_0} \right] \quad (\text{A.4})$$

$\delta(x)$ es la función *delta de Dirac*.

El espectro (en magnitud) de una señal sinusoidal se reduce a dos deltas de Dirac situadas a $\pm F_0$ Hz. A partir de ahora, se va a tratar con señales a 50 Hz, frecuencia que se usa en la distribución de electricidad.

Sin embargo, la señal $x(t)$ es continua en el tiempo, lo cual es inviable para trabajar con el sensor inalámbrico. Se debe realizar una conversión analógico a digital esto es, tomar muestras cada cierto tiempo T . La elección de este tiempo es crucial para no perder la información de la señal al pasarla al dominio discreto. Antes de proseguir, conviene enunciar el Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon.

A.2.1 Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon

Supóngase una señal analógica $x(t)$ cuyo espectro frecuencial está limitado en banda: $X(F)$ no contiene componentes en frecuencia más allá de B Hz. Como ya se vio anteriormente, cuando se muestrea usando un tiempo de muestreo T , el espectro de la secuencia obtenida $x[n]$ pasa a ser periódico, y el periodo de repetición es $F_s = 1/T$. De forma matemática:

$$\bar{X}\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(F - kF_s) \quad (\text{A.5})$$

Para no perder información (componentes de frecuencia), esta separación F_s deberá ser al menos igual al doble del ancho de banda B (Figura A.3).

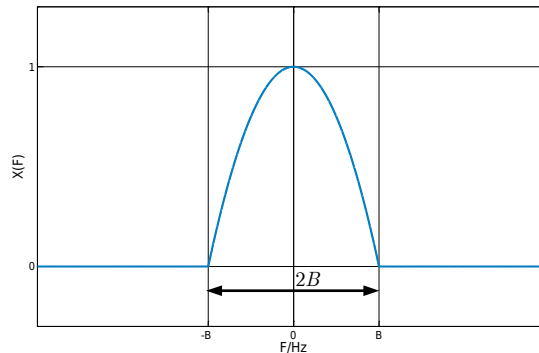


Figura A.1 Espectro de una señal limitada en banda

La limitación en banda viene del hecho de que su espectro no contiene componentes frecuenciales cuando $|F| \geq B$.

En caso de que $F_s > 2B$, (Figura A.2 izq.) no existe problema alguno con las réplicas del espectro. Si por el contrario el tiempo de muestreo no es suficientemente pequeño (i.e. $F_s < 2B$) entonces se produce el fenómeno de solapamiento o *aliasing* (en Figura A.2 derecha).

Por tanto, la recuperación de la señal original sólo será posible si se usa una frecuencia de muestreo tal que $F_s > 2B$ (la igualdad estricta puede no funcionar a veces). Esto será posible si se emplea un filtro paso de baja (LP), de tal forma que seleccione una única réplica de $\bar{X}(F/F_s)$.

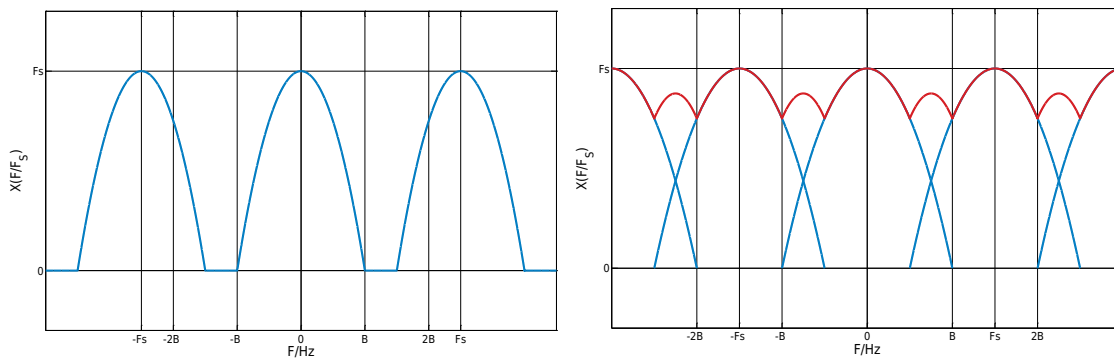


Figura A.2 Espectro de una señal muestreada

(a) En el proceso de muestreo se ha tomado una frecuencia $F_s > 2B$ Hz. Como se aprecia en la figura, no existe solapamiento alguno, quedando un cierto espacio $F_s - 2B$ entre las réplicas del espectro. (b) La frecuencia de muestreo $F_s < 2B$ Hz, apareciendo un *aliasing*. En el espectro resultante (rojo) no es posible distinguir el original $X(F)$. El ancho de banda solapado resulta $2B - F_s$.

* * *

Retomando el problema que nos ocupa, la transformada de Fourier de la sinusoide resultó ser dos funciones delta situadas a $\pm F_0$ Hz. A la vista del teorema de muestreo, se puede decir que dicha señal tiene un ancho de banda de $B = 50$ Hz. Para poder lograr la reconstrucción o lo que es lo mismo, no perder información esencial, hay que tomar una frecuencia de muestreo $F_s > 2 \cdot 50 = 100$ Hz. De forma equivalente $T < 1/100 = 10$ ms.

En la Figura A.3 aparece el espectro periódico resultante de tomar $F_s = 250$ Hz, $\bar{X}(F/F_s)$. Trabajar con $\bar{X}(F/F_s)$ no sería difícil, pues las funciones delta están bien definidas.

