

### 3. Modelo

En esta sección se ha diseñado un modelo matemático que permite establecer el horario de una línea de tren de doble sentido. Estudia el caso de un corredor con dos paradas terminales, una al comienzo de la línea y otra al final, el resto de paradas van por parejas y son independientes pero se encuentran en la misma localización aunque los trenes van en sentido contrario.

El modelo utiliza métodos exactos para su resolución ya que no se requieren soluciones en tiempo real.

Si el modelo se quisiese utilizar para un problema de planificación de una línea de metro se consideraría como un problema de trenes pero con leves modificaciones, se puede pensar que la estructura de la formulación y las principales problemáticas son las mismas en ambos casos.

#### 3.1. La concepción de ciclo en los problemas de transporte

Muchas líneas de tren tienen una demanda irregular según las distintas paradas, esto suele ser debido a que conectan zonas urbanas de baja población con zonas del centro o financieras de una ciudad, existiendo una gran diferencia de usuarios entre las distintas áreas por las que circula la línea. El proyecto parte de una distribución de paradas dada para una línea y de una demanda de usuarios estimada y no regular. Un estudio detallado de la misma, acompañado de diferentes estrategias puede llevar a una operación eficiente de la línea de tren, considerando que el objetivo es optimizar las frecuencias de paradas en cada estación en función de la demanda.

Una red de tránsito que consta de dos paradas terminales y el resto van por parejas según las distintas estaciones, se puede considerar como una red de bucle de un solo sentido (ver Fig. 3), de manera que los vehículos van realizando ciclos a lo largo de la línea que comienzan y terminan en la terminal inicial.

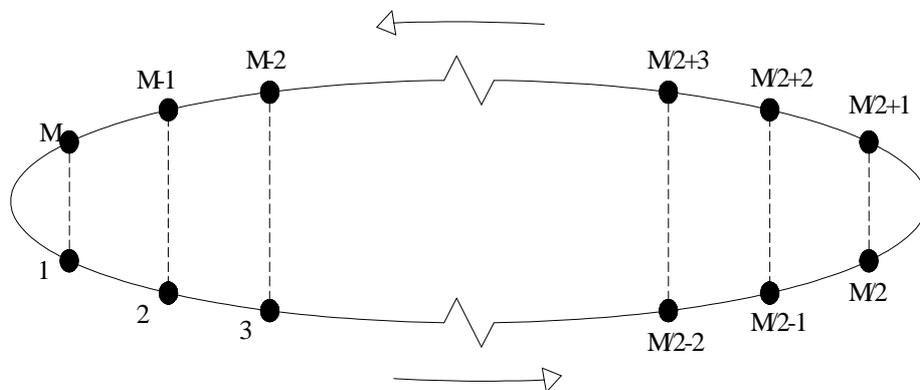


Figura 3. Ciclo completo de una línea de tren.

En la Fig. 3 vemos como la línea de tren se ha esquematizado como una elipse que simula el recorrido de los vehículos como si lo hiciesen en una sola dirección de manera que se considera como un bucle en el que la parada 1 es la terminal inicial y la parada M es la final de la línea, donde comienza y termina cada ciclo respectivamente. Todo bucle tiene un número de paradas igual a M que corresponde al número de estaciones (dobles considerando los dos sentidos del problema real) multiplicado por 2. Por ejemplo una línea con 17 paradas (en los dos sentidos) se podría esquematizar como una bucle con M paradas en el mismo sentido donde  $M = 17 * 2$ ,  $M = 34$ . Las paradas 1 y  $M/2$  corresponden a la terminal inicial y final respectivamente en un sentido de la línea, y las paradas  $M/2 + 1$  y M corresponden a los terminales inicial y final respectivamente donde los vehículos giran para continuar con el recorrido. En el problema real desde la terminal 1 hasta la parada  $M/2$  los vehículos circulan en un sentido, mientras que desde la terminal  $M/2$  hasta la M circulan en sentido contrario. Perteneciendo los pares de paradas 1 y M, 2 y  $M-1$ ...  $M/2$  y  $M/2 + 1$  a paradas en la misma estación, pero donde los vehículos circulan en sentido contrario.

El modelo trata de establecer un horario para conocer los tiempos de entrada y salida de los vehículos en las paradas del recorrido. Para establecer estos tiempos se parte de una red ya establecida en la que se conoce de antemano las paradas que realiza cada vehículo. Existen muchos estudios para diseñar el recorrido de una línea de tren, pero este proyecto toma como referencia el trabajo realizado por Mesa et al. (2009) que se explicará con más detenimiento en el punto 3.3.

En muchas ciudades la demanda de usuarios de trenes de cercanías depende mucho de las zonas de las paradas. Existen casos en los que hay una diferencia significativa de demanda entre pares de estaciones origen-destino, diferencias que están delimitadas geográficamente, de forma que algunas paradas apenas requieren servicio y otras están siempre congestionadas. Ante la situación de una infraestructura ya terminada se han diseñado una serie de estrategias, que como ya comentábamos en la sección anterior, ayudan a un mejor reparto de los recursos para establecer las paradas y recorridos que realiza cada vehículo de una línea de tren. Estas estrategias son principalmente: Short turning, Deadheading y Expressing.

## **3.2. Estrategias de aceleración en el establecimiento de frecuencias**

### Short turning

Es la estrategia que se utiliza para satisfacer la demanda en zonas con alto flujo de pasajeros aumentando la frecuencia de paradas en las estaciones más saturadas. Este

proceso consiste en hacer ciclos cortos sin necesidad de llegar hasta las paradas terminales de la vía, de manera que aumenta la frecuencia en las paradas deseadas.

