CAPÍTULO 5

Identificación y modelado del canal no lineal usando modelos Volterra-Parafac banda base.

[3]

Los modelos de Volterra en banda bases son muy útiles para la representación no lineal de canales de comunicación. Estos modelos presentan la especificación para incluir sólo los términos de orden impar no lineales, con núcleos caracterizados por una doble simetría. El inconveniente principal es su complejidad paramétrica. En este capítulo, desarrollamos una nueva clase de modelos de Volterra, llamada modelos de Volterra-Parafac en banda base, con una reducción de complejidad paramétrica, por el uso de la descomposición Parafac doblemente simétrica de núcleos de Volterra de orden alto vistos como tensores. Se proponen varios algoritmos adaptativos para la estimación de parámetros de estos modelos. En el capítulo siguiente se presentarán los resultados obtenidos según este estudio.

1. *Introducción.*

En comunicaciones por satélites, amplificadores de alta potencia a bordo de satélites y en estaciones terrestres trabajan, en ocasiones, en condiciones de saturación, las cuales introduce distorsión no lineal en las señales transmitidas. En redes de comunicaciones inalámbricas usando ondas de radio y fibras ópticas, convertidores electro-ópticos son, también, fuentes de no linealidades. Los modelos de Volterra en banda base son muy útiles para el modelado como los canales de comunicaciones no lineales. Lo específico de estos modelos es contener sólo términos de orden impar no lineales, con núcleos caracterizados por una doble simetría.

El principal inconveniente de estos modelos es su complejidad paramétrica la cual se incrementa rápidamente con el orden de la no linealidad de los sistemas y la memoria de los núcleos. Hay dos aproximaciones principales para reducir el número de parámetros libres en los modelos de Volterra como ya los vimos anteriormente, estás son: expandir los núcleos de Volterra sobre funciones bases ortonormales (Laguerre, Kautz o funciones de base ortonormal generalizada) o considerar los núcleos de Volterra de órdenes superiores como tensores y aplicar descomposición tensorial.

En el presente capítulo, se desarrolla una clase de modelos de Volterra en banda base, llamados modelos de Volterra-PARAFAC en banda base, de complejidad paramétrica reducida, usando una descomposición PARAFAC doblemente simétrica de núcleos de Volterra de órdenes altos considerados como tensores. Estos modelos pueden verse como una extensión de modelos de Volterra-PARAFAC, desarrollados por autores en el caso de núcleos de Volterra con una simple simetría.

Durante el capítulo se introduce modelos de Volterra banda base en tiempo discreto con núcleos de alto orden doblemente simétricos o triangulares que pueden ser empleados para el modelado de canales de comunicaciones no lineales. Seguidamente, se presenta la descomposición PARAFAC para un tensor con una doble simetría, y explotamos la descomposición para deducir los modelos de Volterra-PARAFAC banda base. Después, se proponen tres métodos adaptativos para la estimación de los parámetros de estos modelos: algoritmo la extensión compleja de flitros de Kalman (ECKF), *"complex least mean square"* (CLMS) y CLMS normalizado (NCLMS).

2. *Modelos de Volterra en banda base.*

El modelo de Volterra banda base en tiempo discreto para un canal de comunicación no lineal con memoria de entrada simple y salida simple (SISO) está descrito por las siguientes relaciones de entrada-salida:

$$y_k = \sum_{p=1}^{P} y_k^{(2p-1)} = \sum_{p=1}^{P} \sum_{m_1=0}^{M_{2p-1}-1} \cdots \sum_{m_{2p-1}=0}^{M_{2p-1}-1} h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1)} \times \prod_{i=1}^{p} u_{k-m_i} \prod_{i=p+1}^{2p-1} u_{k-m_i}^* \tag{5.1}$$

donde u_k e y_k indican las envolventes complejas de las señales de entrada y salida, respectivamente, 2P-1 es el grado de la no linealidad del modelo de Volterra, M_{2p-1} es la memoria del término homogéneo $y_k^{(2p-1)}$ de orden (2p-1), y $h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1)}$es el coeficiente del núcleo de Volterra de orden (2p-1). Este coeficiente está caracterizado por 2p-1 índices, esto puede ser visto como un elemento de un tensor $H^{(2p-1)} \in C^{M_{2p-1}\times\ldots\times M_{2p-1}}$, de orden 2p-1, caracterizado por M_{2p-1}^{2p-1} coeficientes. Como cada permutación de los índices $m_1,\ldots,m_p$ corresponde al mismo producto $\prod_{i=1}^{p} u_{k-m_i}$ de las entradas retrasadas, podemos sumar todos los coeficientes asociados con esas permutaciones para obtener un núcleo parcialmente simétrico.