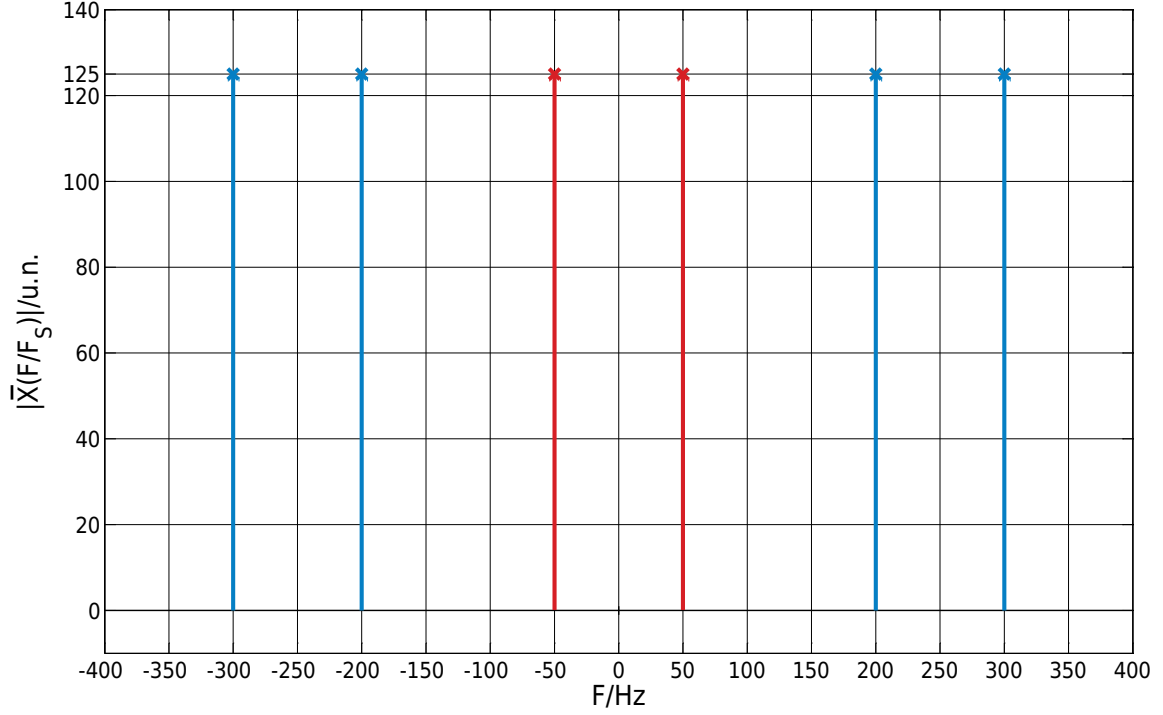


Figura A.3 Espectro de una senoide muestreada

Se muestra la magnitud del espectro resultante de muestrear la senoide de $F_0 = 50\text{Hz}$ con una frecuencia de $F_s = 250\text{Hz}$. En rojo aparece el par de deltas de Dirac correspondiente a la señal, y en azul las réplicas (infinitas) cada 250Hz .

Sin embargo, hay un punto que todavía no se ha tenido en cuenta: estos espectros obtenidos resultan de realizar una transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) a una secuencia de longitud infinita. Lógicamente, el microcontrolador no puede manejar secuencias de estas características, por lo que hay que hacerlas finitas. De hecho, el objetivo final es implementar un algoritmo para calcular la transformada de Fourier discreta (DFT) y para ello la secuencia ha de ser de duración finita. A esta operación de tomar un segmento de la secuencia original se conoce como *enventanado*⁶⁸.

Sea una secuencia $x[n]$ de duración infinita (proveniente de un proceso de muestreo adecuado). El enventanado consiste en multiplicar $x[n]$ por una secuencia denominada *ventana* $w[n]$, que en el caso más sencillo se define como

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

⁶⁸ O *windowing*.

La secuencia resultante se denotará por

$$v[n] = x[n] \cdot w[n] \quad (\text{A.7})$$

El hecho de alterar la secuencia original $x[n]$ tiene consecuencias en el dominio de la frecuencia. Para ver qué ocurre, se aplica la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT). La DTFT de un producto en el tiempo equivale a una convolución de las DTFT de cada una de las secuencias:

$$\bar{V}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{X}(\theta) \bar{W}(\omega - \theta) d\theta \quad (\text{A.8})$$

Donde $\bar{W}(\omega)$ representa la DTFT de la ventana. Realizando las operaciones pertinentes, se puede llegar a:

$$\bar{V}\left(\frac{F}{F_s}\right) = \frac{A}{2} \left[\bar{W}\left[\frac{2\pi}{F_s}(F - F_0)\right] e^{j\varphi_0} + \bar{W}\left[\frac{2\pi}{F_s}(F + F_0)\right] e^{-j\varphi_0} \right] \quad (\text{A.9})$$

Dejando a un lado la fase de la señal φ_0 , el espectro resultante es la DTFT de la secuencia de enventanado centrada en las frecuencias de la sinusoide $\pm F_0$. Se puede particularizar $w[n]$ para el caso más sencillo: la ventana rectangular vista en (A.6). Su transformada de Fourier en tiempo discreto resulta

$$\bar{W}\left(\frac{F}{F_s}\right) = \frac{\sin\left(\pi M F/F_s\right)}{\sin\left(\pi F/F_s\right)} e^{-j\pi(M-1)F/F_s} \quad (\text{A.10})$$

En la Figura A.4 se ha representado la magnitud del espectro $\bar{V}(F/F_s)$, resultante de combinar la sinusoide $x[n]$ junto a la ventana $w[n]$.

Por tanto, cuando se toma una secuencia sinusoidal y se enventana, las funciones delta se modifican: se produce el fenómeno de *derrame* o *leakage* de las frecuencias. Es importante conocer dónde se producen los nulos de $\bar{V}(F/F_s)$. Concretamente el primer nulo de la DTFT de la ventana se produce en $\Delta F = \frac{F_s}{M}$. Al valor ΔF se le denomina *resolución de Rayleigh*, y más adelante se justificará la importancia de su cálculo.

