**1. Objeto del proyecto ... 3**
**2. Antecedentes ... 5**
**3. Selección de la cartera de países ... 10**
**4. Modelos de gestión del riesgo ... 24**
4.1. Portafolio de inversión ... 24
4.2. Teoría Media – Varianza. Modelo de Markowitz ... 29
4.2.1. Medición del rendimiento del portafolio de inversión ... 29
4.2.2. Medición del riesgo del portafolio de inversión ... 31
4.3. Aplicación del modelo ... 38
4.3.1. Modelo con función objetivo multicriterio: rentabilidad y riesgo ... 44
4.3.1.1. Desarrollo del modelo ... 44
4.3.1.2. Análisis de resultados ... 48
4.3.2. Modelo de optimización de la rentabilidad con acotación del riesgo ... 56
**5. Optimización robusta para la gestión del riesgo ... 64**
5.1. Modelo de optimización por escenarios. Modelos MM y MAD ... 67
5.2. Enfoque 1: Prima riesgo objetivo ... 78
5.2.1. Escenario s = 1 ... 84
5.2.2. Escenario s = 2 ... 86
5.2.3. Escenario s = 3 ... 88
5.2.4. Escenario s = 4 ... 90
5.2.5. Escenario s = 5 ... 92
5.2.6. Resultado para el modelo MM ... 96
5.2.6.1. Equi-probabilidad de escenarios ... 96
5.2.6.2. Distribución asimétrica de probabilidades ... 104
5.2.6.3. Comparativa ... 109
5.2.7. Resultados para el modelo MAD ... 110
5.2.7.1. Equi-probabilidad de escenarios ... 110
5.2.7.2. Distribución asimétrica de probabilidades ... 116
5.2.8. Comparativa modelos MM y MAD ... 121
5.3. Enfoque 2: Evolución por zonas ... 125
5.3.1. Escenario es = 1 ... 131
5.3.2. Escenario es = 2 ... 134
5.3.3. Escenario es = 3 ... 137
5.3.4. Aplicación de los modelos MM y MAD ... 142

5.3.4.1. Resultados modelo MM ........ 144
5.3.4.2. Resultados modelo MAD ........ 150
5.3.5. Comparativa del enfoque 2 con datos reales 2012 ........ 159
**6. Conclusiones ........ 163**
**7. Referencias ........ 168**

# 1 Objeto del Proyecto.

El principal objetivo durante el desarrollo de este Proyecto Fin de Carrera consistió en el estudio del riesgo y la rentabilidad de una inversión en bonos de una cartera de varios países (en torno a 10), a través de un modelo de optimización.

Para ello, se tomarán datos reales desde Enero de 2007 (aproximadamente, el inicio de la actual crisis económica), hasta Diciembre 2011, a fin de realizar la previsión de la inversión para 2012.

Para la optimización de dicha cartera de inversión, se establecerán dos opciones:

- Modelo con función objetivo multicriterio: rentabilidad y riesgo: Se desarrolla un modelo de optimización basado en una función multicriterio, en la cual se trata de minimizar el riesgo de la inversión al mismo tiempo que se maximiza la rentabilidad. El establecimiento de esta función objetivo, junto a dos parámetro de peso de cada uno de sus términos ($\alpha$ y $\beta$), permitirán desarrollar distintas variaciones en el estudio de la cartera.

- Modelo de optimización de la rentabilidad con acotación del riesgo: En esta ocasión, el modelo a desarrollar tratará un solo criterio a través de la optimización únicamente de la rentabilidad manteniendo el riesgo acotado.

Posteriormente, se compararán los resultados obtenidos a través de la aplicación de estos modelos, con los datos reales obtenidos en este año 2012, a fin de determinar la fiabilidad del modelo.

A partir de este punto, y como una segunda parte del Proyecto, se establecerán diferentes escenarios posibles, a fin de, siguiendo con el desarrollo de la teoría de optimización por escenarios, evaluar la robustez del modelo y su aplicación al estudio de futuribles situaciones económicas.

