2

Modulación y Codificación

2.1. Sistema de Comunicación Digital

Los elementos fundamentales de cualquier comunicación son el emisor, el receptor, el canal y el mensaje. En un **Sistema de Comunicación Digital** estos elementos, a su vez, están compuestos de otros que en conjunto hacen posible la comunicación entre dos puntos.

Como podemos observar en la Figura 2.1, el transmisor está formado por un Codificador de Fuente, un Codificador de Canal y un Modulador. En el Receptor, existe los elementos que hacen el proceso inverso a los del transmisor, un Demodulador, un Decodificador de Canal y un Decodificador de Fuente.

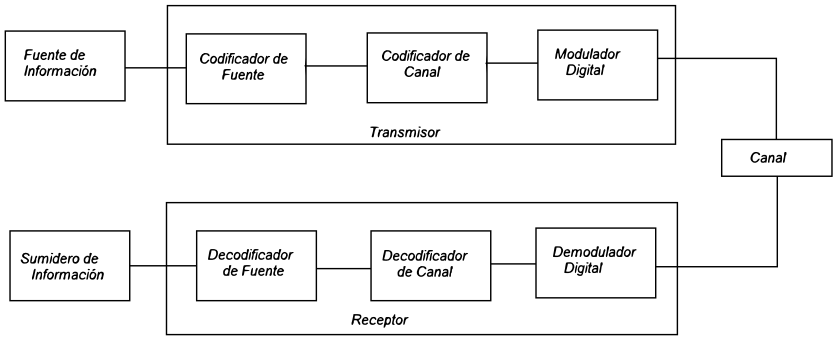

Figura 2.1: Esquema de un Sistema de Telecomunicación

En la *Fuente de Información* se genera una señal que contiene los datos a transmitir, esta señal pasa a un *Codificador de Fuente* que convierte la señal en dígitos binarios de forma que use la menor cantidad de bits posibles, para ello elimina la redundancia posible. El*Codificador de Canal* introduce redundancia con el objetivo de aumentar la fiabilidad del sistema. El propósito del Codificador de Canal es por tanto lograr una transmisión eficiente, entendiendo por ello una transmisión más fiable de la información, es decir una

reducción en el número de errores en los datos recibidos. El *Modulador Digital* agrupa los bits en símbolos dependiendo de la modulación elegida. Su finalidad es hacer corresponder las formas de onda de un conjunto finito y discreto con los bits que tiene a su entrada.

La información es transmitida por el *Canal*, que puede ser un coaxial, fibra, el aire, ..., hasta el *Receptor*. Todos los medios físicos deterioran la señal, por lo que en el canal se produce una degradación de ésta, atenuando la señal y haciendo comparable el nivel de ruido. El primer paso en el Receptor es demodular la señal, función que realiza el *Demodulador*. A continuación mediante el *Decodificador de Canal* recuperamos los bits de información, pudiendo corregir errores gracias a la redundancia introducida al codificar. El último paso es decodificar los bits para recuperar la señal, esto se hace con el *Decodificador de Fuente*.

A lo largo del capítulo, vamos a explicar los dos tipos de modulación empleada en el proyecto, **PSK** y **QAM** además de explicar la codificación de canal.

2.2. Modulación

Entendemos por *Modulación* la adaptación de la señal, en nuestro caso digital, al medio analógico. La adaptación consiste en asociar una forma de onda entre M posibles a cada uno de los símbolos generados por la fuente de información . Este proceso se repite cada T segundos enviándose $R = 1/T$ símbolos por segundos. Al igual que en la modulación analógica, se puede emplear la modulación de amplitud (**ASK**), modulación de ángulo **FSK** o **PSK** o una combinación (**QAM**).

2.2.1. Modulación por Desplazamiento de Fase - PSK

Se trata de una modulación angular en el que se hace variar la fase de la portadora entre un número de niveles discretos. Dependiendo de ese número de niveles de fase, que son potencia de dos, tenemos **BPSK** para dos niveles de fase, **QPSK** para cuatro y **M-PSK** para M mayor que cuatro.

La elección de un mayor nivel M implica transmitir mayor información en el mismo ancho de banda a costa de aumentar la sensibilidad a ruidos e interferencias. La gran ventaja de las modulaciones PSK es que la potencia de los símbolos es toda la misma, por lo que se simplifica el diseño.

Transmisor

Las M señales transmitidas en una Modulación por desplazamiento de fase pueden representarse como:

$$\begin{aligned} s_i &= Re[g_{li}(t)e^{jw_c t}] = Re[g(t)e^{j\frac{2\pi(i-1)}{M}}e^{jw_c t}] \\ &= g(t)\cos[w_c t + \frac{2\pi(i-1)}{M}] \qquad i = 1, 2, \ldots, M \end{aligned} \tag{2.1}$$

Siendo $g_{li}(t)$ el equivalente paso baja de la señal transmitida. Si llamamos $\phi_i = 2\pi(i-1)/M, \quad i = 1, 2 \ldots, M$ a la fase de la señal transmitida, para cualquier t se tendrá que

la señal está dada por:

$$X(t) = Re\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g(t-nT]e^{j\phi_i}e^{jw_c t} \right\} \tag{2.2}$$

Siendo $i = n$ En la siguiente figura podemos observar el esquema de generación de la información.