Del mismo modo, cada permutación de los índices $m_{p+1}, \dots, m_{2p-1}$ correspondiente al mismo producto $\prod_{i=p+1}^{2p-1} u_{k-m_i}^*$ de las entradas conjugadas, podemos simetrizar el núcleo con respecto a estos últimos p-1 índices, los cuales resulta el siguiente núcleo con doble simetría:

$$h_{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_{2p-1}}^{(2p-1,sym)} = \frac{1}{n_{\pi_1} n_{\pi_2}} \sum_{\pi_1(.)} \sum_{\pi_2(.)} h_{\pi_1(m_1),\dots,\pi_1(m_p),\pi_2(m_{p+1}),\dots,\pi_2(m_{2p-1})}^{(2p-1)} \tag{5.2}$$

donde $\pi_1(m_1), \dots, \pi_1(m_p)$ y $\pi_2(m_{p+1}), \dots, \pi_2(m_{2p-1})$ expresan las permutaciones de los índices $m_1, \dots, m_p$ y $m_{p+1}, \dots, m_{2p-1}$, respectivamente, n_{π_1} y n_{π_2} representan el número de estas permutaciones.

Asumiendo que q y r son números de distintos valores en el conjunto $S_1 = \{m_1, \dots, m_p\}$ y $S_2 = \{m_{p+1}, \dots, m_{2p-1}\}$ respectivamente, e indicando $k_1, \dots, k_q$ y $t_1, \dots, t_r$ el número de apariciones de estos valores en S_1 y S_2, respectivamente, el total de permutaciones viene dado por:

$$n_{\pi_1} n_{\pi_2} = \frac{p!}{\prod_{i=1}^{q} k_i!} \frac{(p-1)!}{\prod_{i=1}^{r} t_i!} \tag{5.3}$$

Así que, en consecuencia, sin pérdida de generalidad, los núcleos de Volterra de orden impar con $p > 1$ se considerarán como tensores doblemente simétricos.

Definiendo el núcleo doblemente triangular de orden $2p-1$, para $p \geq 2$, como

$$h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1,tri)} = \begin{cases} n_{\pi_1} n_{\pi_2} h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1,sym)} & if \begin{array}{c} m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_p \; and \\ m_{p+1} \le m_{p+2} \le \cdots \le m_{2p-1} \end{array} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

(5.4)

los términos homogéneos de orden $(2p-1)$ en (5.1) pueden, también, escribirse de la siguiente forma doblemente triangular:

$$y_k^{(2p-1)} = \sum_{m_1=0}^{M_{2p-1}-1} \sum_{m_2=m_1}^{M_{2p-1}} \cdots \sum_{m_p=m_{p-1}}^{M_{2p-1}} \sum_{m_{p+1}=0}^{M_{2p-1}} \sum_{m_{p+2}=m_{p+1}}^{M_{2p-1}} \cdots \sum_{m_{2p-1}=m_{2p-2}}^{M_{2p-1}} h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1,tri)} \prod_{i=1}^{p} u_{k-m_i} \prod_{i=p+1}^{2p-1} u_{k-m_i}^*$$

(5.5)

con la ventaja de un modelo de Volterra en banda base con núcleos de orden alto doblemente triangulares. Este modelo siendo lineal en estos parámetros, los coeficientes del núcleo, el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados puede ser aplicado para estimar estos parámetros.