Se desarrollarán dos posibilidades para la creación de escenarios:

- Posibilidad 1: Se plantearán variaciones en la prima de riesgo de cada país, estableciendo unas condiciones futuras de acuerdo a que esta variación sea positiva (disminuyendo, por tanto, la rentabilidad de los bonos de cada país), o negativa (aumentando la rentabilidad de dichos bonos). Se crearán los escenarios de tal forma que la variación de la economía global siga la misma tendencia en todos los países objeto de estudio, y se analizará lo ocurrido atendiendo al modelo de optimización propuesto.

- Posibilidad 2: Se establecerán variaciones en la evolución de las economías de los distintos países, distribuyéndolos en cinco zonas geográficas: Europa Sur, Europa Centro/Norte, América Norte, Asia y Resto Mundo. Una vez establecidas, se recrearán diferentes escenarios variando las rentabilidades en bloque en cada una de estas zonas y facilitando distintas probabilidades de que esta evolución se produzca. De las distintas combinaciones posibles se desarrollan al menos 3 escenarios que permitan aplicar el modelo de optimización.

# 2 Antecedentes

El origen de la crisis económica y financiera actual tiene su inicio en el estallido de la burbuja inmobiliaria y la consiguiente crisis de las hipotecas *subprime* en Estados Unidos. Para poder entender mejor este arranque es necesario remontarse unos años atrás y conocer varios aspectos importantes:

- Causas de la burbuja inmobiliaria.
- Definición de hipoteca *subprime.*
- Causas de la crisis.
- Causas de la extensión de la crisis más allá de EEUU.

*Causas de la burbuja inmobiliaria*

La burbuja inmobiliaria comenzó a producirse en Estados Unidos a principios del siglo XXI, tras el estallido de otra burbuja, la de las "empresas puntocom" y tras los atentados del 11S. Ante este escenario, la Reserva Federal estadounidense bajó los tipos de interés a niveles especialmente bajos, con el objetivo de inyectar la mayor cantidad de liquidez posible al sistema para reactivar el consumo y la producción a través del crédito.

Con unos tipos tan bajos, la compra de una vivienda se convirtió en algo económicamente muy interesante y la presión compradora fue adquiriendo, poco a poco, tintes de fiebre especulativa. De esta forma, se provocó una subida de los precios (se pagaba más de lo que realmente valía) que provocó que la vivienda dejara de ser un gasto para tener un lugar donde vivir, para pasar a ser considerada como una fuente de futuros ingresos.

En este sentido, la compra/venta de viviendas con fines especulativos se realizó a cargo del mercado hipotecario, lo que provocó un elevadísimo apalancamiento (= relación entre el crédito y capital propio invertido en una operación) que incrementa la rentabilidad obtenida pero que incrementa los riesgos de la operación al provocar una menor flexibilidad y una mayor exposición a la incapacidad de atender los pagos, es decir, a la insolvencia.

*Definición de hipoteca subprime*

Para conocer el funcionamiento de este tipo de hipotecas es necesario, conocer que en Estados Unidos el sistema crediticio, funciona de forma diferente al español. Allí se parte de una escala de calificación por puntos que se van adjudicando atendiendo al nivel de ingresos y, sobretodo, a la puntualidad en los pagos. De esta forma, un cliente a de tener una calificación superior a los 800 puntos y estas hipotecas *subprime* fueron concedidas a clientes con una calificación inferior a los 620 puntos.

Por tanto, estas hipotecas *subprime* son hipotecas de alto riesgo orientadas a clientes de escasa solvencia y, por tanto, con un riesgo de impago superior a la media. En contraposición, su tipo de interés era más elevado que los préstamos personales y las comisiones bancarias cobradas a los clientes resultaban también más altas.

