

CAPÍTULO 1

BASES TEÓRICAS

1.1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la conductividad tanto térmica como eléctrica de los materiales ha sido analizado en los últimos años desde muy diversas perspectivas, para un gran número de materiales, tanto metálicos como no metálicos. Dichos estudios han intentado establecer las influencias que los distintos parámetros, bien por sí mismos, en conjunto, o con predominancia de unos sobre otros, ejercen sobre la conductividad del material.

Las expresiones obtenidas de la conductividad térmica efectiva para metales a menudo se han supuesto válidas para la conductividad eléctrica efectiva y viceversa. Tal asimilación, no obstante, sólo es válida siempre que el mecanismo dominante sea el de conducción y se suponga que la conductividad de los poros es nula. Esta última suposición es perfectamente válida en el caso eléctrico, tanto si los poros están vacíos como si están llenos de un gas (a menos que la tensión fuera tan elevada que produjera la ruptura dieléctrica). Para el caso térmico, sin embargo, es una buena aproximación si los poros están vacíos y la radiación es insignificante, pero no es tan bondadosa, si los poros están llenos de algún fluido. Esto es así porque los gases son mejores aislantes eléctricos que térmicos. No obstante, la mayoría de los investigadores han partido de estas premisas, que en la práctica suponen limitarse a porosidades no muy grandes y temperaturas no muy altas, logrando resultados aceptables.

El objeto de este estudio es la resistividad eléctrica, uno de los factores determinantes de la resistividad eléctrica es el tipo de material constituyente y sus características estructurales. Otro factor, no menos importante, es la presencia de impurezas en los materiales

metálicos, ya que pueden llegar a aumentar al triple la resistividad eléctrica con concentraciones mínimas de dichas impurezas.

No obstante, nuestra línea de investigación se centra en la influencia de la porosidad de las muestras, fabricadas a partir de polvo de cada material compactado y posteriormente sinterizado (esto último para eliminar la capa de óxido existente alrededor de cada partícula asegurando de esta forma el buen contacto entre estas).

1.2 ECUACIONES Y MODELOS PROPUESTO

1.2.1 Consideraciones iniciales ^[1]

Como se ha comentado, la resistividad eléctrica en un agregado de polvos dependerá no sólo del material, sino del grado de compactación de la muestra. Este grado de compactación, relacionado directamente con la porosidad de la muestra, puede también relacionarse con el área efectiva S_E que la corriente eléctrica encontrará para atravesar la muestra. El área efectiva, a su vez, puede relacionarse con el área nominal S_N o área exterior del compacto a través de la porosidad de la muestra.

En la figura 2.1 se muestra la variación de la relación de áreas (S_E/S_N) frente a la porosidad relativa ($\Theta_R = \Theta/\Theta_M$), siendo Θ_M la porosidad de golpeo del polvo, calculada según se indica en el capítulo 3. Esta relación se ha calculado suponiendo la deformación de una partícula esférica y extrapolando los resultados para un agregado de polvos caracterizado por su porosidad de golpeo Θ_M .

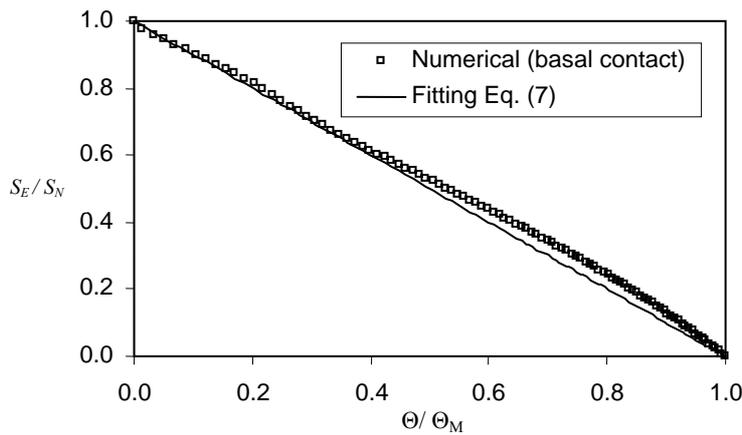


Figura 1.1: Relación de áreas frente a la porosidad relativa para compresión uniaxial por medio de cálculos numéricos, representando la ecuación (1).

Se ha propuesto la siguiente ecuación de ajuste para los valores numéricos de la figura 2.1, que relaciona la porosidad relativa y la relación áreas (S_E / S_N) para el caso que nos ocupa, i.e. compresión uniaxial, Ecuación (1).

$$S_E / S_N = 1 - \Theta_R \tag{1}$$

1.2.2 Ecuación de la Conductividad y Resistividad eléctrica de agregados de polvos compuestos por partículas compactadas uniaxialmente.

Nuestro objetivo ahora no será otro que el calcular la resistividad eléctrica en función de la porosidad de un sistema de polvos real compuesto un agregado de partículas.

La conducción eléctrica o térmica (σ) de un material macizo puede ser calculada a partir del valor de su conductividad. Para un

material de sección (S_N) y longitud (L_N), la conducción eléctrica o térmica se obtiene a partir de la expresión,

$$\sigma = g_0 \frac{S_N}{L_N} \quad (1)$$

dónde g_0 es la conductividad del material macizo.

Si consideramos ahora un compacto poroso de dimensiones análogas al anterior. La conductancia (σ') del compacto poroso (a priori inferior a la del material macizo) se puede calcular a partir de dos expresiones. Una considerando que el compacto poroso tiene una conductividad efectiva g_E , inferior a la conductividad del material macizo g_0 .

La expresión es,

$$\sigma' = g_E \frac{S_N}{L_N} \quad (2)$$

o, considerando que la conductividad del material no cambia g_0 , pero teniendo en cuenta que al tratarse de un compacto poroso la sección y longitud de paso son diferentes a la del material macizo. La sección efectiva S_E será inferior a la del material macizo y la longitud efectiva L_E superior, la expresión es,

$$\sigma' = g_0 \frac{S_E}{L_E} \quad (3)$$

donde S_E y L_E son función del grado de porosidad (Θ), combinando la ecuación 2 y 3 se obtiene la expresión de la conductividad efectiva g_E , en función de la conductividad del material macizo g_0 y el grado de porosidad. El problema es conocer, S_E y L_E en función de la porosidad.