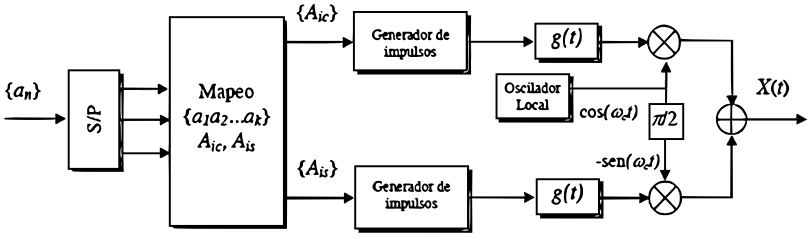

Figura 2.2: Transmisor MPSK. Fuente [5]

Siendo:

$$e^{j\phi_i} = A_{ic} + jA_{is} \Rightarrow \quad \begin{cases} A_{ic} = \cos(\phi_i) = \cos\left[\dfrac{2\pi(i-1)}{M}\right] \\ A_{is} = \sin(\phi_i) = \sin\left[\dfrac{2\pi(i-1)}{M}\right] \end{cases} \quad , i = 1, 2, \ldots, M \tag{2.3}$$

Todas las señales, tienen la misma energía, además de poder ser expresadas como una combinación lineal de dos señales ortnonormales.

$$E_s = \int_0^T s_i^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T g^2(t)dt = \frac{1}{2}E_g \tag{2.4}$$

$$s_i(t) = s_{i1}(t)\phi_1(t) + s_{i2}(t)\phi_2 \qquad i = 1, 2, \ldots, M \tag{2.5}$$

donde ϕ_1 yϕ_2 tienen la forma:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(w_c t) \tag{2.6}$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\sin(w_c t) \tag{2.7}$$

Detector Óptimo y Distancia Euclidiana

Es habitual asignar los k bits de información a las $M = 2^k$ empleando una *Codificación de Gray* de forma que la mayor probabilidad de un error en la detección se traduzca en un único bit. La distancia euclidiana entre dos señales viene dada por:

$$d_{ij} = \mid s_i - s_j \mid = \left\{ E_g \left[1 - \cos\left[\frac{2\pi}{M}(i-j) \right] \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

Para $\mid i-j \mid = 1$ es decir, para fases adyacentes, la distancia se hace mínima.

$$d_{min} = \sqrt{E_g\left(1-\cos(\frac{2\pi}{M})\right)} = \sqrt{2E_g}\sin(\frac{\pi}{M}) = 2\sqrt{E_s}\sin(\frac{\pi}{M}) \tag{2.9}$$

Respecto al detector óptimo coherente, éste estará formado por correladores o filtros adaptados, seguidos de un detector que calcula la métrica. Suponiendo que la equiprobabilidad en las señales, la métrica será:

$$c(\vec{r},\vec{s_i}) = \vec{r}.\vec{s_i} \qquad i = 1,2,\ldots,M \tag{2.10}$$

Por tanto, el esquema del detector coherente puede observarse en la figura del *receptor MPSK*.

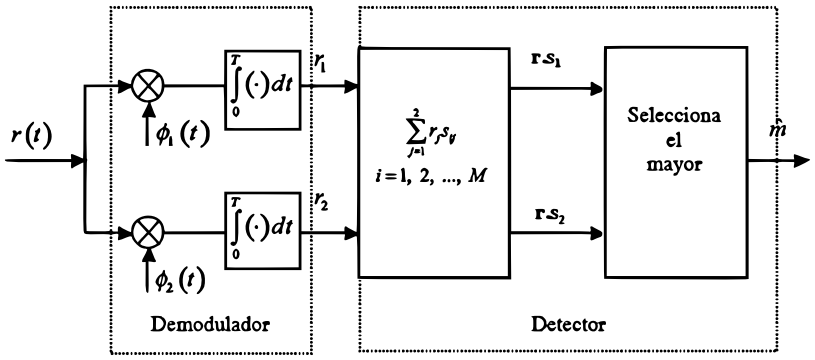

Figura 2.3: Receptor MPSK. Fuente: [5]

Probabilidad de Error

Excepto para los casos $M = 2$ y $M = 4$, el cálculo de la probabilidad de error no resulta fácil. Para $M = 2$ suponiendo los símbolos equiprobables, podemos emplear la cota de unión [1]. Para $M = 4$ hacemos $E_s = 2E_b$. Por tanto la probabilidad de error para $M = 2$ y para $M = 4$ respectivamente es:

$$P_b = Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E_b}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \tag{2.11}$$

$$P_M = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\left[1-\frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right] = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad M = 4 \tag{2.12}$$

La probabilidad de error de bit para una *QPSK* coincide con la de la *BPSK*. La diferencia estriba en que con la modulación binaria el ancho de banda ocupado es el

[1] Ver: [5], donde viene descritas las cotas

doble. Asumiendo una codificación de Gray, la probabilidad de error para una modulación *QPSK* es:

$$P_b = \frac{P_M}{\log_2 2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \tag{2.13}$$

Para valores altos de M y alta relación señal ruido (*SNR*), utilizamos la aproximación de la frontera más cercana, para la que la distancia mínima definida en (2.9), y que para una constelación MPSK, $Ne = 2$, se tendría:

$$P_M = N_e Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left[\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] = 2Q\left[\sqrt{2k\gamma_b}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right] \tag{2.14}$$

dónde $k = log2M$ y $\gamma_s = k\gamma_b$. A medida que aumenta M, para alcanzar una probabilidad de error determinada, debemos aumentar la energía por bit. Podemos observarlos en la figura:

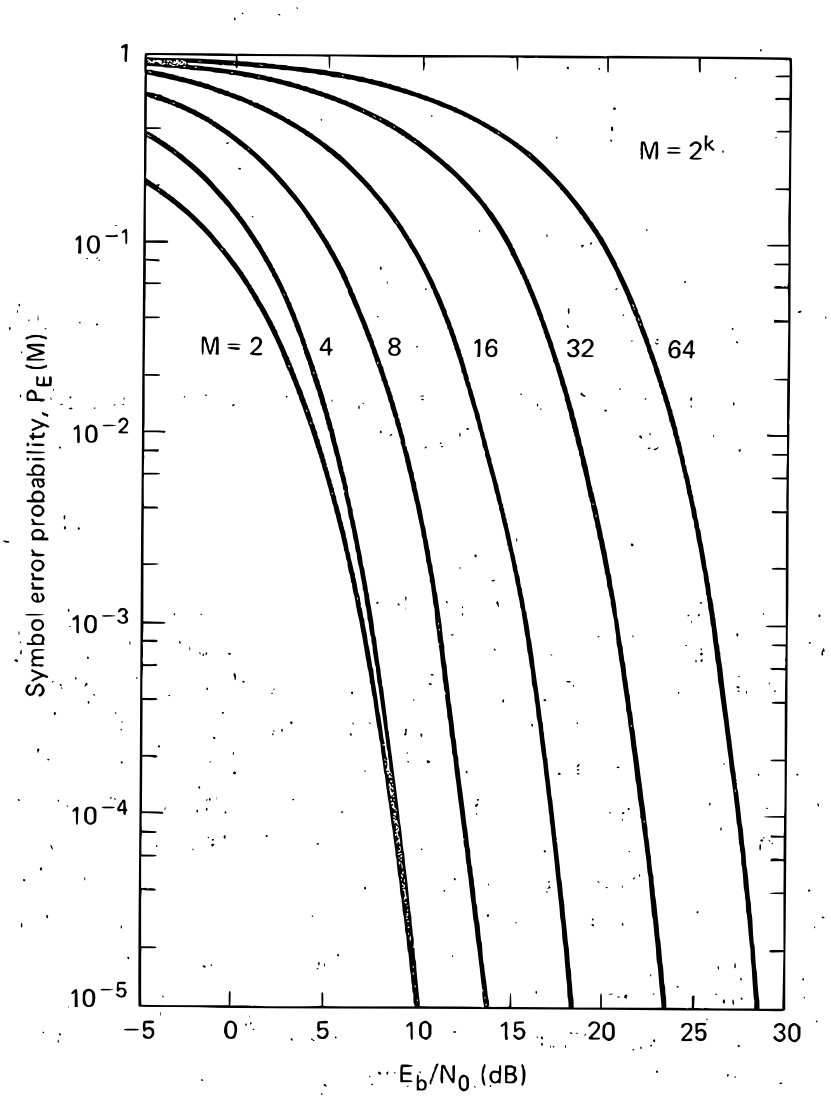

Figura 2.4: Prob. Error de Símbolo. Fuente:[7]

2.2.2. Modulación de Amplitud en Cuadratura - QAM

Se trata de una modulación digital en la que se transporta datos modulando la portadora tanto en amplitud como en fase. Esto se consigue, modulando una portadora dos veces, y desfasando en una de ellas 90°la fase y la amplitud. Supone la formación de dos canales ortogonales en el mismo ancho de banda, con lo cual se mejora en eficiencia de ancho de banda que se consigue con esta modulación.

Transmisor

Las $M = 2^k$ señales de una modulación QAM pueden representarse por:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= Re\left[g_{li}(t)e^{j\omega_c t}\right] = Re\left[g(t)\left(A_{ic} + jA_{is}\right)e^{j\omega_c t}\right] \\ &= A_{ic}g(t)\cos(\omega_c t) - A_{is}g(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t), \qquad i = 1, 2, \ldots, M \end{aligned} \tag{2.15}$$

siendo

$$A_i = V_i e^{j\phi_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, M \tag{2.16}$$

$$A_{ic} = Re[A_i], \quad A_{is} = Im[Ac] \tag{2.17}$$

Podemos comprobar que efectivamente la información viaja en la amplitud y fase observando las ecuaciones (2.15) y (2.16) y sustituyendo los valores de una en otra.

$$\begin{aligned} s_i(t) &= Re\left[V_i g(t)e^{j\omega_c t}\right] \\ &= V_i(t)\cos(\omega_c t + \phi_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, M \end{aligned} \tag{2.18}$$

A continuación, se muestra el diagrama de generación de la señal, en los que los coeficientes A_{ic} y A_{is} vienen definidos por la ecuación (2.17).

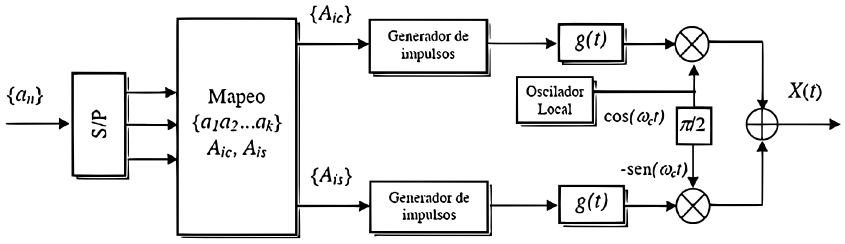

Figura 2.5: Transmisor QAM. Fuente:[5]

Como ocurría con la modulación MPSK, podemos representar la señal como la combinación lineal de dos señales ortonormales. E_g es la energía del pulso básico g(t).

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(\omega_c t) \\ \phi_2 &= -\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\sin(\omega_c t) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en $s_i(t)$ y operando

$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, M \tag{2.20}$$

Resumiendo, el vector señal vendría dado por la siguiente ecuación:

$$s_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ic} & \sqrt{\frac{E_g}{2}} \\ A_{is} & \sqrt{\frac{E_g}{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} \begin{bmatrix} A_{ic} \\ A_{is} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Detector Óptimo y Distancia Euclidiana

Existe un tipo de señales QAM, cuyos valores de amplitud A_{ic}, A_{is} toman valores separados por una distancia constante e igual a $2A$ dando lugar a una constelación rectangular. La ventaja de esta señales QAM, es su fácil generación, ya que se puede considerar que están formadas por dos señales PAM[2] en cuadratura. Para ello debería cumplirse:

$$\begin{aligned} A_{ic} &= A(2i - M_1 - 1) \qquad i = 1, 2, \ldots, M_1 \\ A_{is} &= A(2i - M_2 - 1) \qquad i = 1, 2, \ldots, M2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

En este caso, la distancia euclidiana mínima viene dada por:

$$d_{min} = d = \sqrt{\frac{E_g}{2}(2A)^2} = A\sqrt{2E_g} \tag{2.23}$$

La energía de la señal sería el cuadrado de la distancia al origen de los puntos de la constelación, y para el caso más habitual, el rectangular, se cumple para M_1 y M_2 pares, la energía promedio es:

$$E_{av} = \frac{d^2(M_1^2 + M_2^2 - 2}{12} \tag{2.24}$$

Operando podemos expresar la distancia mínima como:

$$d_{min} = d = \sqrt{\frac{12E_{av}}{M_1^2 + M_2^2 - 2}} \tag{2.25}$$

Probabilidad de Error

Para obtener la probabilidad de error, consideramos que el detector óptimo está formado por dos demoduladores PAM que actúan sobre las componentes en fase y cuadratura.