En el caso de señales de entradas de módulos constantes como entradas con desplazamientos en fase (PSK), la forma doblemente triangular (5.5) puede ser simplificada por un decremento del número de coeficientes de núcleo $h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1,tri)}$ caracterizados por parejas de índices (m_a, m_{p+b}) tal que $m_a = m_{p+b}$ con $a \in [1,p]$ y $b \in [1,p-1]$, los cuales $u_{k-m_a} u_{k-m_{p+b}}^* = constante$. Es más, los términos no lineales de orden $2p-1$ asociados con estos coeficientes degeneran términos de orden menor. La forma triangular (5.5) de los términos homogéneos de orden (2p-1) pueden ser reescritos de la siguiente forma triangular reducida:

$$y_k^{(2p-1)} = \sum_{m_1=0}^{M_{2p-1}-1} \sum_{m_2=m_1}^{M_{2p-1}} \cdots \sum_{m_p=m_{p-1}}^{M_{2p-1}} \underbrace{\sum_{m_{p+1}=0}^{M_{2p-1}} \sum_{m_{p+2}=m_{p+1}}^{M_{2p-1}} \cdots \sum_{m_{2p-1}=m_{2p-2}}^{M_{2p-1}}}_{m_{p+1},\ldots,m_{2p-1} \neq m_1,\ldots,m_p} \tilde{h}_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1,tri)} \prod_{i=1}^{p} u_{k-m_i} \prod_{i=p+1}^{2p-1} u_{k-m_i}^*$$

(5.6)

Para la forma triangular (5.5) y (5.6) en el núcleo de Volterra de tercer orden (p=2), el número de coeficientes es igual a $M_3^2\,(M_3+1)/2$ y $M_3^2\,(M_3-1)/2$, respectivamente.

3. *Modelos de Volterra-Parafac en banda base.*

Ahora, se introduce la descomposición PARAFAC para un tensor doblemente simétrico, y lo aplicaremos en los núcleos de Volterra de ecuación (5.1), los cuales se renombrarán modelos de Volterra-PARAFAC banda base.

3.1. *Descomposición Parafac de un tensor doblemente simétrico.*

Cualquier tensor de orden $(2p-1)$ $H^{(2p-1)} \in C^{M_{2p-1}\times\ldots\times M_{2p-1}}$, simétrico con respecto estos primeros p índices por un lado y estos últimos $p-1$ índices por otro lado, puede ser descompuesto usando una descomposición Parafac doblemente simétrica:

$$h_{m_1,\ldots,m_{2p-1}}^{(2p-1)} = \sum_{r=1}^{r_{2p-1}} \prod_{i=1}^{p} a_{m_i,r}^{(2p-1)} \prod_{i=p+1}^{2p-1} b_{m_i,r}^{(2p-1)}$$

(5.7)

donde $a_{m_i,r}^{(2p-1)}$ y $b_{m_i,r}^{(2p-1)}$ son entradas de las matrices factor $\boldsymbol{A}^{(2p-1)}$ y $\boldsymbol{B}^{(2p-1)} \in C^{M_{2p-1} \times r_{2p-1}}$, y r_{2p-1} expresa el rango de la doble simetría. Esta descomposición puede ser vista como una generalización de la descomposición Parafac simétrica para tensores simétricos.

Sustituyendo el núcleo de Volterra del término homogéneo de orden $2p-1$ en (5.1) por esta descomposición PARAFAC doblemente simétrica, obtenemos

$$y_k^{(2p-1)} = \sum_{m_1=0}^{M_{2p-1}-1} \cdots \sum_{m_{2p-1}=0}^{M_{2p-1}-1} \sum_{r=1}^{r_{2p-1}} \left(\prod_{i=1}^{p} a_{m_i,r}^{(2p-1)} \prod_{i=p+1}^{2p-1} b_{m_i,r}^{(2p-1)} \right) \times \prod_{i=1}^{p} u_{k-m_i} \prod_{i=p+1}^{2p-1} u_{k-m_i}^* \tag{5.8}$$

Re-ordenando el orden de los sumatorios se obtiene

$$y_k^{(2p-1)} = \sum_{r=1}^{r_{2p-1}} \prod_{i=1}^{p} \left(\sum_{m_i=0}^{M_{2p-1}-1} a_{m_i,r}^{(2p-1)} u_{k-m_i} \right) \times \prod_{i=p+1}^{2p-1} \left(\sum_{m_i=0}^{M_{2p-1}-1} b_{m_i,r}^{(2p-1)} u_{k-m_i}^* \right) \tag{5.9}$$