Algunos autores han propuesto las siguientes expresiones (ecuación propuesta en el apartado 2.2.1),

$$S_E = S_N (1 - \Theta / \Theta_M) \quad (4)$$

$$L_E = L_N \left(\frac{1 - \Theta}{1 - \Theta / \Theta_M} \right) \quad (5)$$

donde Θ_M es la porosidad de golpeo. Esta porosidad es la del material cuando se vibra, sin aplicar ninguna carga de compactación.

En la ecuación 4 se puede comprobar que, si $S_E \rightarrow S_N$ la $\Theta \rightarrow 0$ (material macizo), y si $S_E \rightarrow 0$ la $\Theta \rightarrow \Theta_M$ (situación donde el contacto entre partículas son puntos). En la ecuación 5 se puede comprobar que, si $L_E \rightarrow L_N$ la $\Theta \rightarrow 0$, pero si $L_E \rightarrow \infty$ la $\Theta \rightarrow \Theta_M$ (en este caso la continuidad entre las partículas es inexistente).

Sustituyendo la ecuación 4 y 5 en la ecuación 3 se obtiene,

$$\sigma' = g_0 \frac{S_N (1 - \Theta / \Theta_M)^2}{L_N (1 - \Theta)} \quad (6)$$

e igualando la ecuación 2 y 6 se obtiene:

$$g_E = g_0 \frac{(1 - \Theta/\Theta_M)^2}{(1 - \Theta)} \quad (7)$$

La porosidad relativa se define como $\Theta_R = \Theta/\Theta_M$, sustituyéndolo en la ecuación 7 se obtiene g_E en función de la porosidad relativa,

$$g_E = g_0 (1 - \Theta/\Theta_M)^t = g_0 (1 - \Theta_R)^t \quad (8)$$

donde el exponente se calcula a partir de la expresión:

$$t = 1 + (1 - \Theta_M)^{\frac{4}{5}} \quad (9)$$

La expresión 8 se obtiene mediante una buena aproximación por mínimos cuadrados. Es una expresión simple que presenta una gran similitud con la ecuación de filtración, de hecho con una simple manipulación algebraica se obtiene,

$$\begin{aligned} g_E &= g_0 (1 - \Theta_R)^t = \\ &= g_0 \left(\frac{\Theta_M - \Theta}{\Theta_M} \right)^t = \\ &= g_0 \left(\frac{1 - \Theta - 1 + \Theta_M}{\Theta_M} \right)^t \end{aligned} \quad (10)$$

el término $(1-\Theta)$ coincide con la densidad relativa f , definiendo $f_c = (1-\Theta_M)$, se obtiene,

$$\begin{aligned} g_E &= g_0 \left(\frac{f-f_c}{1-f_c} \right)^t = \\ &= \frac{g_0}{(1-f_c)^2} (f-f_c)^t \end{aligned} \tag{11}$$

o,

$$g_E \propto (f-f_c)^t \tag{12}$$

Esto es lo que indica la teoría de la filtración, admitiendo que la porosidad de golpeo representa el valor límite de la filtración. El valor del exponente estará en torno a 2 (depende de la porosidad de golpeo). Este resultado ya ha sido indicado por diferentes autores.

En la expresión (8) se puede comprobar que cuando, $g \rightarrow g_0$ la $\Theta \rightarrow 0$, y $g \rightarrow \infty$ la $\Theta \rightarrow \Theta_M$.

Expresando la inversa de la Ec. (8), obtenemos la ecuación de la resistividad eléctrica relativa en función de la porosidad relativa (ecuación objeto de estudio),

$$\rho_R = (1-\Theta_R)^{-t} \tag{13}$$

donde,

ρ_R , resistividad relativa (ρ_E / ρ_0)

Θ_R , porosidad relativa (Θ / Θ_M)

ρ_0 , resistividad del material macizo

ρ_E , resistividad efectiva

Θ , porosidad

Θ_M , porosidad de golpeo

t se obtiene de la ec.(9)

1.3 RESEÑAS HISTÓRICAS

Una expresión muy conocida, y probablemente la más antigua, fue propuesta por Maxwell^[2] en 1873. Si se considera que los poros no están en contacto unos con otros (porosidad aislada), la expresión de Maxwell adopta la forma,

$$\frac{g_E}{g_0} = \frac{2(1-\Theta)}{2+\Theta} \quad (1)$$

donde g_E es la conductividad térmica efectiva (o aparente) del material poroso, g_0 es la conductividad del material macizo, y Θ , la porosidad del material. La relación se ha demostrado sólo válida para porosidades pequeñas.

En 1924, Fricke^[3] propuso la siguiente expresión,

$$\frac{g_E}{g_0} = \frac{(1-\Theta)}{1-(1-f)\Theta} \quad (2)$$

donde f es un factor que puede variar desde 1.5, para poros esféricos, hasta infinito, para poros en forma de discos de espesor muy fino.

En 1954, Loeb^[4], asumiendo que la fase sólida era continua, que los poros eran isométricos, se distribuían uniformemente y su conductividad era nula, propuso una nueva ecuación,

$$\frac{g_E}{g_0} = (1 - A\Theta) \quad (3)$$

donde A es un parámetro comprendido entre 1 y 2. Esta expresión se ha encontrado adecuada sólo cuando las porosidades son pequeñas (inferiores a 0.3) y resulta también válida para la conductividad eléctrica.

En 1969, Murabayashi^[5] propuso una ecuación de naturaleza empírica,

$$\frac{g_E}{g_0} = \left[2 - 3(1 - (1 - \Theta)^n) \right] \left(\frac{1 - \Theta}{2 + \Theta} \right) \quad (4)$$

Los modelos de Maxwell, Loeb y Murabayashi fueron contrastados experimentalmente para el problema térmico por El-Fekey y col^[6] en 1978, sobre compuestos de thoria en un intervalo de porosidades de 0.19 a 0.46 y con poros de forma irregular. La relación de Murabayashi se reveló como la más apropiada de las tres para explicar los resultados experimentales.