Si $M_1 = M_2 = \sqrt{M}$, la probabilidad de error viene dada por:

$$P_M \leq 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{(M-1)}\frac{E_{av}}{N_0}}\right) \tag{2.26}$$

Para M altas, podemos emplear la siguiente cota:

$$P_M \leq 4Q\left(\sqrt{\frac{3k}{(M-1)}\frac{E_{av}}{N_0}}\right) \tag{2.27}$$

[2]Señal PAM $s_i(t) = Re[g_{li}(t)e^{j\omega_c t}] = A_i g(t)\cos(\omega_c t)$

M	$10\log_{10} R_M$
8	1,65
16	4,20
32	7,02
64	9,95

Cuadro 2.1: Valores R_M. Fuente:[5]

2.2.3. Prestaciones de la Modulación: Comparación entre modulaciones

A continuación, vamos a hablar de las ventajas e inconvenientes en las prestaciones que ofrece usar una u otra modulación y una constelación más grande o más pequeña. Los aspectos que se van a ver afectados son:

1. Régimen binario
2. Ancho de banda
3. Probabilidad de Error
4. Relación Señal a Ruido

Probabilidad de Error y SNR

Si nos fijamos en la probabilidad de error de símbolo de una modulación PSK dada por la ecuación (2.14) y la de una modulación QAM dada por la ecuación (2.27) para un mismo valor de M, vemos que vienen dominadas por el argumento de la función Q. Definiendo el cociente entre dichos argumentos como R_M como:

$$R_M = \frac{3(M-1)}{2\sin^2(\frac{\pi}{M})} \tag{2.28}$$

Podemos observar que para $M = 4$, este cociente es igual a 1, y por tanto las señales MPSK y MQAM tienen prestaciones similares de Probabilidad de Error para valores iguales de relación señal a ruido.

Para $M > 4$ el cociente R_M es mayor que uno, esto implica, como se puede apreciar en la figura 2.6, que para el mismo valor de M, la modulación QAM tiene mejores prestaciones de probabilidad de error que una PSK para la misma relación señal a ruido. En el cuadro al principio de la página, se muestra en dB el cociente R_M para distintas M.

Ancho de Banda y eficiencia espectral

Para determinar el ancho de banda, necesitamos definir la forma del pulso conformador utilizado. Vamos a suponer un pulso rectangular de duración T y energía unidad como el mostrado en la figura 2.7, aunque también podríamos utilizar un pulso conformador coseno alzazo como el de la figura 2.8.

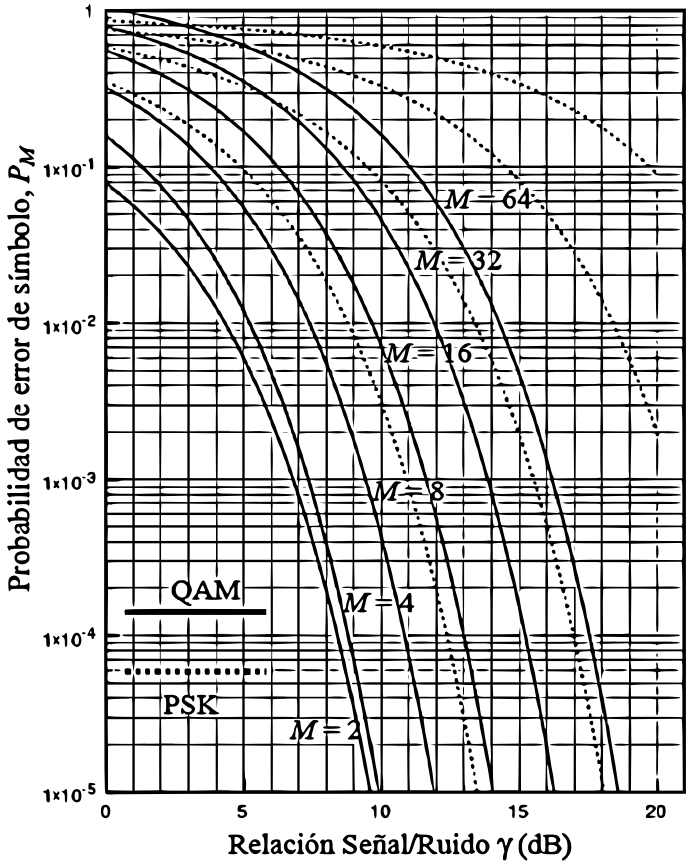

Figura 2.6: Probabilidad Error de Símbolo.Fuente:[5]

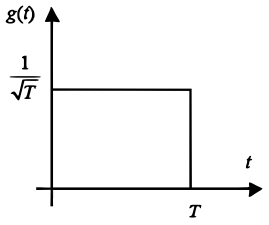

Figura 2.7: Pulso Básico Conformador rectángulo. Fuente: [5]

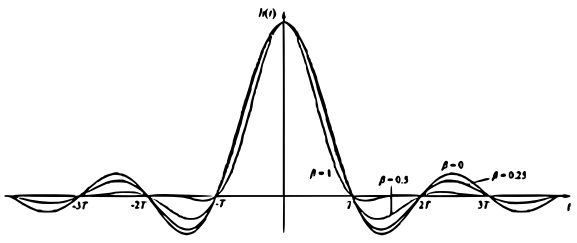

Figura 2.8: Pulso Básico Conformador coseno alzado.Fuente: [1]

El espectro densidad de los esquemas de modulación viene dado por:

$$S_X = \frac{1}{4}\left[S_Z(-\omega - \omega_c) + S_Z(\omega - \omega_c)\right] \tag{2.29}$$

siendo S_Z

$$S_Z(\omega) = \frac{\mid G(\omega) \mid^2}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} R_c(k) e^{j\omega kT} \tag{2.30}$$

Haciendo que $R_c = 0$ para $k \neq 0$

$$S_Z(\omega) \propto \frac{\mid G(\omega) \mid^2}{T} \tag{2.31}$$

Y espectro del equivalente paso baja es:

$$S_Z \propto Sa^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad rad/s \tag{2.32}$$