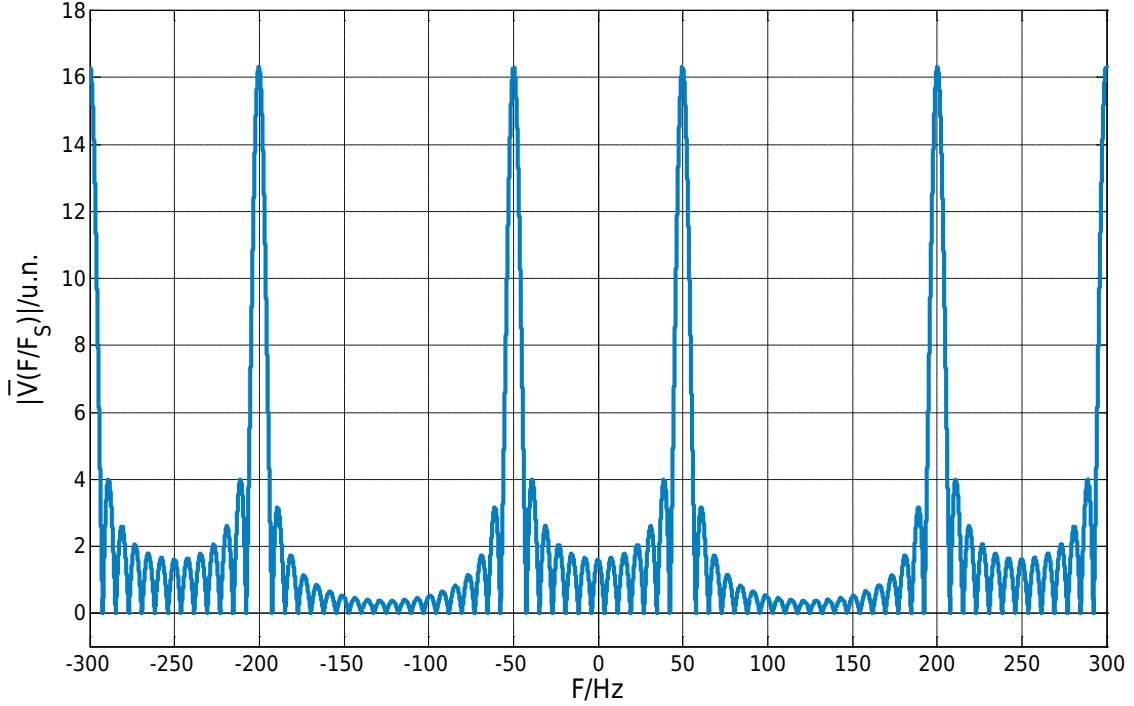


Figura A.4 Espectro de una senoide enventanada

Se muestra la magnitud del espectro periódico resultante de enventanar una secuencia periódica (tipo coseno a 50 Hz) con una ventana rectangular. Las deltas han pasado a ser lóbulos (leakage). El espectro también es periódico, repitiéndose cada $F_s = 250$ Hz. Al tomarse 32 puntos para la ventana, la resolución de Rayleigh resulta $\Delta F = 250/32 = 7.8125$ Hz.

El siguiente paso es añadir armónicos a la señal continua $x(t)$, pues la que recibía el sensor puede contener en general más de la frecuencia principal 50 Hz.

$$x(t) = A_0 \cos(2\pi F_0 t + \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1) \quad (\text{A.11})$$

En principio, $x(t)$ está compuesta por dos cosenos, con diferentes amplitudes, frecuencias y desfases. Como siempre, para hallar su representación en frecuencia, se recurre a la transformada de Fourier (en tiempo continuo), resultando

$$\begin{aligned} X(F) = & \frac{A_0}{2} \left[\delta(F - F_0) e^{j\varphi_0} + \delta(F + F_0) e^{-j\varphi_0} \right] + \\ & + \frac{A_1}{2} \left[\delta(F - F_1) e^{j\varphi_1} + \delta(F + F_1) e^{-j\varphi_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A continuación, se debe muestrear $x(t)$ para conseguir la secuencia $x[n]$. Según el Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, la frecuencia F_s ha de ser mayor que el ancho de banda de la señal. Si se asume que $F_1 > F_0$, la frecuencia

cumplirá $F_S > 2B = 2F_1$. Por último, hay que aplicar una limitación a $x[n]$: enventanado. Ahora, el espectro resultante $\bar{V}(\omega)$ resulta

$$\begin{aligned} \bar{V}\left(\frac{F}{F_S}\right) = & \frac{A_0}{2} \left[\bar{W}\left[\frac{2\pi}{F_S}(F - F_0)\right] e^{j\varphi_0} + \bar{W}\left[\frac{2\pi}{F_S}(F + F_0)\right] e^{-j\varphi_0} \right] + \\ & + \frac{A_1}{2} \left[\bar{W}\left[\frac{2\pi}{F_S}(F - F_1)\right] e^{j\varphi_1} + \bar{W}\left[\frac{2\pi}{F_S}(F + F_1)\right] e^{-j\varphi_1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

En este punto, puede surgir la siguiente cuestión ¿deben cumplir alguna restricción las amplitudes A_0 y A_1 y/o las frecuencias F_0 y F_1 ? Con los siguientes ejemplos (adaptados al caso de una señal eléctrica) se intentará aclarar este punto.

Supónganse unas frecuencias $F_0 = 50 \text{ Hz}$ y $F_1 = 150 \text{ Hz}$ (armónico de orden 3). El ancho de banda resulta $B = 150 \text{ Hz}$ y por tanto $F_S > 300 \text{ Hz}$. Se tomará $F_S = 400 \text{ Hz}$. Las amplitudes son iguales. A la hora de enventanar la secuencia, se va a tomar un número de muestras $M = 32$. Si se calcula resolución de *Rayleigh*, se obtiene $\Delta F = 400 \text{ Hz}/32 = 12.5 \text{ Hz}$.

¿Qué significa este valor? Indica la separación mínima que han de tener las dos frecuencias implicadas F_0 y F_1 para que en el espectro final $\bar{V}(F/F_S)$ puedan distinguirse (o *resolve*) las dos sinusoides. Por ejemplo, se toman $F_0 = 50 \text{ Hz}$ y $F_1 = 70 \text{ Hz}$, la diferencia sigue siendo mayor que la resolución espectral mínima ΔF . En la Figura A.5 (izq.) se muestra el espectro: los cosenos pueden distinguirse todavía.

Ahora se estudiará el caso con frecuencias $F_0 = 50 \text{ Hz}$ y $F_1 = 60 \text{ Hz}$. Debido a que $F_1 - F_0 < \Delta F$, los cosenos están tan cercanos que no hay forma de reconocerlos en el espectro $\bar{V}(F/F_S)$ (Figura A.5 derecha): no pueden resolverse.