En 1971, Koh propuso la relación^[7],

$$\frac{g_E}{g_0} = \frac{1 - \Theta}{1 + 10\Theta^2} \quad (5)$$

La ecuación fue validada con experiencias térmicas, para diversos materiales y en el rango de porosidades de 0.9 a 0.38.

Meyer^[8] propuso en 1972 una nueva expresión,

$$\frac{g_E}{g_0} = \frac{K(1-\Theta)}{K+\Theta} \quad (6)$$

donde K era un factor de textura, que podía variar desde cero, para una textura estratificada perpendicular al flujo, hasta infinito, para una textura filamentosa paralela al flujo. La expresión de Maxwell ec(1) es un caso particular de esta expresión, cuando $K = 2$. Mediante experiencias eléctricas, Simchi y col.^[9] encontraron que las ecuaciones de Meyer y Fricke, entre otras muchas, eran las que mejor se ajustaban a los resultados experimentales.

En 1981, Schulz^[10] realizó un completo estudio del problema térmico que abarcaba no sólo a los materiales porosos continuos (con porosidad cerrada y abierta), sino también a los agregados de polvos. Con respecto a los materiales continuos, encontró para las situaciones de porosidad cerrada,

$$\frac{g_E}{g_0} = (1-\Theta)^X \quad \text{con} \quad X = \frac{1-\cos^2 \alpha}{1-f} + \frac{\cos^2 \alpha}{2f} \quad (7)$$

y para las situaciones de porosidad abierta:

$$(1-\Theta)(g_0 - g_E) \left[\frac{2(1-\cos^2 \alpha)}{g_0 + g_E} + \frac{\cos^2 \alpha}{g_E} \right] = \Theta(2 - \cos^2 \alpha)$$

siendo f y $\cos^2 \alpha$ los factores de forma y orientación de los poros, respectivamente. Un caso particular de la ecuación (7) lo constituye la ecuación de Skorohod-Solonin,

$$\frac{g_E}{g_0} = (1 - \Theta)^{3/2} \quad (8)$$

Más recientemente, Argento y col. [11] propusieron la siguiente relación cuasiempírica, aplicable a un agregado de polvo, con porosidad inicial Θ_0 , sometido a compresión,

$$\frac{g_E}{g_0} = \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_0}\right)^{\frac{3}{2}\Theta_0}$$

La Tabla 1 muestra algunas de las expresiones propuestas por los diferentes autores:

Autor	Año	Conductividad Relativa (g_E/g_0)	Resistividad Relativa (ρ_E/ρ_0)
Maxwell	1873	$\frac{2(1-\Theta)}{2+\Theta}$	$\frac{2+\Theta}{2(1-\Theta)}$
Fricke	1924	$\frac{(1-\Theta)}{1-(1-f)\Theta}$	$\frac{1-(1-f)\Theta}{(1-\Theta)}$
Loeb	1954	$(1-A\Theta)$	$(1-A\Theta)^{-1}$
Murabayashi	1969	$[2-3(1-(1-\Theta)^n)] \left(\frac{1-\Theta}{2+\Theta} \right)$	$[2-3(1-(1-\Theta)^n)]^{-1} \left(\frac{2+\Theta}{1-\Theta} \right)$
Koh	1971	$\frac{1-\Theta}{1+10\Theta^2}$	$\frac{1+10\Theta^2}{1-\Theta}$
Meyer	1972	$\frac{K(1-\Theta)}{K+\Theta}$	$\frac{K+\Theta}{K(1-\Theta)}$
Schulz	1981	$(1-\Theta)^X$	$(1-\Theta)^{-X}$
Argento	1996	$\left(1-\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)^{\frac{3}{2}\Theta_0}$	$\left(1-\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)^{-\frac{3}{2}\Theta_0}$

Tabla 1.1: Resumen ecuaciones históricas

1.4 MEDIDA DE RESISTENCIAS DE BAJO VALOR ^[12]

El general, el calificativo de pequeño o grande es relativo y su asignación a un objeto o valor es consecuencia de un proceso de comparación con objetos o valores considerados dentro de lo normal; depende en gran medida del contexto en que nos encontremos. Así, una misma resistencia puede ser muy pequeña insertada en un

determinado esquema y muy grande considerada en otro.

Consideraremos como **resistencia óhmica pequeña o de bajo valor**, a la correspondiente a un elemento cuando el valor óhmico de los medios de interconexión utilizados en la aplicación de ese elemento, o en el proceso de su medición in situ o en Laboratorio, no es despreciable respecto del valor del elemento en cuestión. A su vez, el concepto «despreciable» dependerá de la precisión con que se pretenda determinar el valor de la resistencia del citado elemento.

Así por ejemplo, un valor de resistencia parásita de 10 mΩ frente a una resistencia a medir de 10 Ω es despreciable si nos conformamos con obtener una precisión 2%, y no es en absoluto despreciable si pretendemos alcanzar una precisión mejor del 0'1 %.

Es por tanto temerario aventurar cifras límites a partir de las que una resistencia puede ser calificada de pequeña. No obstante, para tener una idea del orden de magnitud, y con todas las reservas del caso, se puede empezar a calificar de pequeña la resistencia de un elemento cuyo valor sea inferior a 10 ohmios.

A título de ejemplo de necesidad de medición de elementos que presentan resistencias de estas características podemos citar los siguientes:

- Resistencias de arrollamientos de Máquinas Eléctricas cuya determinación va a permitir la evaluación de la potencia perdida en dicha máquina por efecto Joule y que será una de las causas que incidirán en su rendimiento, por una parte, y en las necesidades de refrigeración por otra.

- Resistencias de elementos de contactos eléctricos entre dos conductores, removibles o no, tales como interruptores, conmutadores, seccionadores o simplemente empalmes. La determinación de su valor también va a permitir delimitar el valor de la intensidad de uso bajo el aspecto térmico nuevamente.

- Determinación para comprobación o ajuste en la fabricación del valor de la resistencia de Shunts de medida que constituyen parte de los sistemas de ampliación de alcances para medida de intensidades elevadas casi exclusivamente en corriente continua.