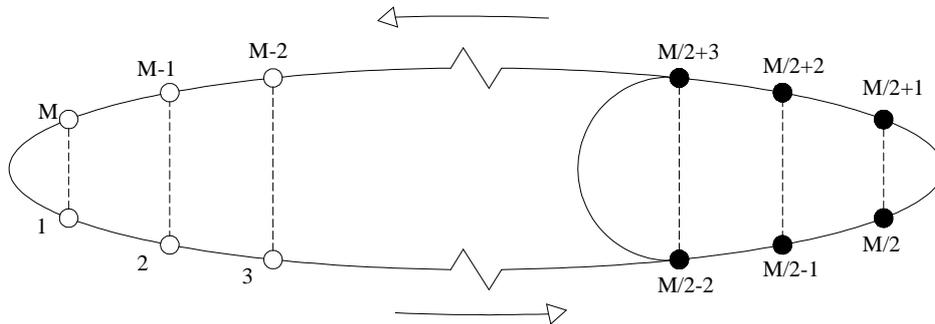


Figura 4. Ciclo de un tren realizando Short turning.

En la figura 4 se puede ver como Short turning equivale a hacer un ciclo corto realizando giros antes de las paradas terminales, de manera que las paradas a las que sirve un vehículo que realice ese ciclo corto obtienen una mayor frecuencia en detrimento de las paradas que dicho vehículo deja de servir.

### Deadheading y Expressing

La estrategia Deadheading consiste en saltarse las paradas iniciales de un ciclo para comenzar antes con el recorrido establecido, ahorrándose así el tiempo que supone frenar, esperar para la bajada y subida de pasajeros y acelerar de nuevo para llegar a la siguiente estación. Se suele utilizar en situaciones en las que una línea tiene más demanda en un sentido que en el otro.

La Fig. 5 muestra de forma esquematizada cómo funciona esta estrategia, donde se puede observar que se pretende abastecer con una mayor frecuencia en una de las direcciones más que en la otra.

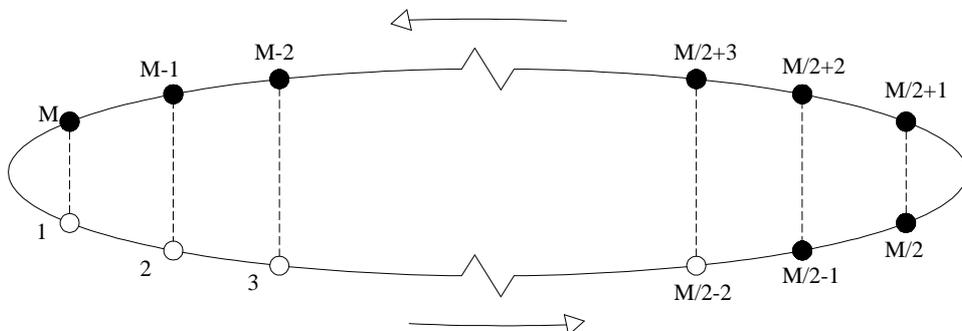


Figura 5. Ciclo de un tren realizando Deadheading.



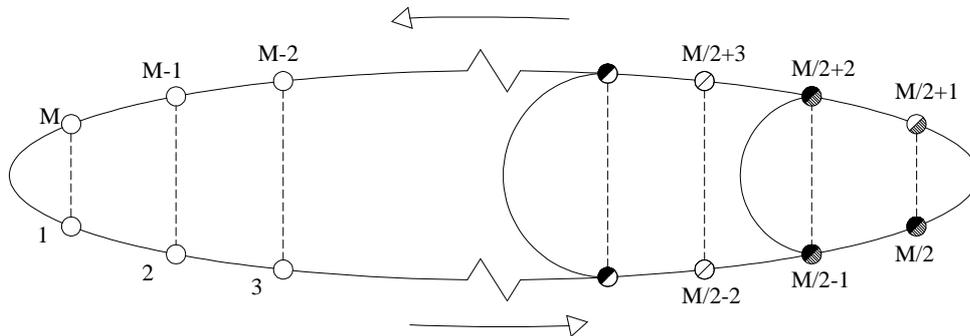


Figura 8. Ciclos de distintos trenes realizando Short turning y Expressing

### 3.3. Modelo de Mesa et al. (2009)

Es un modelo que trata de obtener frecuencias apropiadas que permitan preservar el equilibrio entre la oferta y la demanda, así como mantener un nivel mínimo de servicio para una línea de tren ya existente. La solución final que se obtiene de este modelo es una tabla (como la de la Fig. 10) en la que se reflejan las paradas que realiza cada vehículo de la línea.

En el modelo utilizan las estrategias integradas de Short turning y de Expressing (STAE), además de la concepción de la línea como un bucle de un solo sentido. Crean un modelo en el que satisfacen la demanda de manera que cada vehículo de la flota pueda realizar un ciclo corto asimétrico diferente.

Establecieron algunos supuestos para la realización del modelo como:

- Cada parada puede tener como máximo un vehículo a la vez.
- Está prohibido adelantar en cualquier punto de la red.
- Un vehículo puede cambiar de dirección en cualquier estación de la línea sin que suponga un tiempo adicional.
- En caso de una reducción de flota el horario del nuevo tren se proporciona con suficiente antelación a los pasajeros.
- Los pasajeros entre cada par de paradas se distribuyen homogéneamente entre todos los viajes suministrados por el sistema.
- Cuando la frecuencia de vehículos entre un par origen–destino disminuye también lo hace el número de pasajeros que viajan desde ese origen al destino.

La formulación del modelo se puede dividir en dos bloques: por un lado la definición de frecuencias, flujos y carga y por otro lado las limitaciones de capacidad. Siguiendo un enfoque de resolución basado en programación no lineal.

Para la búsqueda de un objetivo que optimizar, Mesa et al. (2009) hacen una simplificación para evitar una formulación multiobjetivo en la que tener en cuenta los objetivos de los usuarios y del operador de la línea. Por ello establecen que los costes desde el punto de vista del operador están relacionados con el tamaño de la flota y con el tiempo y kilómetros recorridos por los vehículos. Sin embargo si el tamaño de la flota se supone fija y se considera que los vehículos trabajan a tiempo completo entonces se pueden omitir los objetivos del operador para dar más importancia a los objetivos de los usuarios.