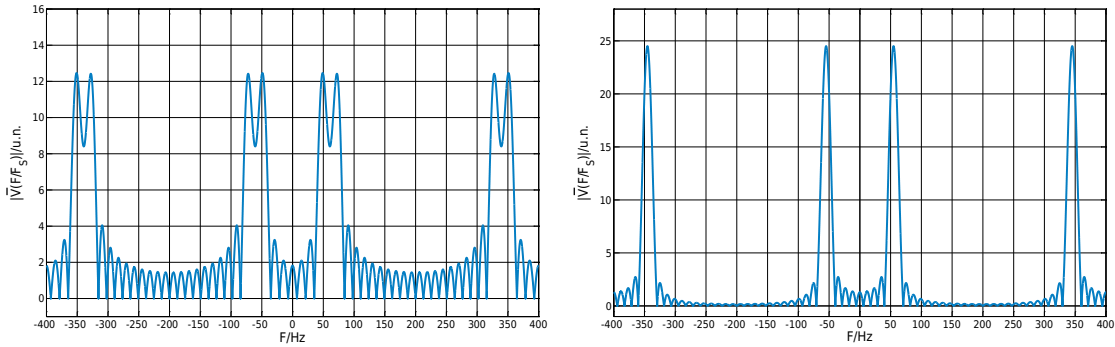


Figura A.5 Espectros de dos sinusoides enventanadas

(a) Magnitud del espectro periódico resultante de enventanar una secuencia formada por dos cosenos a 50 Hz y a 70 Hz con una ventana rectangular. Como la diferencia de frecuencias es mayor que la resolución de Rayleigh, los cosenos pueden resolverse. (b) Magnitud del espectro resultante, pero en este caso los cosenos están a 50 Hz y 60 Hz. No pueden resolverse (diferencia menor que la resolución mínima).

Es posible demostrar que la ventana es la que menor resolución de *Rayleigh* ofrece, lo que puede llevar a pensar que es la ventana óptima. Sin embargo, hay un aspecto que todavía no se ha tenido en cuenta: la amplitud de los armónicos.

Si ambos armónicos tienen la misma amplitud, esto es $A_0 = A_1$, no hay problema alguno (siempre que estén suficientemente separados). A continuación supóngase $A_0 = 4A_1$. Las frecuencias $F_0 = 50$ Hz y $F_1 = 150$ Hz no daban problemas de resolución espectral. En la Figura A.6 (izquierda) se muestra la magnitud de $\bar{V}(F/F_S)$. Todavía es posible reconocer el armónico a F_1 .

Tómese $A_0 = 50A_1$. Todos los demás valores permanecen iguales. A la vista de la Figura A.6 (der.), parece que sólo hay un coseno, a F_0 . Se dice que el armónico F_1 ha quedado enmascarado por la frecuencia principal F_0 .

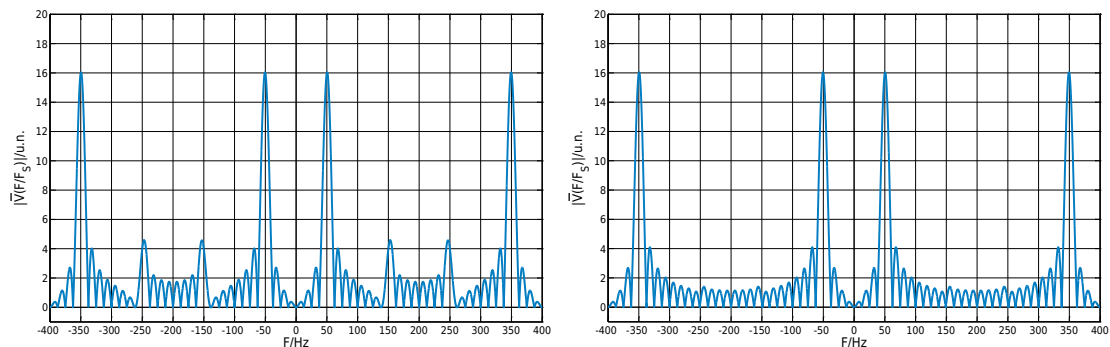


Figura A.6 Espectros de dos sinusoides enventanadas (II)

(a) Magnitud del espectro periódico resultante de enventanar una secuencia formada por dos cosenos a 50 Hz y a 150 Hz con una ventana rectangular. La amplitud del primero es cuatro veces mayor que la del segundo. En la figura todavía pueden diferenciarse ambos. En (b) la amplitud del primero es cincuenta veces mayor: parece que existe un solo armónico (ha quedado enmascarado).

Esto se debe a que los lóbulos laterales de la ventana rectangular tienen más peso sobre el armónico que la propia amplitud. Por tanto, se trata de buscar una ventana que tenga sus lóbulos laterales más atenuados. Lógicamente, esto implicará un aumento en la resolución espectral ΔF .

A continuación se hace un breve repaso de las ventanas para secuencias más comunes. Se debe realizar un estudio de las mismas para elegir la más adecuada a la situación particular de este trabajo.

A.2.2 Ventanas más comunes

RECTANGULAR

Presenta una expresión

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Si se requiere su respuesta en frecuencia, se halla su DTFT, resultando

$$\bar{W}\left(\frac{F}{F_s}\right) = \frac{\sin\left(\pi M F/F_s\right)}{\sin\left(\pi F/F_s\right)} e^{-j\pi(M-1)F/F_s} \quad (\text{A.15})$$

En la Figura A.7 se muestran la secuencia de la ventana rectangular y su espectro en frecuencia, respectivamente.