- Determinación de resistividades volumétricas o específicas de materiales conductores con objeto de comprobar la calidad de la materia prima de la que están contruidos, o simplemente comprobación de las características de conducción, generalmente expresada en ohmios por metro (o por Km.) de cables y/o conductores comerciales para líneas o instalaciones eléctricas.

1.4.1 Consideraciones específicas

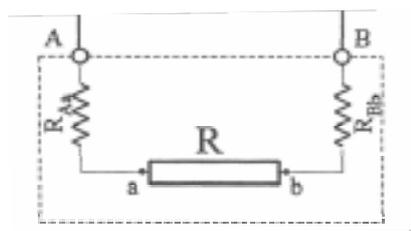


Figura 1.2

La figura 1.2 visualiza los elementos que constituyen un elemento cualquiera de los que acabamos de citar: el elemento en cuestión tiene un valor de $R\Omega$ entre sus extremos a y b, pero su conexionado interno hacia las bornas destinadas a su interconexión

con el exterior A y B, así como estas mismas, no están carentes de resistencia óhmica, pequeña pero distinto de cero, a las cuales hemos querido significar como R_{Aa} Y R_{Bb} , por lo que el conjunto, visto desde los terminales A y B presenta en total un valor óhmico:

$$R_{AB} = R + (R_{Aa} + R_{Bb}) \quad (13)$$

Expresión en la que los términos entre paréntesis, y para el tipo de resistencias de las que nos ocuparemos en este capítulo, constituyen un incremento del valor auténtico de la resistencia del elemento en juego R considerado entre los puntos a y b que puede resultar inadmisibile, ya que el error cometido, y cuya evaluación es sencilla, ecuación (14), puede resultar inaceptablemente grande, aunque pueda ser corregido si se ha evaluado previamente el valor de las resistencias parásitas:

$$\alpha = R_{Aa} + R_{Bb} \quad \text{y} \quad \varepsilon (\%) = 100 \cdot \frac{R_{Aa} + R_{Bb}}{R} \quad (14)$$

Esta corrección no resulta viable en el caso en que dichas resistencias parásitas pueden estar sujetas a variaciones ambientales, climáticas o de cualquier otra naturaleza como puede suceder en el caso de que, en todo o en parte, estuvieran constituidas por elementos de contacto tales como colectores de máquinas o interruptores eléctricos.

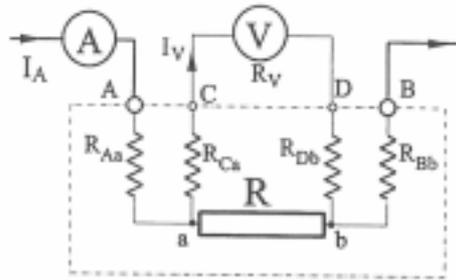


Figura 1.3

Para paliar, en la medida de lo posible, los efectos de las resistencias indeseables; es conveniente y en muchas ocasiones imprescindible, proveer al elemento considerado de otras dos bornas, las marcadas como C y D en la figura 1.3, las cuales conectan a través de conductores, también dotados de valor óhmico, los puntos a y b con el exterior.

Con ello se consigue que si se alimenta el elemento cuya resistencia es R a través de las bornas A y B (denominadas amperimétricas) con una intensidad I_A indicada por el amperímetro, y se mide su caída de tensión conectando un voltímetro de alta resistencia entre las bornas C y D (denominadas voltimétricas), la diferencia de potencial entre los puntos a y b en vacío (antes de conectar el voltímetro) sería:

$$U_{ab0} = R \cdot I_A \quad (15)$$

y la tensión aparecida en el voltímetro sería la tensión de vacío anterior menos las caídas de tensión producidas en la propia resistencia a medir R y en las resistencias parásitas R_{Ca} y R_{Db} por la pequeña corriente consumida por el voltímetro.

Por todo lo dicho y para poder garantizar el valor de una resistencia pequeña es por lo que se deben prevenir en éstas dos

pares de bornas, uno de ellos AB de conexión con el exterior, llamado también amperimétrico o de corriente y otro CD de medida, voltimétrico o de tensión entre los que se produce una caída de tensión en vacío correspondiente al verdadero valor de dicha resistencia. Por tanto, el uso de *dos pares de bornas* es una característica imperativa y diferencial en el uso y en la medición precisa de resistencias pequeñas.

Otra característica propia es el bajo valor de las diferencias de potencial en juego al tener limitado el valor de la intensidad por razones de disponibilidad y de calentamiento. La realización de la medida en *corriente continua* es aún más necesaria en este caso ya que las pequeñas inductancias pueden aportar tensiones parásitas no deseables. Por último, las pequeñas *fe.m. de origen termoeléctrico* podrían representar un elemento de error no desdeñable, en cuyo caso se podría minimizar su efecto realizando dos mediciones con distintos sentidos de corriente de alimentación y obteniendo el promedio de ambas.

Todo lo expuesto justifica sobradamente el tratamiento independiente de las técnicas propias y exclusivas de medición de este tipo de resistencias.

1.4.2 Medida por caída de tensión

El esquema de este procedimiento corresponde exactamente al de la figura 1.3 La intensidad I se mide con un amperímetro o sistema amperimétrico, mientras que la tensión U_{CD} se mide con un elemento de medida voltimétrico que debe tener un alcance pequeño, ya que las tensiones en juego en este tipo de resistencias son del orden de milivoltios e incluso menos. Teniendo en cuenta que el sistema voltimétrico, en general, presentará una conductancia

distinta de cero, se derivará por él una intensidad i_v de carga. Es preciso, pues, conocer el valor de ésta para poder deducirla de la intensidad total que es introducida desde el exterior. En efecto de la figura se desprende:

$$R \cdot (I - i_v) = (R_v + R_{ca} + R_{Db}) \cdot i_v = (R_v + r_{par}) \cdot i_v \quad (16)$$

Llamando r_{par} a la suma de las resistencias parásitas entre e y a y entre **D** y **b** así como las de los conductores de conexión entre los terminales C y D y los del propio voltímetro.