En el modelo se hace una distinción entre tres objetivos diferentes:

1. Minimizar la sobrecarga de pasajeros.  
Se busca cuantificar la cantidad de pasajeros conveniente para reducir al mínimo el número de usuarios que no pueden subir a los vehículos por sobrecarga. Una sobrecarga puede ser debida a una repentina disminución del tamaño de la flota o a un incremento de pasajeros en una estación.
2. Maximizar la movilidad.  
Consiste en tener una alta frecuencia en los pares origen-destino con alta demanda, para aumentar el número de viajes que realizan los pasajeros entre dichos pares.
3. Minimizar la pérdida de pasajeros.  
Dado un tamaño de flota inicial para satisfacer la demanda o-d de una línea el objetivo consiste en minimizar la cantidad de usuarios perdidos por una reducción en el tamaño de la flota.

Con la descripción de los objetivos a tratar, han formulado dos funciones objetivos dependiendo del tipo de demanda:

1. Descongestión de la red.  
Ante una demanda inelástica, los objetivos a tratar son los de minimizar la sobrecarga de pasajeros y maximizar la movilidad, para evitar que el tamaño de la flota existente sea incapaz de satisfacer la demanda.
2. Restauración de la red.  
Ante una demanda elástica, los objetivos a tratar son los de minimizar la sobrecarga de pasajeros y minimizar la pérdida de usuarios con el fin de recuperar efectiva y eficientemente la funcionalidad de la red después de episodios de sobrecarga.

El algoritmo de resolución que utilizan consiste en obtener una solución inicial en la que todos los vehículos se detienen en todas las paradas de la línea; después, se consideran diferentes estrategias donde se van eliminando paradas y estableciendo ciclos cortos, el siguiente paso consiste en seleccionar la mejor solución y determinar las frecuencias; y por último, comprobar si la solución obtenida mejora a la anterior; si lo hace, se vuelve a repetir el proceso y de lo contrario se termina.

El modelo que diseñaron lo aplicaron a un caso real de la línea C10 del tren de cercanías de Madrid para un intervalo de tiempo de 3 h, correspondiente a las horas punta de la mañana. El corredor tiene 26 estaciones y 10 vehículos que circulan en ambos sentidos. Disponiendo de los datos facilitados por la compañía operadora, consiguieron estimar la distribución de demanda entre pares de paradas o-d para una reducción de flota de 5 vehículos, obteniendo los datos reflejados en la Fig. 9

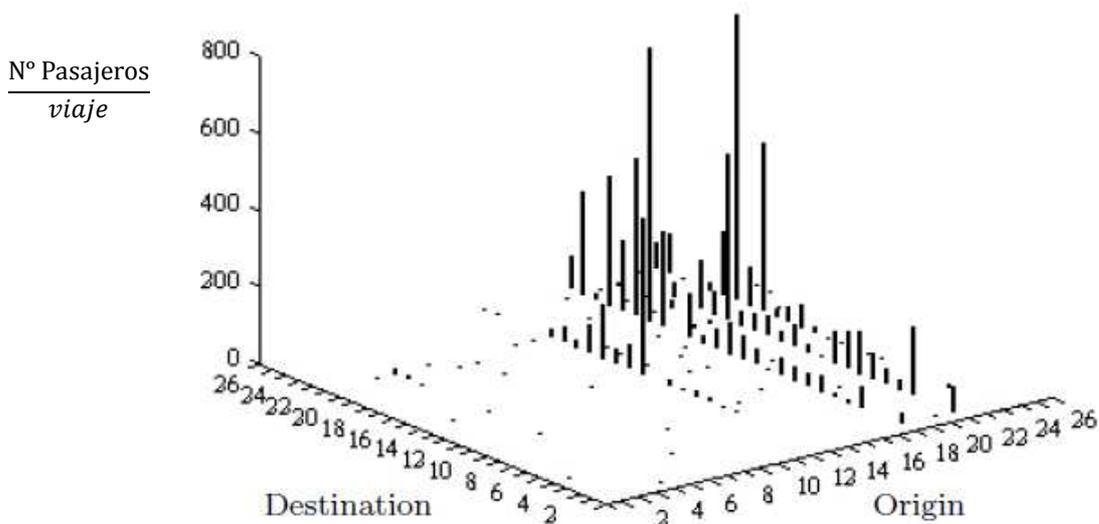


Figura 9: Distribución usuarios/viaje entre los 26 pares o-d.

Se observan picos de demanda en los pares (23-20), (18-20) y (23-18) principalmente, por ello el modelo incrementa la frecuencia en esas paradas.

Para el modelo propuesto en este proyecto utilizaremos los resultados que se obtienen para el caso de una demanda inelástica donde la función objetivo es la descongestión de la red.

La minimización simultánea de ambos objetivos (minimizar la sobrecarga de pasajeros y maximizar la movilidad) se realiza a través de la minimización de una suma ponderada en la que interviene un factor de eficiencia. Para dicho factor igual a 0.458 se

proporciona la tabla 1, en la que se representa las paradas que realiza cada vehículo de la flota, distinguiendo los dos sentidos de circulación.

Direction left-right (→)																											
k=1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18	19	20	21	22	23	-	-	-
k=2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13	14	-	-	17	18	19	20	21	22	23	-	25	-	
k=3	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	-	25	-	
k=4	-	-	-	4	-	-	7	-	-	-	-	-	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
k=5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

Direction right-left (←)																												
k=1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18	19	20	21	-	23	-	-	-
k=2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	13	14	15	16	17	18	-	20	21	-	23	-	25	-		
k=3	-	-	-	4	5	6	7	8	9	10	-	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	-	25	-		
k=4	-	-	-	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	-	-	26		
k=5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		

Tabla 1. Distribución de rutas y paradas.

### 3.4. Modelo para la construcción de horarios de servicios ferroviarios bajo estrategias de aceleración, Short turning y Deadheading

Partiendo de una tabla de datos (como la de la tabla 1) de distribución de frecuencias de una línea de tren, nuestro modelo pretende crear un horario para establecer las horas de llegada y salida de cada vehículo a cada una de las estaciones por las que pasa, además de la hora a la que cada vehículo comienza su recorrido. Es un modelo generalizado, ya que no importa la estrategia que se haya seguido para el establecimiento de frecuencias, lo único que importa son las paradas que realiza cada vehículo a lo largo de la línea.

Es un modelo de programación lineal, que pretende resolver problemas de tamaño real en un tiempo de ejecución razonable.