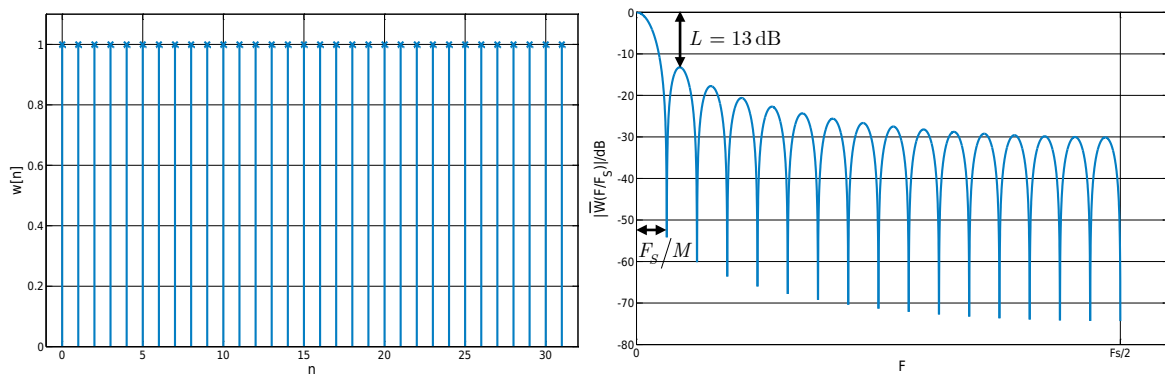


Figura A.7 Ventana rectangular

(a) Ventana rectangular con $M = 32$ muestras. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}\left(F/F_s\right)$.

Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 13 dB aprox.

TRIANGULAR / BARTLETT

Son muy similares en la forma. La diferencia es que la ventana Bartlett comienza y finaliza sus muestras con valor cero, mientras que la triangular no. La ecuación (A.16) es la de la ventana triangular (Figura A.8) para un número par de muestras M .

$$w[n-1] = \begin{cases} 2n/M & 1 \leq n < M/2 \\ 2(M-n+1)/M & M/2 < n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.16)$$

Por su parte, la ecuación de la ventana de Bartlett (Figura A.9):

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M & 0 \leq n \leq M/2 \\ 2 - 2n/M & M/2 \leq n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.17)$$

Nótese que la secuencia de (A.17) tiene longitud total $M + 1$.

La respuesta en frecuencia de la secuencia triangular (DTFT) se calcula y resulta

$$\bar{W}\left(\frac{F}{F_S}\right) = \frac{2}{M} \left[\frac{\sin\left(\pi M F/2F_S\right)}{\sin\left(\pi F/F_S\right)} \right]^2 e^{-j2\pi\left(\frac{M}{2}-1\right)F/F_S} \quad (A.18)$$

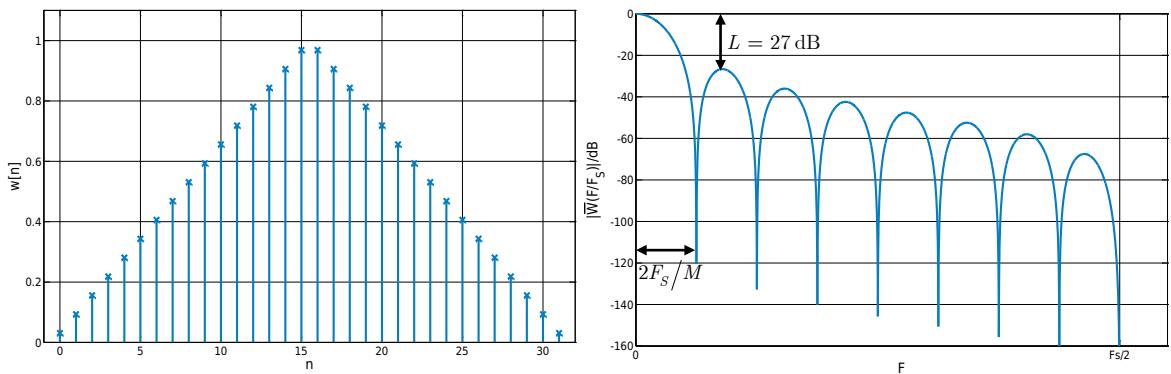


Figura A.8 Ventana triangular

(a) Ventana triangular con $M + 1 = 32$ muestras. Nótese que ni empieza ni termina con muestras iguales a cero. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}(F/F_S)$. Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 27 dB aprox.

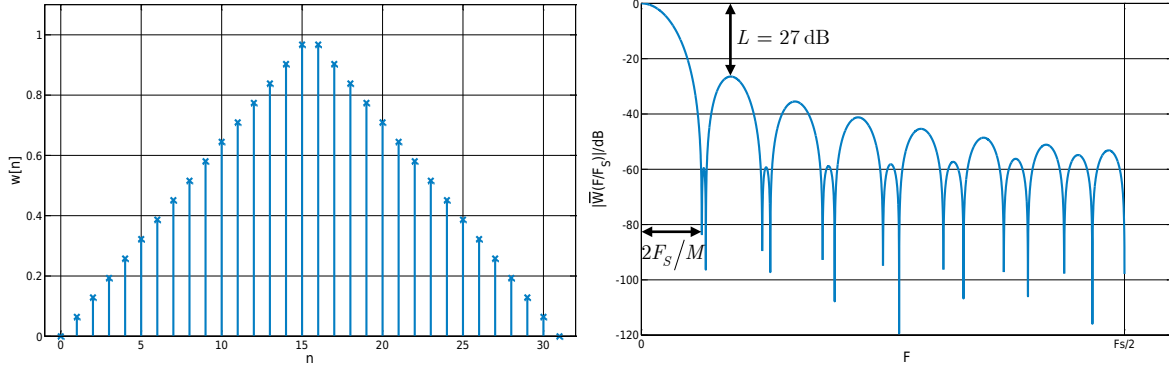


Figura A.9 Ventana Bartlett

(a) Ventana Bartlett con $M + 1 = 32$ muestras. A diferencia de la ventana triangular, esta ventana sí comienza y termina por muestras nulas. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}(F/F_s)$. Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 27 dB aprox. Las características son similares a las de la ventana triangular.