El ancho de banda de transmisión es:

$$Bw = \frac{4\pi}{T}\ rad/s \qquad B = \frac{2}{T}\ Hz \tag{2.33}$$

La duración del pulso es proporcional a la del símbolo, concretamente, la duración del pulso en un esquema M-ario, será $\log_2$ veces la del pulso binario. En el dominio de la frecuencia, implica que el ancho de banda, será $\log_2$ menor para el esquema M-ario respecto al binario. Vamos a definir la **Eficiencia Espectral** η como el cociente entre la tasa de bits R_b y el ancho de banda de la señal medido en hertzios.

$$\eta = \frac{R_b}{B} \tag{2.34}$$

Y para el pulso conformador rectangular empleado

$$\eta = \frac{\log_2(M)}{2} \tag{2.35}$$

Serán preferibles M altas para reducir el ancho de banda ocupado. Vamos a verlo con un ejemplo, vamos a comparar el ancho de banda requerido por una modulación con $M = 2$ y otra con $M = 4$ Para el caso binario, el ancho de banda sería

$$Bw = \frac{4\pi}{T_b} \quad rad/s \tag{2.36}$$

Para el caso $M = 4$,el ancho de banda es:

$$Bw = \frac{2\pi}{T_b} \quad rad/s \tag{2.37}$$

Podemos observar que es la mitad del ancho de banda del caso binario. Si recopilamos la discusión del apartado anterior sobre la probabilidad de error, recordamos que la modulación QPSK tenía rendimiento similar a la BPSK, por lo que siempre que sea posible es preferible emplear la modulación QPSK. Esto es debido al empleo de los canales en fase y cuadratura.

2.3. Codificación de Canal

A lo largo de esta sección vamos a hablar de en que consiste la codificación de canal, que beneficios aporta así como los distintos tipos de codificación que existe y desarrollaremos aquellos métodos empleados en este proyecto.

2.3.1. Introducción a la Codificación de Canal

El objetivo de la codificación de canal es la protección de la información contra los errores producidos por las anomalías y perturbaciones de la transmisión, con el fin de proporcionar una calidad adecuada introduciendo algún tipo de redundancia.

Mediante la codificación sistemática, k bits de información se transforman en una palabra-código de n bits, esto se produce añadiendo $r = n - k$ bits de redundancia que dependen de los k bits de entrada. Al cociente entre los bits de entrada al codificador y los de salida se le llama tasa de código (*Coderate*).

$$Coderate = R = \frac{k}{n} \tag{2.38}$$

Las principales estrategias en la codificación son:

- Detección de errores y retransmisión: *ARQ*.
- Corrección de errores. *FEC*.

A su vez existen dos grandes familias de códigos dentro de esta estrategia:

1. **Códigos de Bloque**: La información se codifica en paquetes de k bits. A cada grupo de k le corresponde de manera unívoca una palabra código de n bits. Son códigos de bloque, los códigos de Hamming, Golay,Reed-Salomon,Cíclicos Binarios,BCH ...
2. **Códigos Convolucionales**: Los bits de redundancia se van calculando a medida que entra cada bit de información al codificador. Aparte de los códigos convolucionales, se incluyen en este grupo los Turbocódigos y los *TCM* o Modulación Codificada de Trellis.

Además, existen códigos lineales, que se definen como aquellos códigos en los que la suma de dos palabras códigos dan lugar a otra también perteneciente a él. Además, la palabra código cero es una palabra código del código lineal.

Para medir la efectividad de los métodos de corrección de errores, se define la **Ganancia de Codificación**. La *ganancia de codificación*, es la diferencia en decibelios de las relaciones señal a ruido (medida como E_b/N_0) necesarias para alcanzar una determinada *BER* sin y con la protección ante errores.

Tenemos que tener en cuenta, que la ganancia de codificación, sólo refleja una parte del efecto de la inclusión de la codificación de canal. Hay que tener en cuenta que se produce un aumento del ancho de banda ocupado como expresa el autor en [2].

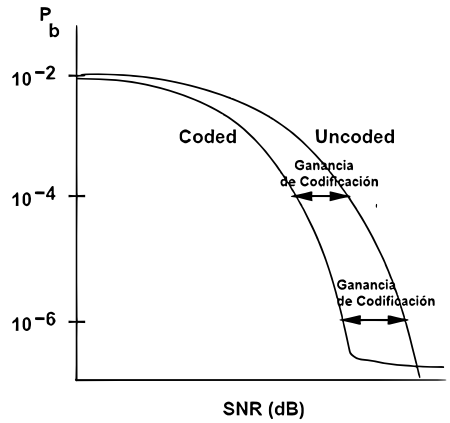

Figura 2.9: Concepto Ganancia Codificación. Fuente: [3]

Si queremos mantener la tasa binaria de entrada a nuestro sistema de comunicaciones y no se modifica el formato de la modulación, la inclusión de un código de tasa R incrementa el ancho de banda por un factor $1/R$, ya que donde antes transmitíamos k ahora transmitimos n. Si mantenemos el ancho de banda ocupado constante y no modificamos el formato de la modulación, la inclusión de un código de tasa R disminuye la tasa binaria en un factor R. Si deseamos mantener tanto la tasa binaria de entrada como el ancho de banda, debemos modificar el formato de la modulación.

En este proyecto, se intenta estudiar qué modulación y qué codificación dan lugar a mejores prestaciones en la BER para distintos valores de la relación señal a ruido, sin modificar el régimen binario o el ancho de banda.

2.3.2. Códigos de Hamming

Los códigos Hamming, son códigos detectores y correctores de errores, creados por R. Hamming. Pueden detectar errores y/o corregirlos . Son códigos de bloque lineales. Forman parte de los conocidos como códigos de bloque, y dentro de éstos a los llamados códigos perfectos, definidos como aquellos que cumplen la *cota de Hamming.* [3]

La idea general de los códigos de Hamming es introducir unos bits de redundancia y distribuirlo de una cierta forma a lo largo de la palabra de forma que si se producen errores podamos corregirlos.