#### 3.4.1. Suposiciones

1. Se considera el inicio del ciclo de un vehículo como el instante de entrada del mismo a la estación inicial (que depende de cada vehículo). Un ciclo completo se considera desde el instante de llegada de un vehículo a su estación inicial hasta el siguiente momento de llegada a la misma estación realizando un recorrido completo. Ver Fig. 10.
2. Los vehículos no tienen porqué hacer paradas en todas las estaciones por las que pasan. Ver Fig. 11.

3. Un vehículo puede dar la vuelta antes de terminar el recorrido completo de la línea de tren. Ver Fig. 12.
4. Los recorridos que realizan los vehículo no tienen porqué ser iguales. Ver Fig. 13.
5. Cada vehículo se detiene siempre en las mismas estaciones independientemente del ciclo en el que se encuentre.
6. Un mismo vehículo siempre realiza el mismo recorrido pero los ciclos no son idénticos y las frecuencias de parada de los vehículos en cada estación no son constantes. Ver Fig. 14.
7. En las estaciones en las que se produce el giro de un vehículo se considera un tiempo de recorrido fijo. Ver Fig. 15.
8. No se permite el adelantamiento entre trenes en movimiento. Ver Fig. 16.
9. El cambio de conductor no supone un incremento de tiempo.

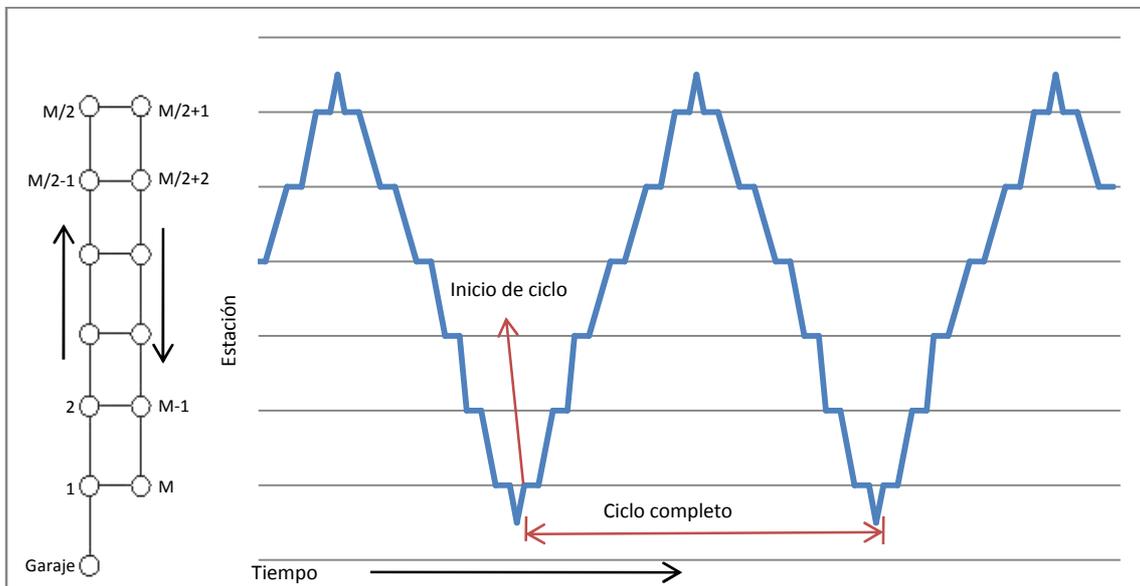


Figura10. Inicio de ciclo y ciclo completo.

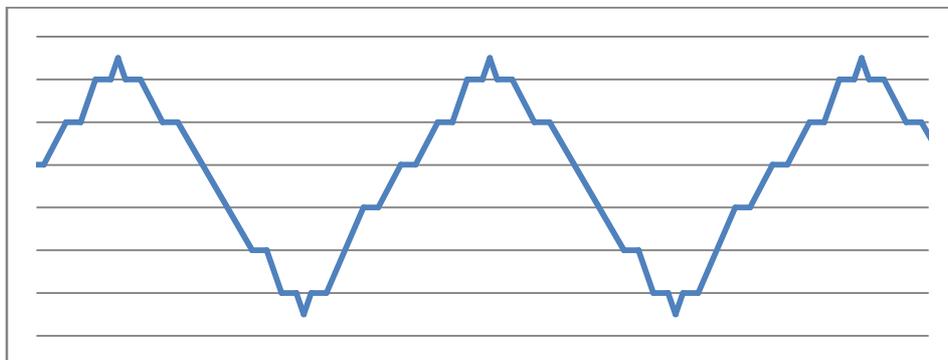


Figura 11. Estrategia Expressing.

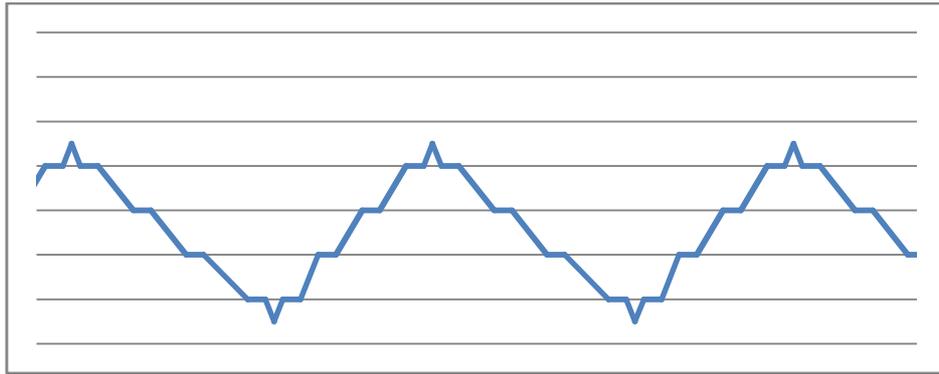


Figura 12. Estrategia Short turning.