HANNING

La definición de la ventana es

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \right] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.19)$$

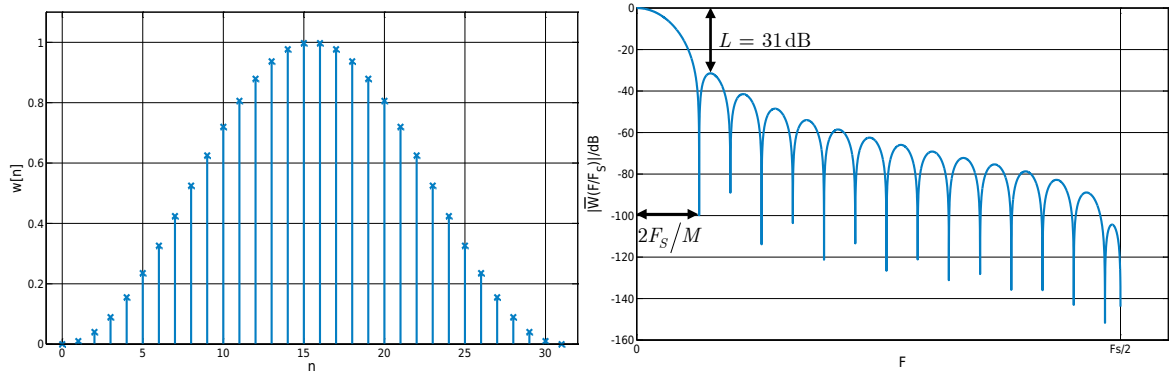


Figura A.10 Ventana Hanning

(a) Ventana Hanning con $M + 1 = 32$ muestras. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}(F/F_s)$. Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 31 dB aprox.

HAMMING

Definición de la ventana

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.20)$$

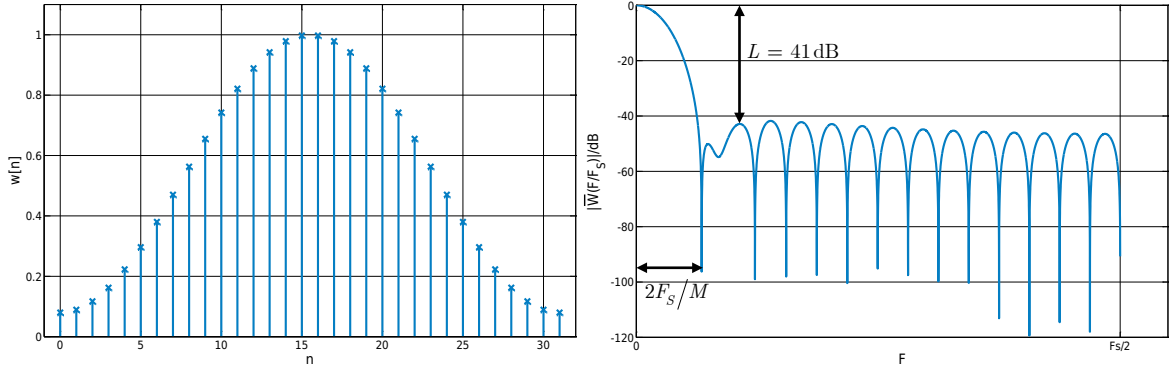


Figura A.11 Ventana Hamming

(a) Ventana Hamming con $M + 1 = 32$ muestras. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}(F/F_s)$. Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 41 dB aprox.

BLACKMAN

La ventana Blackman tiene una expresión general de la forma

$$w[n] = \begin{cases} a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + \\ + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.21)$$

Dependiendo del valor de los coeficientes a_i , se obtienen ventanas distintas, y por tanto, diferentes atenuaciones de los lóbulos.

Si no se especifica nada, la ventana Blackman por convención resulta

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.50 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.22)$$

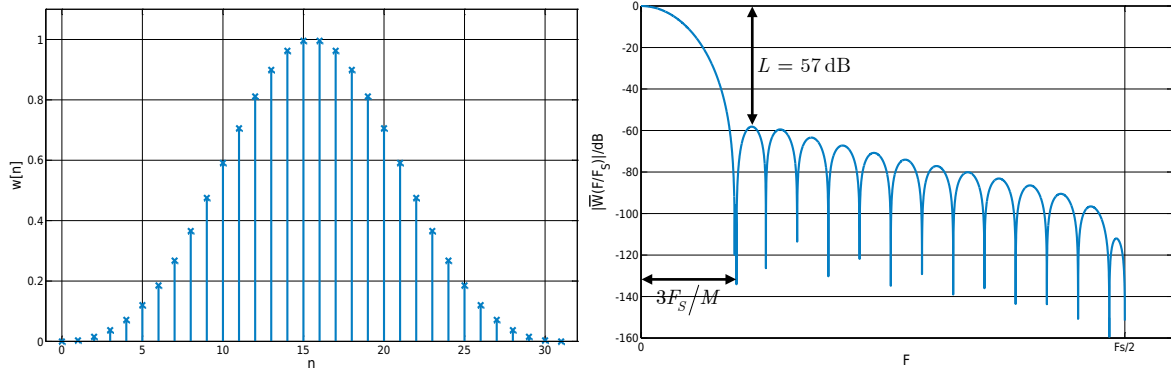


Figura A.12 Ventana Blackman

(a) Ventana Blackman con $M + 1 = 32$ muestras. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}(F/F_s)$. Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 57 dB aprox.

Otro tipo derivado es el denominado Blackman-Harris

$$w[n] = \begin{cases} 0.35875 - 0.48829 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + \\ + 0.14128 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) - 0.01168 \cos\left(\frac{6\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad (A.23)$$

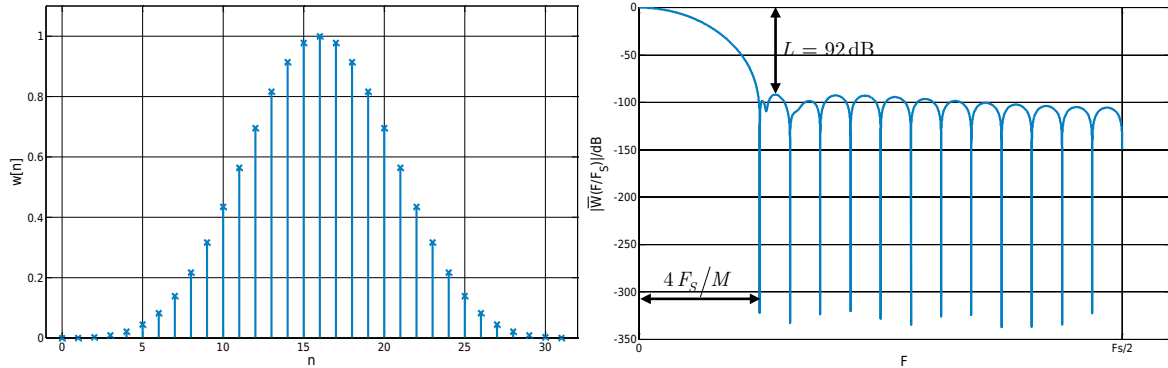


Figura A.13 Ventana Blackman-Harris

(a) Ventana Blackman-Harris con $M + 1 = 32$ muestras. (b) Magnitud en decibelios del espectro de $\bar{W}(F/F_s)$. Como se aprecia, la pérdida desde el lóbulo principal al primer lóbulo secundario es de 92 dB aprox.