Los códigos de Hamming se definen con dos números (n, k), siendo n el número de bits totales y k el número de bits de información. La diferencia entre los bits totales y los de bits de información, son los bits de redundancia.

$$r = n - k \tag{2.39}$$

El código de Hamming más utilizado es el *(7,4)*. Agrega tres bits de paridad por cada cuatro bits de información.

[3]Para más información sobre la cota de Hamming consultar sección 5.5.4 *Visualization of a 6-Tuple space* de [7]

Algoritmo

Los bits de paridad se sitúan en posiciones de la palabra que son potencia de 2, $2^0 = 1, 2, 4, 8, 16 \ldots$, pudiendose reordenar para los códigos sistemáticos. El resto de posiciones se emplean para bits de datos. Un ejemplo del algoritmo puede verse en [6].

Cada bit de paridad se calcula con un conjunto de datos que dependen de la posición del bit de paridad. El bit de paridad de la posición 2^k comprueba los bits en las posiciones que tenga su representación binaria.

Vamos a suponer una palabra de datos de 7 bits (*0110101*). Para ver como se genera el código vamos a fijarnos en las siguientes tablas donde **d** indica bit de datos y **p** bit de paridad.

	p_1	p_2	d_1	p_3	d_2	d_3	d_4	p_4	d_5	d_6	d_7
Palabras de datos sin Paridad			0		1	1	0		1	0	1
p_1	**1**		0		1		0		1		1
p_2		**0**	0			1	0			0	1
p_3				**0**	1	1	0				
p_4								**0**	1	0	1
Palabra de datos con Paridad	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1

Cuadro 2.2: Tabla Ejemplo de algoritmo de Hamming para la palabra *0110101*.

La palabra de datos con los bits de paridad incluidos es *10001100101*. Vamos a suponer que se produce un error en el bit de la derecha siendo la palabra con error *10001100100*. Vamos a hacer la comprobación de los bits de paridad para ver que ha habido un error. Primero vamos a ver la comprobación para la palabra sin error.

	p_1	p_2	d_1	p_3	d_2	d_3	d_4	p_4	d_5	d_6	d_7	Prueba Paridad	Bit Comprobación
Palabra			0		1	1	0		1	0	1	1	
p_1	**1**		0		1		0		1		1	**Correcto**	0
p_2		**0**	0			1	0			0	1	**Correcto**	0
p_3				**0**	1	1	0					**Correcto**	0
p_4								**0**	1	0	1	**Correcto**	0

Cuadro 2.3: Chequeo de paridad de la palabra sin errores.

	p_1	p_2	d_1	p_3	d_2	d_3	d_4	p_4	d_5	d_6	d_7	Prueba Paridad	Bit Comprobación
Palabra			0		1	1	0		1	0	1	1	
p_1	**1**		0		1		0		1		0	**Error**	1
p_2		**0**	0			1	0			0	0	**Error**	1
p_3				**0**	1	1	0					**Correcto**	0
p_4								**0**	1	0	0	**Error**	1

Cuadro 2.4: Chequeo de paridad de la palabra con errores.

Si analizamos en las tablas anteriores la paridad, a la derecha, tras la llegada del mensaje sin errores debe ser siempre 0 por cada fila, pero en el momento en que ocurre un error esta paridad cambia a 1, de allí el nombre de la columna *prueba de paridad 1*. Se observa que en la fila en la que el cambio no afectó, la paridad es cero y llega sin errores.

El paso final es evaluar los bits de paridad (recuerde que el fallo se encuentra en d_7). El valor entero que representan los bits de paridad es 11 (si no hubieran ocurrido errores este valor seria 0), lo que significa que el bit undécimo de la palabra de datos, incluidos los bit de paridad, es el erróneo y necesita ser cambiado.

Probabilidad de Error

Si asumimos decodificación por decisión dura, la probabilidad de error de bit viene dada por la ecuación

$$P_B \simeq \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} j\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \tag{2.40}$$

donde p es la probabilidad de error de símbolo del canal. En vez de la ecuación (2.40), podemos usar la siguiente ecuación equivalente.

$$P_B \cong p - p(1-p)^{n-1} \tag{2.41}$$

Para obtener el rendimiento sobre un canal Gaussiano usando una *BPSK coherente* podemos expresar la probabilidad de error de símbolo en términos de E_c/N_0.

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}}\right) \tag{2.42}$$

donde E_c/N_0 es la energía de símbolo codificado por densidad espectral de ruido. Para relacionar E_c/N_0 con la energía de bit por densidad espectral de ruido usamos:

$$\frac{E_c}{N_0} = \frac{k}{n}\frac{E_b}{N_0} \tag{2.43}$$

En la figura 2.10 se muestra la probabilidad de error para una BPSK coherente para diversos códigos de bloque, entre ellos varios Hamming. Podemos apreciar que para obtener la misma probabilidad de error la E_b/N_0 es mayor para el código de Hamming (7,4) que para los otros, esto quiere decir que necesitamos más energía.

2.3.3. Códigos Convolucionales

Los códigos convolucionales son un tipo de códigos de detección de errores. Los códigos convolucionales se describen a partir de ciertos elementos como son la tasa del código, la longitud del código, la memoria del codificador y los polinomios generadores.