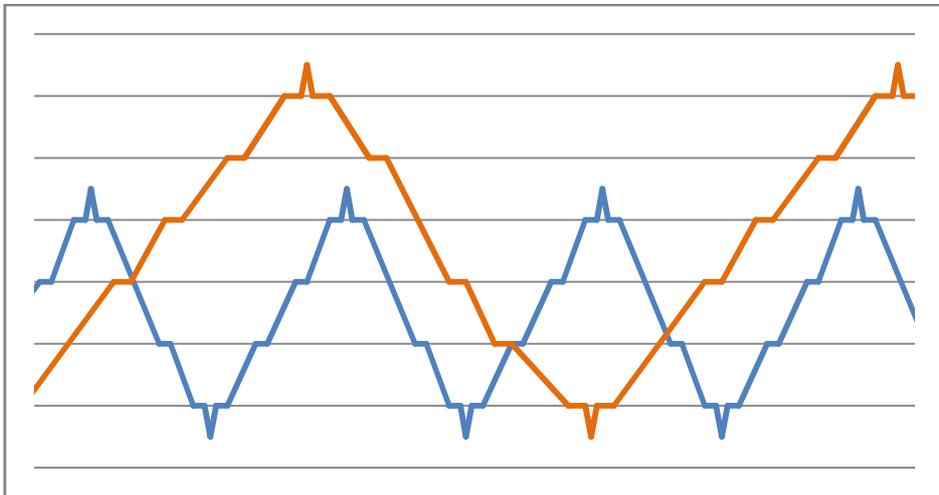


Figura 13. Trenes que realizan ciclos diferentes.

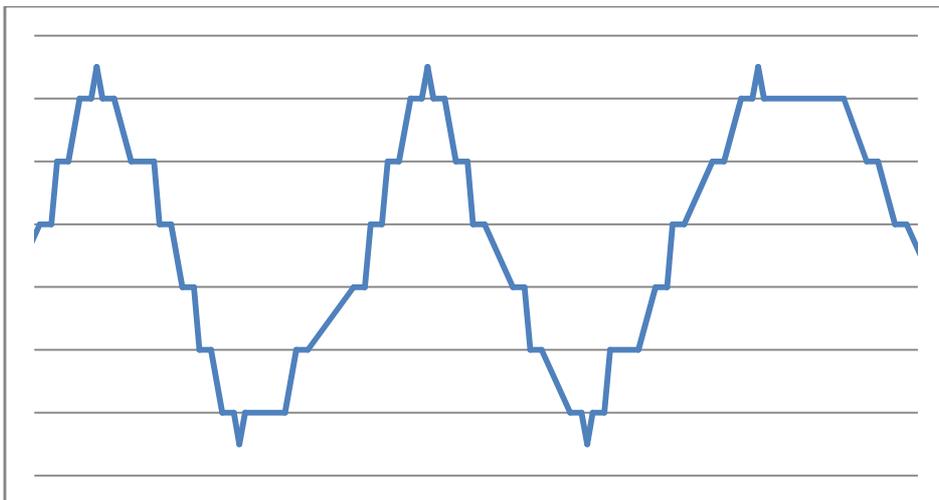


Figura 14. Ciclos no uniformes de un mismo tren.

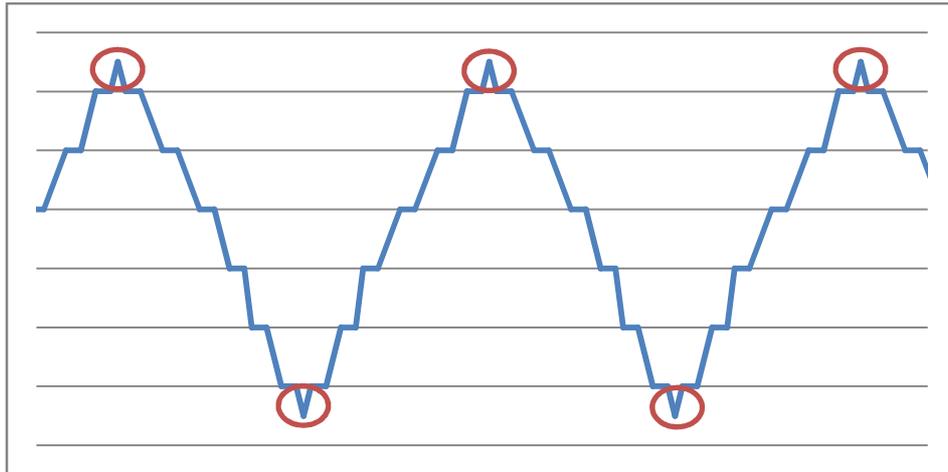


Figura 15. Tiempos fijos para los giros de los vehículos.

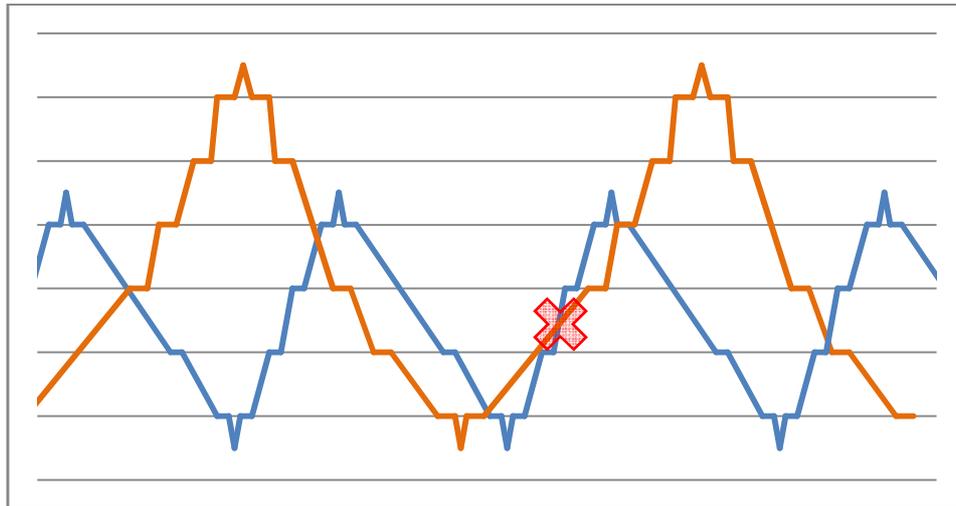


Figura 16. Prohibido el adelantamiento entre trenes en marcha.