A.3 Algoritmo FFT⁶⁹

Se trata de algoritmos eficientes que permiten calcular tanto la DFT como su inversa (IDFT). Hay que procurar no confundirlo con la DFT. DFT es una definición de Transformada de Fourier, mientras que FFT es un conjunto de algoritmos que permiten calcularla.

Para evaluar la DFT, podría pensarse en la definición de ésta

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.24})$$

Y aplicarla directamente. Sin embargo, el número de operaciones resultaría demasiado elevado: se tendrían del orden de N^2 multiplicaciones complejas además de $N^2 - N$ sumas complejas.

Antes de continuar, se va a usar la siguiente notación para la exponencial compleja

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{A.25})$$

Se trata de aprovechar ciertas propiedades de dichas exponenciales, en particular la simetría y la periodicidad, respectivamente:

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k \quad (\text{A.26})$$

$$W_N^{k+N} = W_N^k \quad (\text{A.27})$$

El algoritmo que se va a utilizar se basa en el Teorema de Duplicación. Supóngase una secuencia de entrada de longitud $N = 2M$

$$x[n] = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] \quad (\text{A.28})$$

⁶⁹ *Fast Fourier Transform.*

Y a continuación se divide en dos secuencias de longitud M de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x' &= [x_0, x_2, x_4, \dots, x_{N-2}]^T \\ x'' &= [x_1, x_3, x_5, \dots, x_{N-1}]^T \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Esto es, separación en muestras pares e impares. Se definen las transformadas de Fourier discretas (DFT) de cada una de las secuencias como

$$\begin{aligned} \beta' &= \text{DFT}(x') = [\beta'_0, \beta'_1, \dots, \beta'_{M-1}]^T \\ \beta'' &= \text{DFT}(x'') = [\beta''_0, \beta''_1, \dots, \beta''_{M-1}]^T \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Entonces las componentes de la DFT de x , es decir $\beta = \text{DFT}(x)$ pueden calcularse a partir de (A.30) como sigue

$$\begin{aligned} \beta_n &= (\beta'_n + W^n \cdot \beta''_n) \\ \beta_{M+n} &= (\beta'_n - W^n \cdot \beta''_n) \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (\text{A.31})$$

La Figura A.14 se muestra de forma esquemática el proceso FFT para una secuencia de ocho puntos.

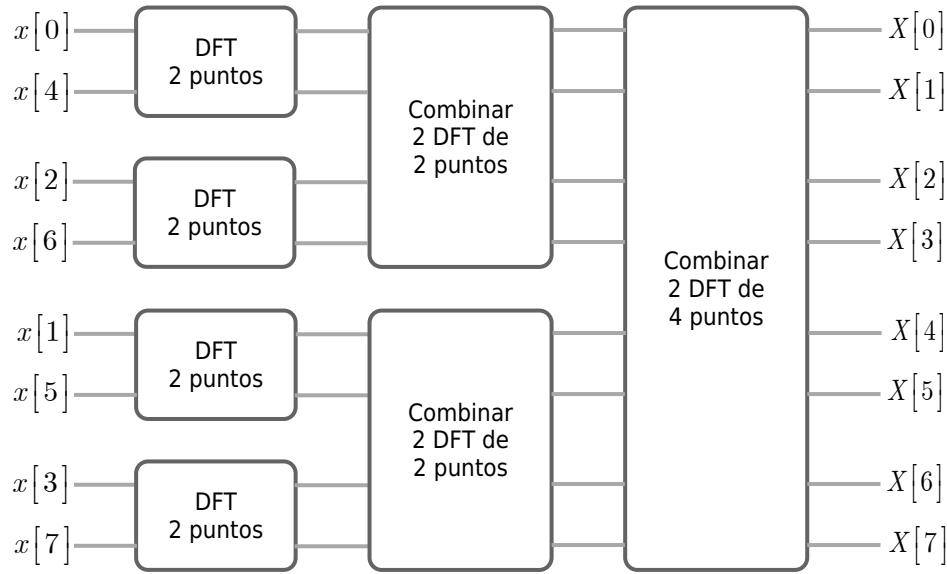


Figura A.14 Esquema cálculo DFT de ocho puntos

Los puntos de la secuencia de entrada se encuentran a la izquierda. En la primera etapa, se toman cuatro parejas de dos puntos y se halla su DFT. En la segunda etapa, hay que tomar, por un lado dos DFT antes calculadas para hallar una DFT de cuatro puntos; por el otro lado, se hace igual. En la tercera y última etapa, se tienen dos DFT de cuatro puntos. Combinando éstas, se llega a la DFT de ocho puntos que es el objetivo.

El hecho de dividir de dos en dos como indica (A.29) implica que las muestras del dominio temporal no se toman en orden. Aunque no es complicado conocerlo: si se toman las muestras en el orden natural y sus índices se convierten al formato binario, bastará con invertir el orden de estos bits, y deshacer el cambio:

$$\begin{aligned}
 &[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] \\
 &\quad \downarrow \\
 &[000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111] \\
 &\quad \downarrow \\
 &[000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111] \\
 &\quad \downarrow \\
 &[0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7]
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Este proceso se le conoce como **Aplicación de inversión binaria**, y permite que el resultado (DFT de la secuencia) sí quede ordenado al final. Así se define la función $\rho_N(n)$ que devuelve para cada n el orden que le corresponde en el algoritmo. Por ejemplo $\rho_8(0) = 0, \rho_8(1) = 4, \rho_8(2) = 2 \dots$

Otra forma de representar el proceso aquí mostrado para calcular la DFT es usando grafos. La estructura básica se muestra en la Figura A.15.