Como consecuencia de ambos motivos, las hipotecas *subprime* resultaban ventajosas para todos los intervinientes en un préstamo hipotecario. Las personas de escasos ingresos o con riesgos financieros ciertos podían acceder al mercado de la vivienda y las entidades de crédito obtenían mayores beneficios por operación.

*Causas de la crisis*

El por qué se produjo la crisis, puede explicarse a partir del año 2004, cuando la Reserva Federal de Estados Unidos comenzó a subir los tipos de interés (entre el año 2004 y el 2006 el tipo de interés fijado pasó del 1% al 5,25%) para intentar controlar la inflación que como consecuencia del incremento de liquidez había comenzado a subir a niveles preocupantes.

Sin embargo, esta medida trajo consigo un efecto no deseado. Los préstamos *subprime* eran generalmente a tipos variables e indexados al tipo decidido por el banco central. Por tanto, cuando la Reserva Federal aumenta los tipos de interés, las cuotas mensuales del pago de las hipotecas también se vieron incrementadas y esto produjo que los impagos de deudas y las ejecuciones hipotecarias crecieran de manera espectacular.

Ante este escenario, muchas entidades comenzaron a tener problemas de liquidez que les dificultó poder devolver el dinero a los inversores o recibir nueva financiación de los prestamistas (se calcula que en el año 2006 casi medio centenar de entidades hipotecarias estadounidenses quebraron).

Esto, además, provocó que esta crisis inmobiliaria se trasladara a la bolsa y los índices bursátiles comenzaran a caer, de tal forma que a finales de 2007 los mercados de valores de Estados Unidos comenzaron una precipitada caída que se vio acentuada como consecuencia de otra serie de factores nocivos para el desarrollo económico (incremento de los precios del petróleo, aumento de la inflación o estancamiento del crédito).

*Causas de la extensión de la crisis más allá de EEUU*

El impacto de todos estos factores internos de Estados Unidos tuvo repercusiones más allá de sus fronteras y los bancos de inversión sufrieron pérdidas en todo el mundo. Esta crisis que, en un principio, se pensaba que eran meros problemas de liquidez de los bancos, se trasladó poco a poco a Europa, donde cada vez un mayor número de entidades comenzaron a admitir que se encontraban “contaminadas” por estos créditos *subprime* procedentes de EEUU.

Esta “contaminación” fue causada por varios factores, entre los que se pueden destacar como más importantes los siguientes: la propia globalización de la economía, que permitía la libre circulación de capitales por todo el mundo, y que los bancos norteamericanos tenían un límite a la concesión de préstamos *subprime* impuesto por la Reserva Federal de Estados Unidos.

Estos dos factores unidos, y dado que la deuda puede ser objeto de transacción económica a través de diferentes mecanismos; compra de bonos, titularización de créditos, etc. las entidades de créditos estadounidenses comenzaron a retirar de su balance estas hipotecas *subprime* transfiriéndolas a fondos de inversión o planes de pensiones de todo el mundo.

Con ello, cuando estalló la crisis ésta se extendió rápidamente y muchas entidades no pudieron hacer frente a sus compromisos, comenzando la cascada de cierres, quiebras y nacionalizaciones de multitud de entidades financieras de todo el mundo (como símbolo más destacado, el 15 de Septiembre de 2008 se produjo la declaración oficial de bancarrota del banco de inversión *Lehman Brothers*).

Los Bancos Centrales comenzaron a reaccionar y tanto el Banco Federal de Estados Unidos como el Banco Central Europeo trataron de reforzar a los mercados inyectándole fondos por valor de miles de millones de euros. Estos fondos eran facilitados a las propias entidades en unas condiciones muy favorables para intentar reactivar la economía.

Sin embargo, estas ayudas no resolvieron la crisis de liquidez ya que a ella se había unido una fuerza muy importante; la desconfianza generada por una incorrecta valoración de los riesgos, que provocó:

- Que las agencias de calificación de riesgos (siendo las más conocidas *“Standard & Poors’s”*, *“Moody’s”* o *“Fitch”*) dedicadas a evaluar la solvencia y la calidad crediticia de las empresas y a calificarlas según distintas variables comenzaron a ser cuestionadas y perdieron una parte importante de su prestigio.