### 3.4.2. Notación

**Parámetros:**

$i$  – vehículos  $i=1..n$

$j$  – estaciones  $j=1..m$

$c$  – ciclos  $c=1..k$

$j_i^e$  - estación  $j$  donde empieza un ciclo del vehículo  $i$

$j_i^t$  - estación  $j$  donde termina un ciclo del vehículo  $i$

$t_{jj'}^{max}$  y  $t_{jj'}^{min}$  - tiempos máximos y mínimos entre estaciones  $j$  y  $j'$  con paradas

$tp_j^{max}$  y  $tp_j^{min}$  - tiempos máximos y mínimos de parada en la estación  $j$

$ts$  - tiempo de seguridad

$ts_i$  - tiempo de seguridad inicial en los tiempos de salida del garaje  
 $\alpha_{ij}$  - binario. 1 si el vehículo  $i$  para en la estación  $j$  de acuerdo al diseño preestablecido  
 $\gamma_{ijj'}$  - binario. 1 si estando el vehículo  $i$  parado en la estación  $j$  la siguiente parada es  $j'$   
 $Ht$  - Horizonte temporal que se estudia  
 $V$  - constante de valor elevado  
 $s_i$  - número máximo de ciclos que puede realizar cada vehículo  $i$  si las condiciones de recorrido fuesen óptimas, dentro del horizonte temporal.  
 $tr_{i\ garaje}$  - tiempo de recorrido del vehículo  $i$  entre el garaje y su estación inicial

**Variables:**

$ha_{ij}^c$  - hora de llegada del vehículo  $i$  a la estación  $j$  en el ciclo  $c$   
 $hb_{ij}^c$  - hora de salida del vehículo  $i$  de la estación  $j$  en el ciclo  $c$   
 $hb_{i\ garaje}$  - hora de salida del vehículo  $i$  desde el garaje  
 $tr_{ijj'}^c$  - tiempo de recorrido del vehículo  $i$  entre las estaciones  $j$  y  $j'$  en el ciclo  $c$   
 $tp_{ij}^c$  - tiempo de parada del vehículo  $i$  en la estación  $j$  en el ciclo  $c$   
 $\beta_{ii'}^{cc'}$  - binario. 1 si el vehículo  $i$  en el ciclo  $c$  para en la estación  $j$  antes que el vehículo  $i'$   
 $o_{ii'}$  - binario. 1 si el vehículo  $i$  sale del garaje antes que el vehículo  $i'$ .

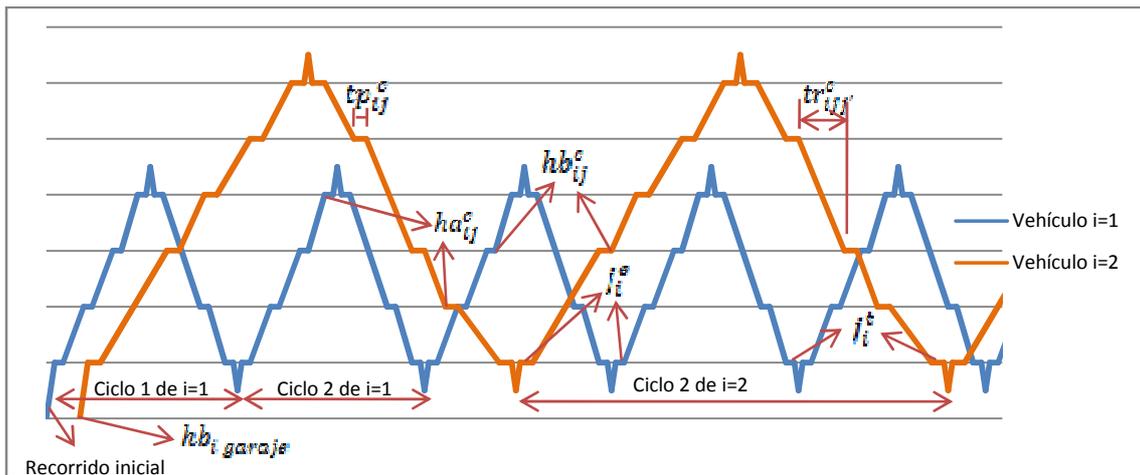


Figura 17. Representación de parámetros y variables.

**3.4.3. Restricciones**

Este proyecto pretende dar la solución a un problema de construcción de horarios bajo estrategias de aceleración. Para ello se han establecido distintas funciones objetivo en función de los diferentes enfoques; y dentro de cada función objetivo se han analizado distintos escenarios. Estos escenarios son: la posibilidad de adelantar o no, orden de salida de los vehículos conocido o no; y distintos tiempos de seguridad.

Las ecuaciones que se describen a continuación son las necesarias para poder obtener las soluciones del modelo, siendo comunes para todos los escenarios las nombradas numéricamente (1-9) y particulares dependiendo de cada escenario las nombradas alfabéticamente. En las tablas (3) y (4) se muestran todos los escenarios para los que se ha obtenido la solución óptima según las diferentes funciones objetivo.

Para poder utilizar las variables dentro de las ecuaciones que van a permitir construir el horario óptimo hay que establecer una serie de condiciones en cuanto a las mismas:

$$\begin{aligned}
 ha_{ij}^c &\geq 0 && \forall i \\
 hb_{ij}^c &\geq 0 && \forall i \\
 hb_{i\text{garaje}} &\geq 0 && \forall i \\
 tr_{ijj'}^c &\geq 0 && \forall i \forall j \forall j' \forall c \\
 tp_{ij}^c &\geq 0 && \forall i \forall j \forall c
 \end{aligned}$$

$\beta_{ii'j}^{cc'}$  es una variable binaria  $\forall i \forall i' \forall j \forall c \forall c'$

Antes de que cada vehículo comience su recorrido desde la estación inicial, algunos de estos han tenido que recorrer algunas estaciones realizando Deadheading desde el garaje de los vehículos hasta su correspondiente primera parada. Por ello se establece que la hora de llegada de cada vehículo a su estación inicial es igual a la hora de partida del vehículo desde el garaje más el tiempo de recorrido del mismo hasta la primera parada (1). Además la hora de salida de cada vehículo de la primera estación en el primer ciclo es igual a la hora de llegada a la misma más el tiempo de parada. Aquí se establece por tanto el inicio del primer ciclo de cada vehículo (2).