La tasa del código, k/n, es la relación entre el número de bits que entran al codificador k y el número de bits que se obtienen a la salida del codificador n. En cuanto a la longitud

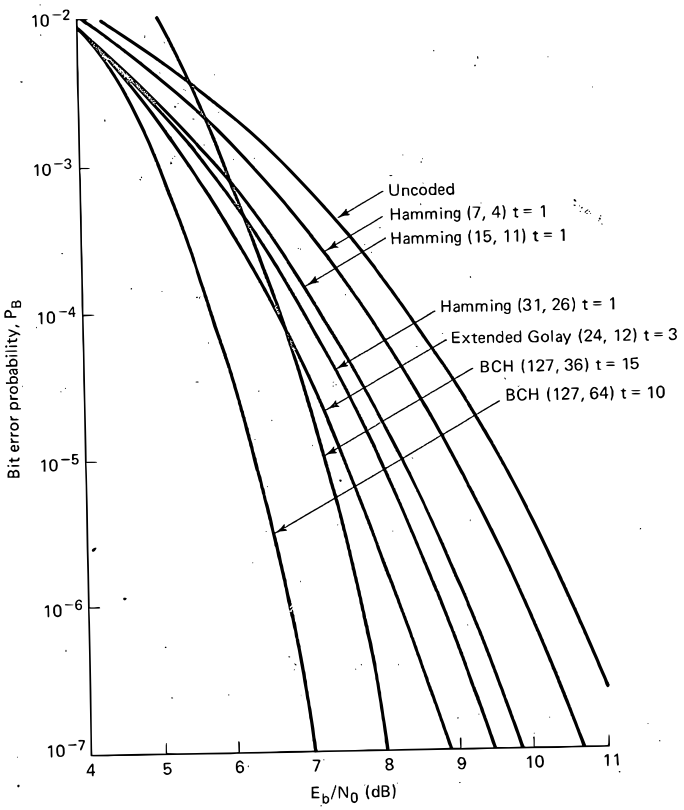

Figura 2.10: Probabilidad Error de bit BPSK codificación de bloque.Fuente: [7]

del código K, denota en cuántos ciclos de codificación tiene influencia un bit que tengamos a la entrada del mismo a partir de un instante dado. Un parámetro muy relacionado con K es la memoria del codificador m que precisamente es el número de biestables que contiene el codificador.

Codificación

La codificación convolucional se realiza mediante el uso de un registro de desplazamiento y una lógica combinacional encargada de la realización de la suma en módulo 2. El registro de desplazamiento está implementado mediante la concatenación de una serie de biestables. Cada vez que llega un ciclo de reloj, el dato que tenemos a la entrada pasa a su salida y se sitúa por tanto en la entrada del siguiente. Supongamos un código convolucional de tasa 1/2 es decir, entra un bit y genera dos. Los bits a la salida se multiplexan, siendo su velocidad, el doble de la de entrada.

Para determinar la salida asociada a una entrada, debemos tener en cuenta la existencia de memorias, que hacen que la salida de una determinada entrada dependa también de las entradas anteriores. Para determinar la salida, existen tres métodos gráficos, diagrama de estado, diagrama de árbol y diagrama de Trellis.

Diagrama de Estados

En los códigos convolucionales, los estados representan el contenido de la memoria, de forma que existen 2^{K-1} estados posibles, siendo $K-1$ el número de elementos de memoria necesarios, biestables, denotado por m. El diagrama de estados, representa todos los estados y las posibles transiciones entre ellos. Por tanto, el codificador es una máquina de estados finitos, cuya entrada condiciona la salida y los estados futuros. Para el codificador que hemos tomado como ejemplo hay 2x2 estados posibles, es decir cuatro posibles estados *00,01,10 y 11*. Para determinar la salida, necesitamos los dos bits de los registros y el bit de entrada, es decir un total de $K = 3$ bits.

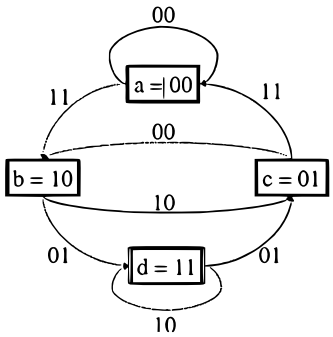

Figura 2.11: Diagrama de Estados

En dicho diagrama, las cajas representan los estados del codificador y las flechas indican las transiciones posibles entre estados, de manera que cada flecha parte del estado presente y apunta hacia el estado futuro según el bit de entrada. Sobre cada flecha se indica los dos bits de salida correspondientes a la entrada (línea discontinua para entrada 1 y línea continua para entrada 0). Observe cómo el número de flechas que parten de un estado determinado es 2^K e igual al número de flechas que llegan a cada estado .

Árbol de Estados

Podemos representar las relaciones entre las entradas y salidas de un código convolucional mediante el árbol de estados.

La figura muestra el árbol para el codificador del ejemplo. Las ramas con línea continua representan una entrada **0** al codificador y las de línea discontinua una entrada **1**. Los nodos correspondientes a los estados *00, 01, 10 y 11* se denominan S_0, S_1, S_2 y S_3 respectivamente.

Dado que la llegada de un nuevo bloque de k bits produce una transición a un nuevo estados, de cada estado parten $2k$ ramas de n bits. Para nuestro codificador, $k = 1$ y por tanto salen dos ramas de dos bits de cada estado.

La secuencia de salida del decodificador, se determina trazando la trayectoria de izquierda a derecha en el árbol en función de la entrada. La figura muestra la trayectoria a una entrada *1010* que produce la salida *00 11 10 00*.

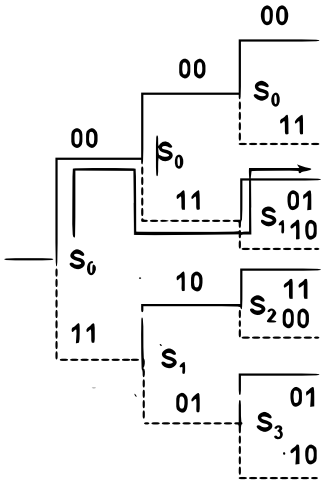

Figura 2.12: Árbol de Estados

A partir del instante M+1, la estructura de ramas se repite. Por tanto, los conjuntos de trayectos que se originan en los nodos que tienen el mismo estado son idénticos. Esta observación conduce al diagrama de Trellis.