- Que las entidades comenzaran a ser reacias a prestarse dinero entre ellas, tal y como había ido sucediendo hasta la fecha, provocando la inmovilización de los mercados financieros.

- Que los legisladores, tanto norteamericanos como europeos, comenzaran a barajar el endurecimiento de los criterios para la concesión de créditos.

Todo ello ha provocado, la falta de crédito disponible para los bancos, las empresas y los particulares y ha traído las negativas consecuencias que se han vivido en estos tiempos, recesión, cierre de empresas, pérdida de empleos, crisis y el empeoramiento de las condiciones de vida de los ciudadanos.

# 3 Selección de la cartera de países.

Para seleccionar la cartera de países objeto de este estudio, se parte de una lista preliminar, a partir de la cual, y valorando previamente la disponibilidad de datos de los mismos, se estudia la rentabilidad de cada uno de ellos, prestando especial atención al riesgo que suponía invertir en Enero de 2012. La idea original consiste en establecer una cartera lo más representativa posible, dónde además de las principales economías mundiales, caso de EE.UU., Alemania o Reino Unido, aparezcan otras de países emergentes como Brasil, Perú o Australia, países en graves problemas financieros como Portugal o Grecia y otros en alto riesgo como España e Italia.

Se han intentado recabar datos reales de China pero la opacidad de esta economía ha impedido su obtención.

La evaluación del riesgo de la inversión en cada país se establece de acuerdo a la valoración dada por las principales Agencias de Calificación, esto es *Fitch*, *Standard & Poor's* y *Moddy's,* en dos fechas clave: Diciembre de 2011 y Diciembre de 2012. De esta manera, se obtendrá, además, una primera aproximación a la evolución de la economía de cada uno de estos países, según la valoración dada por las mencionadas Agencias de Calificación en cuanto al riesgo de invertir en deuda soberana.

Es importante, antes de comenzar, tener claros algunos conceptos económicos:

- *Rating* o calificación de la deuda: mide la capacidad de un país, gobierno o empresa para hacer frente a su deuda y, por lo tanto, el riesgo que conlleva invertir en ella.

  En este sentido, cuanto peor calificación tenga el agente económico estudiado mayor será el riesgo que asumen los potenciales inversores ya que la probabilidad de impago será mayor.

- Riesgo soberano o riesgo país: define un término muy relacionado con el concepto de Prima de riesgo. Suele utilizarse también para referirse a la calificación de riesgo dada a un Estado por las Agencias de Calificación para determinar la posibilidad de que éste cumpla con sus obligaciones financieras.

- Las calificaciones otorgadas por las Agencias de Calificación dependen de varios factores, entre los que, por su importancia, se citan los siguientes:

    - Probabilidad de pago: Capacidad e intención del emisor para cumplir con sus compromisos financieros.

    - Protección: Hace referencia a la defensa recibida por la obligación en caso de quiebra y otros hechos que puedan afectar los derechos del acreedor.

Como ya se ha comentado, las principales agencias de calificación son las americanas *Fitch*, *Standard & Poor's* y *Moddy's*, tres compañías privadas que absorben el 90% del negocio y que figuran entre los organismos más influyentes de la economía.

Su misión es realizar análisis de las cuentas y balances económicos de las empresas, gobiernos, y entidades sin ánimo de lucro. Para ello, analizan los cuadernos de cuentas y las estadísticas recientes y pasadas, con el fin de poder establecer comparaciones y de poder emitir un veredicto sobre cuál será la marcha futura de la empresa/gobierno. Tras realizar todos los exámenes pertinentes, califican al agente estudiado. Esta calificación se utilizará en el mercado para que los inversores conozcan si se trata de una inversión segura y de calidad.