Y también:

$$R = \frac{(R + r_{par}) \cdot i_v}{I - i_v} = \frac{V}{I} \cdot \left(\frac{r_{par} + \frac{V}{I}}{R_v - \frac{V}{I}} \right) \quad (17)$$

Que como se ve presenta un error sistemático muy pequeño correspondiente, en valor relativo, al cociente del paréntesis del segundo miembro de la expresión anterior, ya que su numerador corresponde a valores pequeños y el denominador contiene el de la resistencia interna del voltímetro que, como es sabido, suele ser elevado.

La precisión de este procedimiento corresponde a la de los instrumentos de medida de tensión y de corriente.

1.4.3 Medidas con procedimientos de compensación (puentes)

Cuando no se dispone de voltímetros con la sensibilidad

suficiente para medir con garantía los pocos milivoltios de caída de tensión que una intensidad manejable provoca en una resistencia de valor muy pequeño. Es preciso recurrir a procesos que utilicen detectores de cero tales como puentes.

El puente de Wheatstone convencional no es utilizable si tenemos en cuenta que, en general, habrá una resistencia de comparación, de valor también pequeño, y que tanto ésta como la incógnita presentan cuatro bornas cada una, siendo por tanto imposible realizar una medida en la que no intervengan los valores de la resistencia de las conexiones que pueden no ser despreciables frente a los valores manejados.

Se han diseñado, pues, procedimientos y puentes específicos para este tipo de necesidad que pasamos a describir.

1.4.3.1 Procedimiento de Matthiessen y Hockin

Es una variante del puente de hilo en la que se realizan cuatro equilibrados distintos, uno para cada una de las cuatro posiciones del conmutador. Su esquema puede verse en la Fig. 1.4 Se precisa una resistencia patrón conocida R_N que conviene, por razones de sensibilidad como veremos más adelante, sea del mismo orden de magnitud que la incógnita R_x . Ambas se conectan en serie constituyendo una de las dos ramas del puente de valor total R_T junto con las resistencias parásitas de interconexión y bornas r_{1B} , r_{23} y r_{4A} .

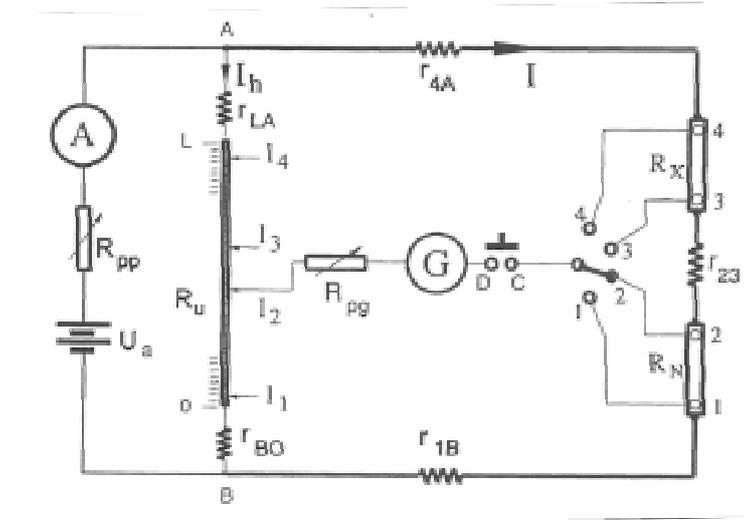


Figura 1.4: Puente de MATHIESSEN & HOCKIN

La otra rama está constituida por una resistencia lineal de cursor y variación continua bien de hilo resistivo calibrado o de potenciómetro multivuelta de precisión, de resistencia R_u por unidad de lectura, cuyo valor supondremos ligeramente variable a lo largo de toda su longitud total L , más las inevitables resistencias parásitas de conexión r_{BO} y r_{LA} haciendo un total de r_T .

Las dos ramas se conectan en derivación con lo que en todo momento ambas están sometidas a la misma diferencia de potencial, y con independencia del valor total de la intensidad consumida, su reparto entre las dos ramas será constante, es decir, el cociente entre ambas intensidades será invariable siempre que por la rama del galvanómetro no se derive corriente, circunstancia que acontecerá en cada uno de los cuatro puntos de equilibrio I_1 , I_2 , I_3 y I_4 .

En cada uno de ellos, la igualdad de tensiones respecto al punto común B de los D y C , implica la proporcionalidad de los tramos de resistencia de ambas ramas entre las posiciones de equilibrio y el punto B con razón de proporción r_T/R_T . Así:

Punto 1:

$$r_{B0} + Ru_1 \cdot l_1 = r_{1B} \cdot \frac{I}{I_h} = r_{1B} \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (18)$$

Punto 2:

$$r_{B0} + Ru_2 \cdot l_2 = (r_{1B} + R_N) \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (19)$$

Punto 3:

$$r_{B0} + Ru_3 \cdot l_3 = (r_{1B} + R_N + r_{23}) \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (20)$$

Punto 4:

$$r_{B0} + Ru_4 \cdot l_4 = (r_{1B} + R_N + r_{23} + R_x) \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (21)$$

O también:

Punto 4:

$$r_{LA} + Ru_L \cdot (L - l_4) = r_{4A} \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (22)$$

Restando por parejas estas ecuaciones se pueden eliminar los valores de las resistencias parásitas:

$$Ru_L \cdot (l_2 - l_1) = r_N \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (23)$$

Restando (20) Y (21):

$$Ru_{34} \cdot (I_4 - I_3) = r_x \cdot \frac{r_T}{R_T} \quad (24)$$

y finalmente dividiendo (23) y (24):

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{Ru_{34} \cdot I_4 - I_3}{Ru_{12} \cdot I_2 - I_1} \quad (25)$$

Suponiendo que el cociente entre los valores de las resistencias unitarias del hilo sea igual a la unidad con una incertidumbre llamada de linealidad, que habrá que añadir al resto de incertidumbres, se obtiene la expresión final:

$$\boxed{R_x = R_N \cdot \frac{I_4 - I_3}{I_2 - I_1}} \quad (26)$$

Que proporciona el valor de la resistencia incógnita en función de los de la patrón y los de los diferentes puntos de equilibrado, eliminando así la influencia de las resistencias parásitas de las conexiones en el valor obtenido. No obstante, la presencia de dichas resistencias parásitas se deja sentir, bien sea influyendo en las incertidumbres de lectura o insensibilidad, como veremos más adelante, o bien haciendo imposible la consecución de alguno de los dos equilibrados correspondientes a los puntos 1 o 4. Esto acaecerá cuando las resistencias parásitas r_{B0} o r_{4A} sean desproporcionadamente elevadas respecto a r_{1B} o r_{4A} .