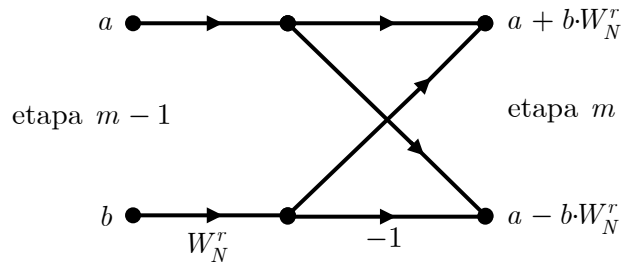


Figura A.15 Estructura básica de algoritmo FFT

También conocida como el "cálculo de la mariposa", por la semejanza de su forma. Cada bloque se sitúa en una etapa del cálculo. Las ramas que contienen una constante, ésta representa su ganancia. Un nodo al que llegan varias ramas suma los valores de ésta.

A continuación se presenta el algoritmo basado en el método de división para calcular la Transformada discreta de Fourier.

Para $n = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$x[\rho_N(n)] \leftarrow x[n]$$

Para $m = 1, 2, \dots, r$:

$$q \leftarrow 2^{m-1}$$

Para $k = 0, 1, \dots, q - 1$:

$$u \leftarrow W_{2q}^k$$

Para $n = 0, 1, \dots, N - 1$ con incremento de $2q$:

$$\begin{aligned} x[n + k + q] &\leftarrow x[n + k] - u \cdot x[n + k + q] \\ x[n + k] &\leftarrow 2x[n + k] - x[n + k + q] \end{aligned}$$

Otra ventaja del algoritmo expuesto es que no necesita memoria o espacio adicional para los cálculos. El resultado final (y los intermedios) sobrescriben a la secuencia original $x[n]$, si bien hay que realizar las operaciones en el mismo orden que aparecen, y no al contrario.

A.3.1 Mejora del algoritmo FFT para secuencias reales

Hasta el momento, las secuencias podían ser complejas, teniendo por tanto una parte real y otra imaginaria. Sin embargo, para el estudio de los armónicos en las señales de tensión o intensidad, las secuencias obtenidas del convertidor analógico-

digital son reales. Es posible mejorar la eficiencia del algoritmo antes expuesto aprovechando que la secuencia no tiene parte imaginaria.

El objetivo es partiendo de una secuencia real de longitud $2N$, obtener una compleja, pero de longitud N , y aplicar FFT a ésta última. Sea $g[n]$ la secuencia real. Se divide en otras dos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= g[2n] \\ x_2[n] &= g[2n+1] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

A continuación se hace

$$x[n] = x_1[n] + j \cdot x_2[n] \quad (\text{A.34})$$

Ahora $x[n]$ es una secuencia compleja⁷⁰, pero la longitud se ha reducido la mitad: N . Sea $X[k]$ la transformada discreta de $x[n]$. Las DFT de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ pueden obtenerse como

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \frac{1}{2} \{ X[k] + X^*[N-k] \} \\ X_2[k] &= \frac{1}{2j} \{ X[k] - X^*[N-k] \} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

El último paso es, a partir de $X_1[k]$ y $X_2[k]$, recuperar la DFT de $g[n]$, esto es $G[k]$.

$$\begin{aligned} G[k] &= X_1[k] + W_{2N}^k X_2[k] \\ G[k+N] &= X_1[k] - W_{2N}^k X_2[k] \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.36})$$

Aunque hay que realizar más operaciones al terminar el algoritmo FFT, resulta más eficiente a nivel computacional calcular la DFT de una secuencia de la mitad de puntos.

⁷⁰ Las muestras pares de $g[n]$ pasan a ser parte real de $x[n]$, mientras que las impares son la parte imaginaria ($x_2[n]$).

A.4 Indicadores de armónicos y distorsión

A.4.1 Distorsión armónica individual

Se define como el porcentaje de un armónico de orden h respecto al fundamental. Es decir (tensión e intensidad):

$$U_h (\%) = \frac{U_h}{U_1} \cdot 100 \quad (\text{A.37})$$

$$I_h (\%) = \frac{I_h}{I_1} \cdot 100 \quad (\text{A.38})$$

A.4.2 Tasa de distorsión total armónica

También conocida como THD⁷¹. Es un indicador ampliamente usado en la definición del nivel de contenido armónico en señales sinusoidales.

Mediante esta tasa se puede expresar con un solo número la distorsión que afecta a la intensidad o tensión que circula en un punto determinado de la instalación. Los valores individuales anteriores dan información de cada armónico por separado.

Su definición (en tanto por ciento) para señales de tensión:

$$THD_u (\%) = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{\infty} U_h^2}}{U_1} \cdot 100 \quad (\text{A.39})$$

Y análogamente para ondas de intensidad. Según la norma, el número de armónicos a sumar se puede limitar hasta 50. Además, hay que tener en cuenta que el valor THD puede superar el 100%.

⁷¹ *Total Harmonic Distorsion.*

UMBRALES CRÍTICOS DE THD EN TENSIÓN

- Si $THD_u < 5\%$: situación normal, sin riesgos de funcionamiento incorrecto.
- Con $5\% < THD_u < 8\%$: existe contaminación armónica importante, pudiendo tener lugar funcionamientos incorrectos.
- $THD_u > 8\%$: contaminación armónica importante, con alta probabilidad de funcionamientos anómalos. Es necesario un análisis y revisión de la instalación y dispositivos.

UMBRALES CRÍTICOS DE THD EN INTENSIDAD

- Si $THD_i < 10\%$: situación normal, sin riesgos de funcionamiento incorrecto.
- Con $10\% < THD_i < 50\%$: existe contaminación armónica importante con riesgo de aumento de temperatura y la necesidad de sobredimensionar cables y fuentes.
- $THD_i > 50\%$: contaminación armónica importante, con alta probabilidad de funcionamientos anómalos. Es necesario un análisis y revisión de la instalación y dispositivos.