Para hacer sus valoraciones utilizan códigos de letras (desde la triple A hasta la D). Obtener una triple A significa que la deuda o el país emisor y el cobro de los intereses tienen todas las garantías mientras que invertir en un fondo D supone enormes riesgos en la inversión. En la tabla 1 se representan los códigos alfanuméricos empleados:

**Tabla 3.1.** Baremos de calificación

| | Moody's | S & P | Fitch |
|---|---|---|---|
| Principal | Aaa | AAA | AAA |
| Alto grado | Aa1 | AA+ | AA+ |
| | Aa2 | AA | AA |
| | Aa3 | AA- | AA- |
| Grado medio superior | A1 | A+ | A+ |
| | A2 | A | A |
| | A3 | A- | A- |
| Grado medio inferior | Baa1 | BBB+ | BBB+ |
| | Baa2 | BBB | BBB |
| | Baa3 | BBB- | BBB- |
| Grado de no inversión especulativo | Ba1 | BB+ | BB+ |
| | Ba2 | BB | BB |
| | Ba3 | BB- | BB- |
| Altamente especulativa | B1 | B+ | B+ |
| | B2 | B | B |
| | B3 | B- | B- |
| Riesgo sustancial | Caa1 | CCC+ | CCC |
| Extremadamente especulativa | Caa2 | CCC | |
| Pocas perspectivas de recuperación | Caa3 | CCC- | |
| | Ca | CC | |
| | | C | |
| Impago | C | D | DDD |
| | | | DD |
| | | | D |

Estas agencias son privadas por lo que su fuente de ingresos proviene de sus clientes. No es obligatorio para nadie disponer de su evaluación, pero no contar con sus análisis puede ser interpretado como un símbolo de ocultación de datos. Su poder de influencia es hoy tan alto que los grandes inversores solo invierten en productos calificados con la máxima puntuación dada por estas agencias.

Por ejemplo en el caso de Francia o de España, esto puede suponer que los inversores no quieran arriesgarse en comprar su deuda por temor a que no se la devuelvan en el plazo fijado o se vean obligados a venderla porque no cumple con las garantías exigidas y así, Francia y España deberán pagar más intereses a quienes tomen el riesgo de poner su dinero en sus bonos, crecerá su deuda y las agencias les volverán a bajar la nota.

De este modo, la calificación otorgada por cada una de estas tres Agencias de Calificación a las principales economías a nivel mundial es la recogida en la Tabla 2. En ella se recoge dicha valoración a finales de 2011 y 2012 para los mismos países:

**Tabla 3.2.** Calificación de riesgos por países (2011 - 2012)

| | Diciembre 2011 | | | Diciembre 2012 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Moody's | S & P | Fitch | Moody's | S & P | Fitch |
| Alemania | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AAA | AAA |
| Argentina | Ba2 | B | BB- | B3 | B- | CC |
| Australia | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AAA | AAA |
| Austria | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AA+ | AAA |
| Bélgica | Aa3 | AA | AA+ | Aa3 | AA | AA |
| Brasil | Baa2 | BBB | BBB | Baa2 | BBB | BBB |
| Bulgaria | Baa2 | BBB | BBB- | Baa2 | BBB | BBB- |
| Canadá | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AAA | AAA |
| Chile | Aa3 | A+ | A+ | Aa3 | AA- | A+ |
| China | Aa3 | AA- | A+ | Aa3 | AA- | A+ |
| Chipre | Baa3 | BBB | BBB | Caa3 | CCC | B |
| Colombia | Baa3 | BBB- | BBB- | Baa3 | BBB | BBB- |
| Corea Sur | A1 | A | A | Aa3 | A+ | AA- |
| Costa Rica | Baa3 | BB | BB+ | Baa3 | BB | BB+ |
| Croacia | Baa3 | BBB- | BBB- | Ba1 | BB+ | BBB- |
| Dinamarca | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AAA | AAA |
| Ecuador | Caa2 | B- | B- | Caa1 | B | B- |
| Eslovaquia | A1 | A+ | A+ | A2 | A | A+ |
| Eslovenia | A1 | AA- | AA- | Ba1 | A- | A- |
| España | A1 | AA- | AA- | Baa3 | BBB- | BBB |
| Estonia | Baa1 | AA- | A+ | A1 | AA- | A+ |
| Filipinas | Ba2 | BB | BB+ | Ba1 | BB+ | BBB- |
| Finlandia | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AAA | AAA |
| Francia | Aaa | AAA | AAA | Aa1 | AA+ | AAA |
| Grecia | Ca | CC | CCC | C | B- | CCC |
| Holanda | Aaa | AAA | AAA | Aaa | AAA | AAA |
| Hungría | Ba1 | BB+ | BBB- | Ba1 | BB | BB+ |
| India | Baa3 | BBB- | BBB- | Baa3 | BBB- | BBB- |
| Indonesia | Ba1 | BB+ | BBB- | Baa3 | BB+ | BBB- |
| Irlanda | Ba1 | BBB+ | BBB+ | Ba1 | BBB+ | BBB+ |
| Islandia | Baa3 | BBB- | BB+ | Baa3 | BBB- | BBB |
| Israel | A1 | A+ | A | A1 | A+ | A |
| Italia | A2 | A | A+ | Baa2 | BBB+ | BBB+ |
| Japón | Aa1 | AA- | AA | Aa3 | AA- | A+ |
| Letonia | Baa3 | BB+ | BBB- | Baa2 | BBB | BBB |

Diciembre 2011

| | Moody's | S & P | Fitch |
|---|---|---|---|
| Letonia | Baa3 | BB+ | BBB- |
| Lituania | Baa1 | BBB | BBB |
| Luxemburgo | Aaa | AAA | AAA |
| Malasia | A3 | A- | A- |
| Malta | A2 | A | A+ |
| México | Baa1 | BBB | BBB |
| N. Zelanda | Aaa | AAA | AAA |
| Nicaragua | B3 | No valor | No valor |
| Noruega | Aaa | AAA | AAA |
| Paraguay | B1 | BB- | No valor |
| Perú | Baa3 | BBB | BBB |
| Polonia | A2 | A- | A- |
| Portugal | Ba2 | BBB- | BB+ |
| R. Checa | A1 | AA- | A+ |
| R. Dom. | B1 | B+ | B |
| Reino Unido | Aaa | AAA | AAA |
| Rumanía | Baa3 | BB+ | BBB- |
| Rusia | Baa1 | BBB | BBB |
| Singapur | Aaa | AAA | AAA |
| Sudáfrica | A3 | BBB+ | BBB+ |
| Suecia | Aaa | AAA | AAA |
| Suiza | Aaa | AAA | AAA |
| Tailandia | Baa1 | BBB+ | BBB |
| Turquía | Ba2 | BB | BB+ |
| Ucrania | B2 | B+ | B |
| Uruguay | Ba1 | BB+ | BB+ |
| USA | Aaa | AA+ | AAA |
| Venezuela | B2 | B+ | B+ |

Diciembre 2012

| | Moody's | S & P | Fitch |
|---|---|---|---|
| Letonia | Baa2 | BBB | BBB |
| Lituania | Baa1 | BBB | BBB |
| Luxemburgo | Aaa | AAA | AAA |
| Malasia | A3 | A- | A- |
| Malta | A3 | BBB+ | A+ |
| México | Baa1 | BBB | BBB |
| N. Zelanda | Aaa | AA | AA |
| Nicaragua | B3 | No valor | No valor |
| Noruega | Aaa | AAA | AAA |
| Paraguay | Ba3 | BB- | No valor |
| Perú | Baa2 | BBB | BBB |
| Polonia | A2 | A- | A- |
| Portugal | Ba3 | BB | BB+ |
| R. Checa | A1 | AA- | A+ |
| R. Dom. | B1 | B+ | B |
| Reino Unido | Aa1 | AAA | AAA |
| Rumanía | Baa3 | BB+ | BBB- |
| Rusia | Baa1 | BBB | BBB |
| Singapur | Aaa | AAA | AAA |
| Sudáfrica | Baa1 | BBB | BBB |
| Suecia | Aaa | AAA | AAA |
| Suiza | Aaa | AAA | AAA |
| Tailandia | Baa1 | BBB+ | BBB+ |
| Turquía | Ba1 | BB+ | BBB- |
| Ucrania | B3 | B | B |
| Uruguay | Baa3 | BBB- | BBB- |
| USA | Aaa | AA+ | AAA |
| Venezuela | B2 | B+ | B+ |