Definiendo el vector regresión lineal a la entrada $\boldsymbol{u}_k^{(2p-1)} = \left[u_k, \dots, u_{k-M_{2p-1}+1}\right]^T$, la expresión (5.9) se convierte en

$$y_k^{(2p-1)} = \sum_{r=1}^{r_{2p-1}} \left(\boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^T} \boldsymbol{A}_{.r}^{(2p-1)} \right)^p \times \left(\boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^H} \boldsymbol{B}_{.r}^{(2p-1)} \right)^{p-1} \tag{5.10}$$

donde $\boldsymbol{A}_{.r}^{(2p-1)}$ y $\boldsymbol{B}_{.r}^{(2p-1)}$ son las columnas r-ésima de las matrices de facores $\boldsymbol{A}^{(2p-1)}$ y $\boldsymbol{B}^{(2p-1)}$, respectivamente.

Sustituyendo (5.10) en (5.1) lleva al modelo Volterra-Parafac banda base:

$$y_k = \sum_{p=1}^{P} \sum_{r=1}^{r_{2p-1}} \left(\boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^T} \boldsymbol{A}_{.r}^{(2p-1)} \right)^p \times \left(\boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^H} \boldsymbol{B}_{.r}^{(2p-1)} \right)^{p-1} \tag{5.11}$$

con $r_1 = 1$ and $A_{.1}^{(2p-1)} = h_{m_1}^{(1)}$.

Notar que el número de coeficientes en este modelo, igual a $N_{VP} = M_1 + 2\sum_{p=2}^{P} M_{2p-1} r_{2p-1}$, está reducido drásticamente comparado con el modelo de Volterra en banda base, igual a $N_V = \sum_{p=1}^{P} M_{2p-1}^{2p-1}$. Por ejemplo, para un modelo de quinto orden (P=3) con M_1=M_3=M_5=10 y r_3=r_5=2, tenemos $N_{VP} = 90$ y $N_V =$ 101010. En la siguiente sección, se proponen tres métodos adaptativos para la estimación de los parámetros del modelo de Volterra-Parafac banda base (11). Primero presentamos el ECKF. Luego, desarrollamos el algoritmo con el descenso más excesivo, también llamado el algoritmo CLMS, y finalmente derivamos a una versión normalizada, el algoritmo rellamado NCLMS.

4. *Métodos de estimación de parámetros adaptativos para modelos de Volterra-Parafac banda base.*

1.1. *La extensión compleja del filtro de Kalman.*

Definición del vector paramétrico:

$$\theta^T = \left[\theta^{(1)^T} \ \dots \ \theta^{(2P-1)^T} \omega^{(3)^T} \ \dots \ \omega^{(2P-1)^T}\right] \tag{5.12}$$

con: $\theta^{(1)} = \boldsymbol{A}_{.1}^{(1)} \in C^{M_1 \times 1}$ (5.13)

y para $p = 2, \dots, P$:

$$\begin{cases} \theta^{(2p-1)} = vec\left(\boldsymbol{A}^{(2p-1)}\right) \in C^{M_{2p-1} r_{2p-1} \times 1} & (5.14) \\ \omega^{(2p-1)} = vec\left(\boldsymbol{B}^{(2p-1)}\right) \in C^{M_{2p-1} r_{2p-1} \times 1} & (5.15) \end{cases}$$

donde el operador $vec(.)$ forma un vector tomando la columna de la matriz argumento, la relación entrada-salida (5.11) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y_k = f(k, \theta) \tag{5.16}$$

Este modelo siendo no lineal respecto al vector paramétrico θ, aplicamos la extensión del filtro de Kalman para la ecuación de estado $\theta_{k+1} = \theta_k$, con una linealización de la ecuación medida, por ejemplo $f(k,\theta)$, alrededor de la última estimación $\hat{\theta}_{k-1}$calculada en el instante k-1:

$$y_k \approx f\big(k,\hat{\theta}_{k-1}\big) + \hat{g}_k^T\big(\theta - \hat{\theta}_{k-1}\big) + e_k \tag{5.17}$$

donde $\hat{g}_k = \frac{\partial f(k,\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{k-1}}$

y e_k se asume como un ruido blanco Gaussiano de varianza σ_e^2 .