En efecto, de la ecuación (18) se puede despejar el valor de la lectura I_1 :

$$I_1 = \frac{R_{IB} \cdot \frac{r_T}{R_T} - r_{B0}}{Ru_1} \quad (27)$$

Que, como puede verse, puede proporcionar valores negativos en caso de predominio del substraendo del numerador.

Análogas consideraciones son aplicables al equilibrado I_4 que podría resultar ser superior a la lectura máxima L .

Por consiguiente puede hacerse preciso tomar precauciones para eliminar los anteriores inconvenientes que imposibilitarían la medida; cabrían dos opciones:

- Reducir el valor de r_{B0} o r_{LA} reforzando secciones, que es la más sensata, o
- Incrementar el valor de R_{IB} o R_{4A} reduciendo secciones cuando la anterior no pueda llevarse a efecto.

Este procedimiento permite evaluar con precisión media/baja resistencias del orden de la décima de mili ohmio e incluso menos, dependiendo de la sensibilidad del detector de cero.

1.4.3.2 Precisión

La expresión deducida de la (25):

$$R_x = R_N \cdot \frac{Ru_{34} \cdot I_4 - I_3}{Ru_{12} \cdot I_2 - I_1} \quad (28)$$

Proporciona el valor exacto de la resistencia a medir en función de los valores exactos de cada una de las variables en juego; por tanto la incertidumbre en el conocimiento exacto de tales valores repercutirá y tendrá su peso en la incertidumbre (o error) de la medida. La valoración pasará por la evaluación de las incertidumbres de cada una y de la aplicación de la técnica general de errores en medidas complejas.

Por tanto, la precisión relativa garantizable debida a la incertidumbre de los valores de los instrumentos resulta ser la suma (o raíz cuadrada de los cuadrados de las sumas de las siguientes incertidumbres):

- Precisión de la resistencia de comparación o *error de clase*.
- Precisión del valor I , como cociente de los valores supuestamente iguales de las resistencias unitarias, error al que denominaremos *error de linealidad* que se suele conocer.
- y precisión del cociente entre las diferencias de lecturas al que llamaremos *error de lectura o resolución*.

Respecto al *error de linealidad* se evaluará como la mayor diferencia relativa de la resistencia por unidad de lectura en cualquier punto respecto al valor promedio de la misma.

Respecto al *error de resolución* señalaremos que cada una de las lecturas I_1 a I_4 estarán afectadas, en general, por una incertidumbre que suele tener un valor absoluto constante α_1 . Por tanto, cada uno de los términos diferencia del numerador o denominador se verá afectado, en el peor de los casos y en términos absolutos, por el doble de este valor, uno para cada lectura. Por

consiguiente, dicho error afectará, en valor relativo, al cociente resultando finalmente:

$$\varepsilon(\%) = 200 \cdot \alpha_1 \cdot \left[\frac{1}{I_2 - I_1} + \frac{1}{I_4 - I_3} \right] \quad (29)$$

1.4.3.3 Error de insensibilidad del galvanómetro

La naturaleza de este error, cuando se hace patente, incide en una incertidumbre en la posición de los cuatro equilibrados que de esta manera se convierten en cuatro segmentos de equilibrio. El efecto y tratamiento son los mismos que para el error de resolución, si bien sus orígenes son muy diferentes. En general si el galvanómetro es muy sensible, el segmento de equilibrio será extraordinariamente pequeño y será ocultado por la mayor amplitud del error de resolución. Por el contrario, para galvanómetros poco sensibles, la falta de resolución puede ser irrelevante por la amplitud de los segmentos de insensibilidad.

Para evaluar la cuantía de los segmentos de insensibilidad partiremos en cada uno de los cuatro casos de la hipotética posición de equilibrio exacto y calcularemos el efecto de una desviación incremental ΔI a partir de dicha posición.

El incremento de tensión del punto **D** antes de cerrar el pulsador será:

$$\Delta E = I_h \cdot R_u \cdot \Delta R$$

En tanto que la tensión del punto **C** no sufre alteración alguna. Por tanto, y como consecuencia de esta manipulación aparecerá entre

los puntos **C** y **D** una tensión de vacío (o de Thevenin del dipolo entre dichos puntos):

$$U_{TH} = I_h \cdot Ru \cdot \Delta R \quad (30)$$

La resistencia del dipolo R_{TH} en la que se incluye la de la rama del galvanómetro, determinará el valor de la intensidad que se producirá al cerrar el pulsador y que será la que circule por el galvanómetro. Asignando a ésta el valor umbral I_{g_0} obtendremos:

$$I_{g_0} = \frac{I_h \cdot Ru \cdot \Delta R}{R_{TH}} \quad (30)$$

Generalmente, por estar en juego resistencias pequeñas en comparación con la resistencia interna del galvanómetro, se puede suponer con suficiente aproximación que $R_{TH} = R_g$, y por tanto:

$$\Delta I \cong \frac{R_g \cdot I_{g_0}}{Ru \cdot I_h} \quad (31)$$

Y esto para cada una de las cuatro posiciones de equilibrio. Asimilando cada uno de los ΔI a una incertidumbre de lectura, como en el caso de resolución, el error relativo debido a la insensibilidad del galvanómetro se obtendrá de la expresión anterior correspondiente, pero sustituyendo el ΔI por el valor antes consignado:

$$\varepsilon_i (\%) = \frac{2 \cdot R_g \cdot I_{g_0}}{Ru \cdot I_h} \cdot \left(1 + \frac{R_N}{R_x} \right) \cdot 100 \quad (32)$$