FUENTE: www.datosmacro.com

Una primera impresión comparando la situación de la economía de cada país en cuanto al riesgo, permite observar como las economías más o menos saneadas han conseguido mantenerse sin prácticamente ninguna variación en cuanto a la valoración dada por las Agencias de Calificación de refiere. Así economías como la de Estados Unidos, Alemania o los países escandinavos, tenían a finales de 2011 la máxima catalogación y han conseguido mantenerla a lo largo de todo el 2012. Quizá el peor año hasta el momento de la crisis financiera que se está padeciendo a nivel mundial.

Sin embargo, esta situación no se repite para aquellas economías más frágiles, ya que, salvo casos aislados, muy pocos han conseguido mantener sus niveles de calificación. En este sentido, países de Suramérica o el Sur de Europa (por ejemplo, en el caso de España, Italia, Chipre o Argentina) que a finales de 2011 tenían unos niveles muy bajos han ido a peor, disminuyendo la calificación otorgada por estas agencias.

Esto indica que la situación económica a nivel mundial no sólo no se ha mantenido sino que ha empeorado a lo largo de todo el año 2012, produciéndose además un mayor distanciamiento entre las principales economías respecto al resto.

De acuerdo a este doble criterio, por un lado la disponibilidad de datos, y por otro lado la valoración otorgada por las Agencias de Calificación a los diferentes países y la evolución sufrida durante el 2012, se formalizará la cartera de inversión objeto de estudio de este Proyecto Fin de Carrera a la compuesta por los siguientes países:

**Tabla 3.3.** Cartera de países.

| | |
|---|---|
| 1 | Alemania |
| 2 | España |
| 3 | EEUU |
| 4 | Francia |
| 5 | Italia |
| 6 | Japón |
| 7 | Reino Unido |
| 8 | Portugal |
| 9 | Grecia |
| 10 | Canadá |
| 11 | Australia |

Un total de 11 países dónde se encuentran ejemplos de las principales economías, (EEUU, Alemania, Reino Unido) países en graves problemas financieros (Grecia), otros en grave riesgo (España, Italia) consiguiéndose además representación de cuatro de los cinco continentes (así Japón o Australia).

Con los datos de los que se dispone, se realiza una comparativa de la situación de los países que componen la cartera de inversión objeto de estudio, la rentabilidad que ofrecían a finales de 2011 y finales de 2012 frente al riesgo que suponía invertir en ellos.