El gradiente de la función $f(k,\theta)$ no lineal respecto al vector paramétrico θ puede ser calculado analíticamente por medio de la siguiente fórmula:

$$\hat{g}_k = \left[\hat{\varphi}_k^{(1)^T} \hat{\varphi}_k^{(3)^T} \ \dots \ \hat{\varphi}_k^{(2P-1)^T} \hat{\xi}_k^{(3)^T} \ \dots \ \hat{\xi}_k^{(2P-1)^T}\right]^T \tag{5.18}$$

con $\hat{\varphi}_k^{(1)} = \boldsymbol{u}_k^{(1)}$

(5.19)

y para p=2,…,P:

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(2p-1)} = \left.\frac{\partial f(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{(2p-1)}}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}} = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial f(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_R^{(2p-1)}}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}} - j\left.\frac{\partial f(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_I^{(2p-1)}}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}}\right]$$
$$= p\widehat{\boldsymbol{v}}_k^{(2p-1)} \oplus \boldsymbol{u}_k^{(2p-1)}$$

(5.20)

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(2p-1)} = \left.\frac{\partial f(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\omega}^{(2p-1)}}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}} = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial f(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\omega}_R^{(2p-1)}}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}} - j\left.\frac{\partial f(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\omega}_I^{(2p-1)}}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}}\right]$$
$$= (p-1)\widehat{\boldsymbol{w}}_k^{(2p-1)} \oplus \boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^*}$$

(5.21)

donde $\boldsymbol{\theta}^{(2p-1)} = \boldsymbol{\theta}_R^{(2p-1)} + j\boldsymbol{\theta}_I^{(2p-1)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(2p-1)} = \boldsymbol{\omega}_R^{(2p-1)} + j\boldsymbol{\omega}_I^{(2p-1)}$, j=$\sqrt{-1}$, y $\oplus$ indica el producto de Kronecker, con:

$$\widehat{\boldsymbol{v}}_k^{(2p-1)}=\left[\hat{\alpha}_k^{(2p-1,1)},\dots,\hat{\alpha}_k^{(2p-1,r_{2p-1})}\right]^T$$

(5.22)

$$\widehat{\boldsymbol{w}}_k^{(2p-1)}=\left[\hat{\beta}_k^{(2p-1,1)},\dots,\hat{\beta}_k^{(2p-1,r_{2p-1})}\right]^T$$

(5.23)

y, para r=1,..., r_{2p-1}:

$$\hat{\alpha}_k^{(2p-1,r)} = \left(\hat{\gamma}_k^{(2p-1,r)}\right)^{p-1}\left(\hat{\delta}_k^{(2p-1,r)}\right)^{p-1}$$

(5.24)

$$\hat{\beta}_k^{(2p-1,r)} = \left(\hat{\gamma}_k^{(2p-1,r)}\right)^p \left(\hat{\delta}_k^{(2p-1,r)}\right)^{p-2}$$

(5.25)

con

$$\hat{\gamma}_k^{(2p-1,r)} = \boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^T} \widehat{\boldsymbol{A}}_{.r}^{(2p-1)}(k-1)$$

(5.26)

$$\hat{\delta}_k^{(2p-1,r)} = \boldsymbol{u}_k^{(2p-1)^H} \widehat{\boldsymbol{B}}_{.r}^{(2p-1)}(k-1)$$

(5.27)

$\widehat{\boldsymbol{A}}_{.r}^{(2p-1)}(k-1)$ y $\widehat{\boldsymbol{B}}_{.r}^{(2p-1)}(k-1)$ se extraen de la estimación del vector paramétrico $\hat{\theta}_{k-1}$. Observando esto:

$$f\left(k, \hat{\theta}_{k-1}\right) = \widehat{\boldsymbol{\psi}}_k^T \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$$

(5.28)

con:

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}_k^T = \left[\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(1)^T} \frac{1}{2} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(3)^T} \ \dots \ \frac{1}{P} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(2P-1)^T} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(3)^T} \ \dots \ \frac{1}{P-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(2P-1)^T}\right]^T$$

(5.29)

las ecuaciones ECKF se resumen como las siguientes:

$\hat{e}_k = s_k - \hat{\psi}_k^T \hat{\theta}_{k-1}$

(5.30)

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \boldsymbol{G}_k \hat{e}_k$$

(5.31)

$$\Sigma_k = \widehat{\boldsymbol{g}}_k^T \boldsymbol{P}_{k-1} \widehat{\boldsymbol{g}}_k^* - \sigma_e^2$$

(5.32)

$$\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{P}_{k-1} \widehat{\boldsymbol{g}}_k^* \Sigma_k^{-1}$$

(5.33)

$$\boldsymbol{P}_k = \lambda^{-1}(\boldsymbol{P}_{k-1} - \boldsymbol{G}_k \Sigma_k \boldsymbol{G}_k^H)$$

(5.34)

donde s_k es la medida de la salida del canal que se quiere identificar, y λ es el factor de olvido.

1.2. Algoritmo complejo de la media de mínimos cuadrados (CLMS).

El algoritmo CLMS minimiza la función de coste:

$$J(k) = \frac{1}{2}|e_k|^2 = \frac{1}{2}\left(e_{k,R}^2 + e_{k,I}^2\right) \text{ con } e_k = e_{k,R} + j e_{k,I}$$

(5.35)

donde $e_{k,R} = s_{k,R} - f_R(k,\boldsymbol{\theta})$ y $e_{k,I} = s_{k,I} - f_I(k,\boldsymbol{\theta})$ son, respectivamente, la parte real e imaginaria de la señal residual $e_k = s_k - f(k,\boldsymbol{\theta})$, con $f(k,\boldsymbol{\theta}) = f_R(k,\boldsymbol{\theta}) + j f_I(k,\boldsymbol{\theta})$. Aplicando el algoritmo descendiente más rápido, obtenemos las siguientes ecuaciones actualizadas para los parámetros estimados:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(2p-1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^{(2p-1)} - \mu_{2p-1}\left[\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_R^{(2p-1)}} + j\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{\theta}_I^{(2p-1)}}\right]\Bigg|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}}$$

(5.36)

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}_k^{(2p-1)} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{(2p-1)} - \mu_{2p-1}\left[\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{\omega}_R^{(2p-1)}} + j\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{\omega}_I^{(2p-1)}}\right]\Bigg|_{\theta=\widehat{\theta}_{k-1}}$$

(5.37)

donde μ_{2p-1} es un tamaño de paso, pequeño y positivo, que controla la velocidad de convergencia y las propiedades con estado fijo del algoritmo CLMS. Usando la expresión (5.18) del gradiente de $f(.)$, obtenemos

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(2p-1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^{(2p-1)} + \mu_{2p-1}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(2p-1)^*}\hat{e}_k, \qquad p = 1, \dots, P$$

(5.38)

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}_k^{(2p-1)} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{(2p-1)} + \mu_{2p-1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(2p-1)}\hat{e}_k, \qquad p = 2, \dots, P$$

(5.39)

con $\hat{e}_k$ definido en (5.30).

1.3. Algoritmos complejo normalizado de la media de mínimos cuadrados.

Las actualizaciones paramétricas se obtienen por la normalización de los tamaños de los paso del algoritmo CLMS.

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^{(1)} + \frac{v_1}{c + \left\| \boldsymbol{u}_k^{(1)} \right\|_2^2} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(1)^*} \hat{e}_k \tag{5.40}$$

y para p=2,…,P:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(2p-1)} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^{(2p-1)} + \frac{v_{2p-1}}{c + \left\| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(2p-1)} \right\|_2^2} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(2p-1)^*} \hat{e}_k \tag{5.41}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}_k^{(2p-1)} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{(2p-1)} + \frac{v_{2p-1}}{c + \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(2p-1)} \right\|_2^2} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(2p-1)^*} \hat{e}_k \tag{5.42}$$

donde v_{2p-1} $p = 1, \dots, P$ son los tamaños de los pasos para el algoritmo NCLMS y c es una constante pequeña y positiva introducida para la elusión de problemas de cálculo cuando $\left\| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_k^{(2p-1)} \right\|_2$ y $\left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^{(2p-1)} \right\|_2$ lleguen a ser cercanos a cero, como es el caso de los valores de entradas pequeños.