Si tenemos en cuenta que:

$$R_u \cdot I_h \cdot (I_2 - I_1) = I \cdot R \quad \text{y} \quad R_u \cdot I_h \cdot (I_4 - I_3) = I \cdot R_n$$

La expresión del error de insensibilidad se puede poner de la forma:

$$\varepsilon_i (\%) = \frac{2 \cdot R_g \cdot I_{g0}}{I \cdot R_N} \left(1 + \frac{R_N}{R_x} \right) \cdot 100 \quad (33)$$

1.4.3.4 Consideraciones prácticas adicionales

Teóricamente, el procedimiento elimina la influencia de las resistencias de las conexiones. No obstante, analizando las expresiones que proporcionan los errores debidos a la resolución o insensibilidad, éstos se hacen mínimos para:

Lo cual nos indica la conveniencia de que:

* R_x Y R_n sean del mismo orden de valor.

* r_{1B} , r_{23} y r_{4A} sean lo más pequeñas posible en comparación con R_x y R_n . Especialmente r_{23} puesto que el efecto de r_{1B} y r_{4A} puede paliarse incrementando, artificial y convenientemente, los valores de las resistencias de las conexiones del hilo al puente.

* Además, de las expresiones del error de insensibilidad se desprende la conveniencia de que el galvanómetro debe ser de gran sensibilidad si se quieren medir valores pequeños, y

* El valor de la intensidad del puente debe ser lo mayor posible.

1.4.4 Puente de Thompson.

Especialmente concebido para medida de resistencias pequeñas, el puente de Thompson presenta mayor complicación en su esquema que el de Mathiessen y Hockin, pero una mayor sencillez y rapidez de uso, pudiendo proporcionar lectura directa del valor de la resistencia a medir.

Su esquema puede verse en la figura 8.4. En él, R_x es la resistencia a medir, R_n es otra resistencia variable de valor conocido y de precisión, generalmente de hilo, y convenientemente de pequeño valor, en tanto que R_1 , R_2 , R_3 , Y R_4 son resistencias conocidas y de precisión pero que presentan valores de los considerados normales. Finalmente, R_c es la pequeña resistencia parásita de interconexión entre R_x y R_n .

Como elementos complementarios, aparece una fuente de tensión continua, naturalmente con una resistencia R_{pp} de ajuste de la intensidad, un amperímetro para medida, un detector de cero sensible y por último una resistencia R_{pg} protección del galvanómetro. Como ya se ha dicho, R_n es una resistencia pequeña, del orden de R_x , mientras que R_1 , R_2 , R_3 Y R_4 son resistencias normales, generalmente superiores a 1Ω y de variación decádica.

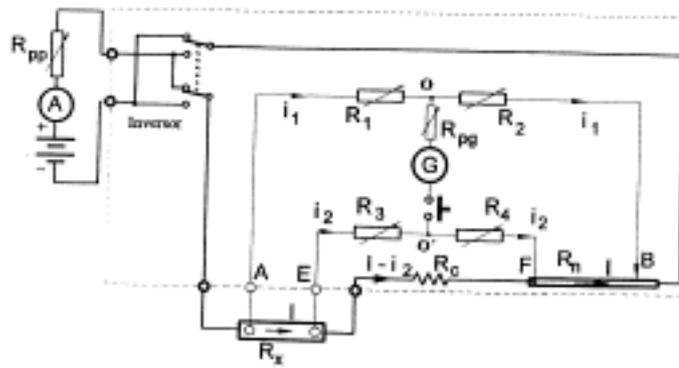


Figura 1.5: Esquema general del PUENTE DE THOMPSON

Por razones de simplicidad constructivas, R_1 , R_2 , R_3 Y R_4 son resistencias fijas conmutables, de forma que el cociente R_1/R_2 pueda variar decádicamente mientras que R_n es un hilo calibrado con cursor y por tanto de variación continua y lectura directa por indicación de un índice solidario con el cursor sobre una escala graduada.

Para obtener una buena simplificación, sus valores se eligen de manera que:

$$R_1 = R_3 \quad \text{y} \quad R_2 = R_4 \quad (34)$$

Y además:

$$R_1/R_2 = R_3/R_4 = 10^N \quad (35)$$

En las condiciones de equilibrio del puente, se debe cumplir que al oprimir el pulsador, el galvanómetro no detecte paso de corriente. Esto sucederá cuando, antes de oprimir el pulsador, los puntos O y O' estén al mismo potencial. En estas condiciones los valores de las diferentes resistencias deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$U_{AO} = U_{AO'} \quad \text{Es decir:} \quad R_1 \cdot i_1 = R_x \cdot I + R_3 \cdot i_2 \quad (36)$$

$$U_{OB} = U_{OB'} \quad \text{Es decir:} \quad R_2 \cdot i_1 = R_n \cdot I + R_4 \cdot i_2 \quad (37)$$

Y también:

$$U_{EF} = U_{EO'} \quad \text{Es decir:} \quad i_1(R_3 + R_4) = R_c \cdot (I - i_2) \quad (38)$$

De estas ecuaciones se obtiene por eliminación de tensiones e intensidades:

$$R_x = R_n \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_c}{R_2} \frac{R_1 \cdot R_4 - R_2 \cdot R_3}{R_3 + R_4 + R_c} \quad (39)$$

y teniendo en cuenta las simplificaciones antes citadas en (34), esta expresión se convierte en:

$$R_x = R_n \frac{R_1}{R_2} \quad (40)$$

1.4.4.1 Precisión

La expresión (39) relaciona algebraica mente el valor exacto de R_x con los valores exactos de R_n , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , Y R_c . En el supuesto de que todos y cada uno de los valores de estos elementos puedan diferir de los valores teóricos, R_x se conocerá con una imprecisión que se puede evaluar utilizando el método general de cálculo de errores.