$$ha_{ij_i}^c = hb_{i\text{garaje}} + tr_{i\text{garaje}} \quad \forall i \forall j_i^e \quad c=1 \quad (1)$$

$$hb_{ij_i}^c = ha_{ij_i}^c + tp_{ij_i}^c \quad \forall i \forall j_i^e \quad c=1 \quad (2)$$

Para conocer el instante de llegada de un vehículo a la estación inicial de un ciclo que no sea el primero, se considera que es igual a la hora de salida de la estación final en el ciclo inmediatamente anterior más el tiempo de recorrido del vehículo entre dichas estaciones (3). Dicho tiempo de recorrido se considera como el menor posible entre las estaciones (4).

$$ha_{ij_i}^c = hb_{ij_i^t}^{c-1} + tr_{ij_i^t j_i^e}^{c-1} \quad \forall i \forall j_i^e \forall j_i^t \forall c > 1 \quad (3)$$

$$tr_{ij_i^t j_i^e}^c = t_{ij_i^t j_i^e}^{min} \quad \forall i \forall j_i^e \forall j_i^t \forall c > 1 \quad (4)$$

La hora de salida de cada vehículo en cada estación y en cada uno de los ciclos es igual a la hora de entrada del vehículo en la misma estación y ciclo, más el tiempo de parada que realiza en dicha estación (5).

$$hb_{ij}^c = ha_{ij}^c + tp_{ij}^c * \alpha_{ij} \quad \forall i \forall j \forall c \quad (5)$$

La hora de entrada de cada vehículo en cada estación en cada uno de los ciclos es igual a la hora de salida del vehículo de la estación con parada inmediatamente anterior en el mismo ciclo mas el tiempo de recorrido que emplea el vehículo entre las dos estaciones (6).

$$\gamma_{ijj'} * ha_{ij'}^c = (hb_{ij}^c + tr_{ijj'}^c) * \gamma_{ijj'} \quad \forall i \forall j \forall j' \geq j \forall c \quad (6)$$

El tiempo de recorrido de cada vehículo entre cada par de estaciones donde se detiene en cada ciclo tiene que estar comprendido entre los tiempos máximo y mínimo permitidos para cada recorrido entre dos estación con paradas consecutivas (7).

$$\gamma_{ijj'} * t_{jj'}^{min} \leq tr_{ijj'}^c \leq \gamma_{ijj'} * t_{jj'}^{max} + V(1 - \gamma_{ijj'}) \quad \forall i \forall j \forall j' > j \forall c \quad (7)$$

El tiempo de parada que emplea cada vehículo en cada estación en cada ciclo tiene que estar comprendido entre los tiempos máximo y mínimo permitidos para cada estación (8).

$$\alpha_{ij} * tp_j^{min} \leq tp_{ij}^c \leq \alpha_{ij} * tp_j^{max} \quad \forall i \forall j \forall c \quad (8)$$

Para garantizar un tiempo de seguridad en las paradas, de forma que los trenes tengan una separación mínima, se establece que el instante en el que un vehículo llega a una estación tiene que ser como mínimo igual al tiempo en el que el vehículo justo anterior ha partido más un tiempo de seguridad que se impone mediante las restricciones (9) y (10). Estas restricciones solo son efectivas para los casos en que los vehículos realicen parada en las estaciones, nótese que este conjunto de restricciones no asegura el no adelantamiento, solo asegura que no pueda haber dos vehículos estacionados en la misma parada.

$$(1 - \beta_{ii'j}^{cc'}) * V + ha_{i'j}^{c'} \geq hb_{ij}^c + ts \quad \forall i \forall i' \neq i \forall j \forall c \forall c' \quad (9)$$

$$\beta_{ii'j}^{cc'} * V + ha_{ij}^c \geq hb_{i'j}^{c'} + ts \quad \forall i \forall i' \neq i \forall j \forall c \forall c' \quad (10)$$

Cada vehículo realiza un número diferente de ciclos a lo largo del horizonte temporal que se estudia, debido a que cada uno tiene su propio recorrido. Por ello, para simplificar las restricciones y mejorar las funciones objetivo se ha calculado el mayor número de ciclos posibles para cada vehículo en el caso en que todo se produjera de la manera más favorable posible. Se calcula como el entero superior de la división entre el horizonte temporal y la suma de los tiempos mínimos de recorrido y parada del recorrido de cada uno de los vehículos (11). Para poder definir  $c$  (desde el punto de vista de la formulación del modelo) es necesario darle un valor máximo, que se estima como el máximo de los  $s_i$  calculados (12).

$$s_i = \text{entero superior} \left( \frac{Ht}{\sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m t_{jj'}^{\min} * \gamma_{ijj'} + tp_j^{\min} * \alpha_{ij}} \right) \quad \forall i \quad (11)$$

$$k \leq \text{Max}(s_i) \quad \forall i \quad (12)$$

Para un escenario en el que se desee un orden de salida determinado desde el garaje, se utiliza la restricción (a), que limita los tiempos de salida de los vehículos. El tiempo de salida del garaje de un vehículo tiene que ser mayor o igual al tiempo de salida del garaje de otro vehículo anterior más un tiempo de seguridad inicial.

$$hb_{i \text{ garaje}} + tsi \leq hb_{i' \text{ garaje}} \quad \forall i \quad \forall i' \geq i \quad (a)$$

Para un escenario en el que no importe el orden de salida desde el garaje de los vehículos, se utilizan las restricciones (b1), (b2) y (b3). El tiempo de salida del garaje de un vehículo tiene que ser mayor o igual al tiempo de salida del garaje del vehículo que haya salido con anterioridad más un tiempo de seguridad inicial.

$$o_{ii'} \text{ es una variable binaria } \forall i \quad \forall i' \quad \forall j \quad \forall c \quad \forall c' \quad (b1)$$

$$hb_{i \text{ garaje}} + tsi \leq hb_{i' \text{ garaje}} + (1 - o_{ii'}) * V \quad \forall i \quad \forall i' \quad (b2)$$

$$hb_{i' \text{ garaje}} + tsi \leq hb_{i \text{ garaje}} + o_{ii'} * V \quad \forall i \quad \forall i' \quad (b3)$$

Siendo  $V$  un valor muy grande. Las restricciones (a) y (b2 y b3) no son compatibles.