Diagrama de Trellis

El diagrama de estados proporciona una buena información sobre las distintas transiciones de la máquina de estados del codificador, pero no permite ver la evolución de dichas transiciones ni sus salidas asociadas con el paso del tiempo, es decir, a medida que van llegando cadenas de k bits al codificador. Por este motivo, en los códigos convolucionales se suele utilizar el denominado diagrama de Trellis que sí permite ver la evolución temporal

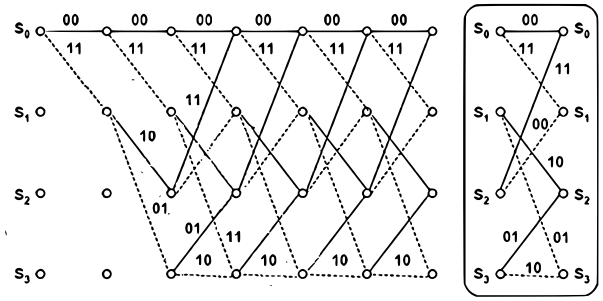

Figura 2.13: Diagrama de Trellis

La codificación de una determinada entrada, da lugar a un camino en el diagrama, que da lugar a una determinada salida y a unas determinadas transiciones de estados. Por ejemplo, la cadena *1100* tiene como salida la palabra código *11 10 10 11* determinado por el camino de la figura 2.14.

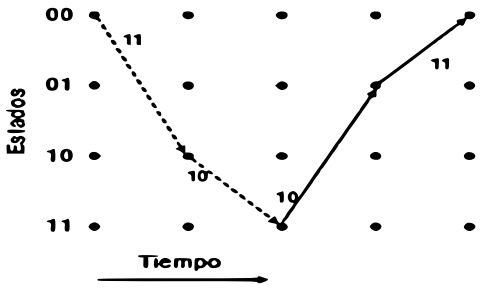

Figura 2.14: Palabra de Trellis

Decodificación

La decodificación puede realizarse mediante varios algoritmos como el de Viterbi, el de la decodificación secuencial o el de la decodificación con síndrome.

La técnica de decodificación más empleada es la de Viterbi, resultado de la aplicación del principio de máxima verosimilitud a la decodificación. El algoritmo selecciona el código que proporciona mayor valor de la métrica de verosimilitud, es decir, el código cuya métrica de distancia es la menor. Esta distancia es la distancia de Hamming de cada rama respecto a la palabra recibida. El algoritmo compara de manera iterativa los trayectos que entran en cada nodo reteniendo la métrica y el camino superviviente, cuya distancia es la menor de todas.

Además, si dos trayectos se juntan en un estado, el de mayor métrica acumulada se puede desechar ya que el estado actual depende de los estados anteriores. Por otra parte, un código de longitud restringida K tiene un Trellis con 2^{K-1} estados en cada intervalo t_i. A cada estado entran dos trayectos. La decodificación de Viterbi consiste en calcular las métricas de los trayectos que entran en cada estado y eliminar el de mayor métrica. Ello se hace en los 2^{K-1} estados, se pasa al intervalo t_{i+1} y se repite el proceso. Sobrevive una sola rama en cada intervalo cuando se han decodificado unos $5K$ intervalos posteriores. Ello representa un retardo en la decodificación.

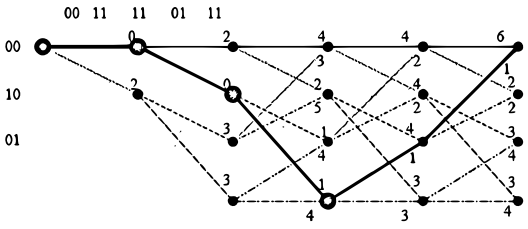

Figura 2.15: Decodificación Viterbi

Podemos seguir la trayectoria de la decodificación de izquierda a derecha y de arriba abajo, en cada rama, hemos representado la métrica con un número sobre dicha rama.

Aplicando las reglas de decodificación explicadas anteriormente, vamos descartando ramas en los nodos. Finalmente, el camino que da lugar a la decodificación es el de menor métrica.

Probabilidad de error

La probabilidad de error de bit, P_B para un código convolucional usando decisión dura, se puede aproximar por *la cota superior* [4]

$$P_B \leq \frac{dT(D,N)}{dN} \mid_{N=1,D=2\sqrt{p(1-p)}} \tag{2.44}$$

donde p es la probabilidad de error de símbolo del canal.

Para una modulación BPSK coherente sobre un canal AWGN, la probabilidad de error de bit será:

$$P_B \leq Q\left(\sqrt{2d_f\frac{E_c}{N_0}}\right) e^{\left(d_f\frac{E_c}{N_0}\right)} \frac{dT(D,N)}{dN} \mid_{N=1,D=exp(-E_c/N_0)} \tag{2.45}$$

2.4. Canal AWGN

El canal empleado es el canal Gaussiano o canal de ruido blanco aditivo gaussiano, $AWGN$[5].

Sea $x(t)$ la señal transmitida, $n(t)$ el ruido provocado por el canal, la señal tras el paso por el canal $y(t)$ es la suma de las señal transmitida y el ruido.

$$y(t) = x(t) + z(t) \tag{2.46}$$

El ruido blanco es una señal aleatoria (proceso estocástico) que se caracteriza por el hecho de que sus valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística. Como consecuencia, su densidad espectral de potencia (PSD)[6] es una constante, es decir, su gráfica es plana.

[4] Para más información sobre la cota superior consultar Curry, S. J.,*Selection of Convolutional Codes Having Large Free Distance*, Ph.D. dissertation, University of California, Los Angeles, 1971

[5] *Additive White Gaussian Noise*

[6] *Power Spectral Density*

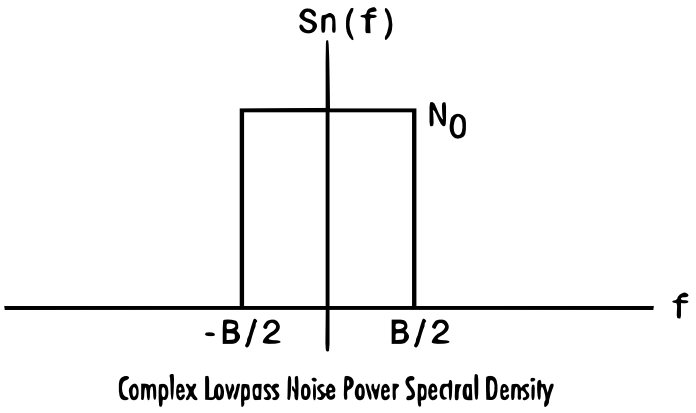

Figura 2.16: Densidad Espectral de Potencia Ruido Blanco