La expresión completa del error resulta bastante complicada, pero se simplifica notablemente aplicando las condiciones de igualdad

(34) impuestas en la práctica entre las resistencias R_1 a R_4 , resultando:

$$\varepsilon_{R_x} = \varepsilon_{R_n} + \varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_2} + \frac{R_c}{R_x + R_n} \cdot (\varepsilon_{R_1} + \varepsilon_{R_2} + \varepsilon_{R_3} + \varepsilon_{R_4}) \quad (41)$$

Utilizando los criterios de cálculo más conservadores. Se puede utilizar la regla de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados, mucho más realista, pero que proporciona una expresión mucho más compleja que no vale la pena exponer. A efectos de establecer criterios de optimización de incertidumbres, la expresión (41) es lo suficientemente elocuente.

Así, de ella se desprende que el error de clase depende del valor de R_c que generalmente es desconocido ya que entran a formar parte de él el valor de los cables y conexiones amperimétricas del elemento incógnita al puente (que estará equipado de cuatro bornas para tal menester). Sería, pues, preciso realizar su determinación por los procedimientos que se estimen pertinentes o bien renunciar a conocer la precisión del resultado de la medida, aunque, generalmente, el fabricante del aparato proporciona los datos necesarios para su evaluación.

En cualquier caso la citada expresión (41) nos indica la conveniencia de que R_c sea lo más pequeña posible en comparación con R_x y R_n .

1.4.4.2 Error de insensibilidad del galvanómetro

Como en todos los métodos de compensación por detector de cero, nos podemos alejar de las condiciones ideales de equilibrio en

una cuantía tal que la corriente producida por el desequilibrio en la rama del galvanómetro no sea detectada por éste.

Partiendo, pues, de la condición de equilibrio perfecto, veamos qué intensidad circula por el galvanómetro dando un incremento a R_n . La equiparación del valor resultante con la intensidad umbral del galvanómetro I_{g_0} proporciona el máximo valor del incremento de R_n no detectable, y de aquí el correspondiente error relativo, o absoluto de la resistencia incógnita.

Genéricamente se puede obtener la tensión entre los puntos O y O' antes de cerrar el pulsador en función de la intensidad I. En efecto:

$$U_{OO'} = R_x \cdot I + R_3 \cdot i_2 - R_1 \cdot i_1 = R_x \cdot I + R_1 \cdot (i_2 - i_1) \quad (42)$$

y además:

$$U_{OO'} = R_2 \cdot i_1 - R_4 \cdot i_2 - R_n \cdot I = R_2 \cdot (i_1 - i_2) - R_n \cdot I \quad (43)$$

Eliminando de ambas los términos $(i_1 - i_2)$ se puede obtener la tensión de vacío entre los puntos O y O':

$$R_x = \frac{R_x \cdot \frac{R_1}{R_2} - R_n}{\frac{R_2}{R_1} + 1} \cdot I \quad (44)$$

Partiendo de la situación de equilibrio según (40) y suponiendo para R_x un incremento relativo ε , es decir, asignando a R_x el valor:

$$R_x = R_n \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot (1 + \varepsilon) \quad (45)$$

Obtendremos para la tensión D_{00} , una expresión función de ε que corresponderá a la f.e.m. del dipolo de Thevenin entre los puntos **C** y **D** antes de cerrar el conmutador y en condiciones próximas a la situación de equilibrio:

$$U_{00} = E_{TH} = I \cdot R_n \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (46)$$

Por otra parte se puede afirmar con suficiente aproximación, que el dipolo tiene una resistencia de valor correspondiente a la suma de la de la rama del galvanómetro R_G , en serie con el paralelo de R_1 y R_3 ya su vez en serie con el paralelo de R_2 y R_4 , puesto que se puede suponer el comportamiento del conjunto R_x , R_C y R_N como el de un nudo equipotencial debido a su poca entidad óhmica respecto al valor de las otras resistencias. En estas circunstancias y asimilando la corriente resultante al cerrar el pulsador a la intensidad umbral del galvanómetro I_{g_0} , es decir:

$$R_{TH} = R_G + 2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{y} \quad I_{g_0} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} \quad (48)$$

Resultando, definitivamente, el error debido a la insensibilidad del galvanómetro:

$$\varepsilon_{ins} (\%) = 100 \cdot \frac{I_{g_0}}{I \cdot R_n} \cdot \left[2 \cdot R_2 + R_g \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \right] \quad (49)$$

1.4.5 Microóhmetros

De los procedimientos descritos, el Puente de Thompson aún puede proporcionar alcances excepcionalmente bajos ($10 \mu\Omega$ a fondo de escala no es difícil), para lo que se precisa que el equipo suministre, y el elemento a medir lo permita, una intensidad de medida elevada (en ocasiones de decenas de amperios) y que además posea un detector de nulo lo suficientemente sensible.

Hasta hace relativamente poco tiempo, la dificultad de realización de mediciones de tensiones inferiores al milivoltio en corriente continua por procedimientos electrónicos, a precios razonables, impidió la aparición en el mercado de instrumentos de lectura directa de alcances lo suficientemente pequeños para poder competir con el citado puente. A pesar del avance en la última década y el abaratamiento de precios, aún no se han podido descartar totalmente los puentes ultrasensibles en favor de equipos electrónicos que sean comparables en precio. Aún así, la comodidad de uso de los elementos de lectura directa está haciendo que la sustitución se realice aún a costa de la economía.

En principio los Microóhmetros funcionan de manera análoga a los ohmmímetros tipo derivación, es decir **inyectando una corriente de medida** (o prueba, según se prefiera), de valor preciso y estable y conseguida electrónicamente, a la resistencia incógnita por medio de dos bornas amperimétricas y recogiendo por medio de otras dos bornas voltimétricas la caída de tensión provocada que, adecuadamente amplificadas, es medida por un conversor A/D y mostrada en el visualizador (display) correspondiente expresada directamente en ohmios, miliohmios o microohmios.

Es relativamente frecuente, si no habitual, que haya que llevar a cabo una operación, previa a la medida, de puesta a cero del equipo, cuyo objeto es compensar los valores de offset de entrada en los amplificadores, que varían con el tiempo y la temperatura, así como las pequeñas tensiones de contacto entre metales diferentes, bien por efectos térmicos o químicos que pueden aparecer, y de hecho están presentes, en el bucle de medida de tensión.