Para los escenarios en los que no esté permitido el adelantamiento hay que considerar diferentes situaciones. Para asegurar que los vehículos no se adelanten durante el recorrido se establece que, para cada estación, todos los tiempos de un vehículo durante un ciclo determinado tienen que ser superiores o inferiores a los tiempos de otro vehículo durante su ciclo, restricciones (c1 y c2). Se distingue entre los

recorridos desde la estación 1 hasta la M/2 y desde M/2+1 a M. Nótese que estas restricciones se formulan utilizando las variables binarias usadas en (9) y (10).

$$\beta_{ii'j}^{cc'} = \beta_{ii'j'}^{cc'}, \quad \forall i \forall i' \neq i \forall j \forall j' \geq j \text{ y } j \leq \text{estación final del corredor} \forall c \forall c' \quad (c1)$$

$$\beta_{ii'j}^{cc'} = \beta_{ii'j'}^{cc'}, \quad \forall i \forall i' \neq i \forall j \forall j' \geq j \text{ y } j > \text{estación final del corredor} \forall c \forall c' \quad (c2)$$

En los escenarios en los que el orden de salida no está predeterminado y no se permita el adelantamiento hay que limitar los tiempos de salida desde el garaje para que los trenes no se adelanten en el recorrido inicial hasta llegar a la primera parada de cada vehículo. En función de la variable beta que proporciona el orden de los vehículos los tiempos de salida de cada vehículo desde el garaje tienen que ser mayores a los tiempos de salida los vehículos anteriores más un tiempo de seguridad inicial, restricciones (d1) y (d2). Para estas restricciones tomamos como referencia el valor de beta en una estación en la que todos los vehículos realicen parada durante el recorrido en la dirección inicial del primer ciclo.

$$(1 - \beta_{ii'j}^{cc'}) * V + hb_{i' \text{ garaje}} \geq hb_{i \text{ garaje}} + tsi \quad \forall i \forall i' \neq i \quad j = \text{común} \quad c=1 \quad c'=1 \quad (d1)$$

$$\beta_{ii'j}^{cc'} * V + hb_{i \text{ garaje}} \geq hb_{i' \text{ garaje}} + tsi \quad \forall i \forall i' \neq i \quad j = \text{común} \quad c=1 \quad c'=1 \quad (d2)$$

### 3.4.4. Funciones objetivo

#### Función objetivo 1:

El objetivo de esta función es aumentar lo máximo posible el número de paradas que realicen los vehículos dentro del horizonte temporal.

De esta manera se ha definido esta función como el mínimo de la suma de los tiempos de llegada de cada vehículo a la última estación del recorrido en el último ciclo posible. El modelo pretende acortar al máximo dicho tiempo de llegada, sin importarle la regularidad de los ciclos de cada tren.

Esta función objetivo está más enfocada a la satisfacción de la demanda por parte del usuario.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n ha_{ij_i}^{s_i}$$

## Función objetivo 2:

El objetivo de esta función es que cada vehículo realice sus ciclos con una frecuencia lo más parecida posible.

Se define la función como el mínimo de la suma de las diferencias que existe entre cada ciclo de un mismo vehículo respecto de la media. Para este modelo lo prioritario es que las frecuencias entre ciclos de un mismo vehículo sean lo más parecidas a la media, dejando a un lado el objetivo de la maximizar el número de paradas dentro del horizonte temporal.

Esta función objetivo está más enfocada a seguir una regularidad en los ciclos, que se puede traducir en simplicidad de ejecución desde el punto de vista de la operadora.

$$w_i^c \geq 0 \quad \forall i \quad \forall c$$

$$\frac{1}{s_i} * (ha_{ij_i^t}^{s_i} - tr_{i \text{ garaje}}) - w_i^c \leq ha_{ij_i^t}^c - ha_{ij_i^t}^{c-1} \leq w_i^c + \frac{1}{s_i} * (ha_{ij_i^t}^{s_i} - tr_{i \text{ garaje}})$$

$$\forall i \quad \forall j_i^t \quad \forall c > 1 \quad \forall s_i$$

$$\frac{1}{s_i} * (ha_{ij_i^t}^{s_i} - tr_{i \text{ garaje}}) - w_i^c \leq ha_{ij_i^t}^c - ha_{ij_i^e}^{c-1} \leq w_i^c + \frac{1}{s_i} * (ha_{ij_i^t}^{s_i} - tr_{i \text{ garaje}})$$

$$\forall i \quad \forall j_i^t \quad \forall j_i^e \quad \forall c = 1 \quad \forall s_i$$

$$\text{Min} \sum_{c=1}^s \sum_{i=1}^n w_i^c$$

### 3.4.5. Escenarios

La tabla 2 muestra los distintos escenarios que se pueden estudiar con este modelo, utilizando las restricciones correspondientes y los tiempos de seguridad deseados. El óptimo, el tamaño del modelo y el tiempo de ejecución de cada escenario quedan reflejados en las tablas 3 y 4 de la sección 5.

	Adelantamiento permitido	Adelantamiento no permitido	Inicio determinado	Inicio no determinado	Ts=50	Ts=150	Ts=300	Restricciones
Escenario 1	X		X		X			1-12, a
Escenario 2	X			X	X			1-12, b1-b3
Escenario 3		X	X		X			1-12, a, c1-c2, d1-d2
Escenario 4		X	X			X		1-12, a, c1-c2, d1-d2
Escenario 5		X	X				X	1-12, a, c1-c2, d1-d2
Escenario 6		X		X	X			1-12, c1-c2, d1-d2
Escenario 7		X		X		X		1-12, c1-c2, d1-d2
Escenario 8		X		X			X	1-12, c1-c2, d1-d2

Tabla 2. Escenarios.