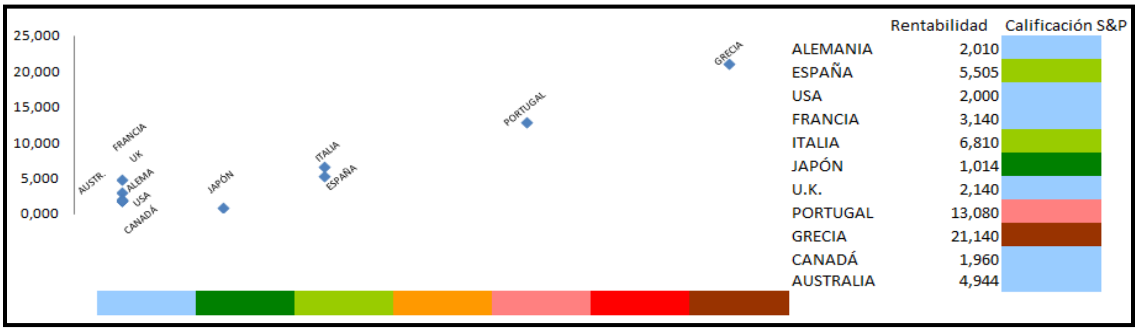



**Figura. 1**. Rentabilidad frente al riesgo a Diciembre de 2011

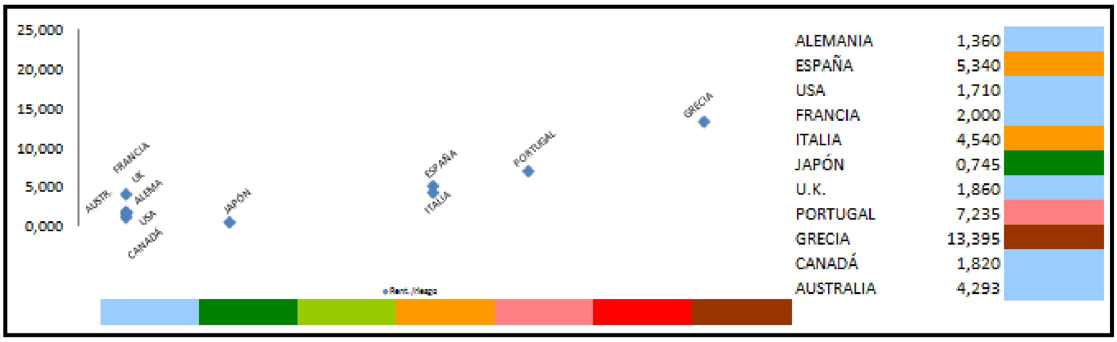



**Figura 2**. Rentabilidad frente al riesgo a Diciembre de 2012

FUENTE: www.datosmacro.com

Comparando los gráficos representados en la Figura 1. Rentabilidad frente al riesgo a Diciembre de 2011 y en la Figura 2. Rentabilidad frente al riesgo a Diciembre de 2012, se observa lo ya apuntado; que la peor parte en esta crisis económica la están sufriendo las economías más débiles.

Son muy clarificadores estos gráficos en la representación de lo ya apuntado en cuanto al distanciamiento sufrido por las principales economías respecto a aquellas con problemas.

Se puede observar cómo tanto España como Italia han bajado un escalón en la calificación de riesgos, mientras que Grecia no ha conseguido remontar. El resto de economías, han mantenido inalterable su calificación, consiguiendo además reducir los intereses que pagan por su deuda, incluso en algún caso en más de un punto como es el ejemplo de Francia.

Se ha recabado información de las rentabilidades ofrecidas por los distintos países para la venta de bonos soberanos durante los últimos años. Ya se mencionó al principio de este Proyecto que el período de estudio va a ser el englobado por la crisis financiera, datada desde comienzos de 2007 hasta la actualidad.

Las principales fuentes de datos han sido páginas especializadas como www.datosmacro.com y www.forespros.es, además y sobre todo de los Bancos Centrales de los diferentes países y del Banco Central Europeo. De acuerdo a esto se tienen las rentabilidades ofrecidas por los países que compondrán la cartera durante el período 2007- 2012 para sus bonos soberanos a largo plazo (10 años. Tabla 3.4.), medio plazo (3 años. Tabla 3.5.) y corto plazo (6 meses. Tabla 3.6):

**Tabla 3.4.** Rentabilidades bonos a 10 años

| | ALEMANIA | ESPAÑA | USA | FRANCIA | ITALIA | JAPÓN | R. UNIDO | PORTUGAL | GRECIA | CANADÁ | AUSTRALIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ene-07 | 4,03 | 4,072 | 4,81 | 4,06 | 4,24 | 1,709 | 4,93 | 4,18 | 4,28 | 4,17 | 5,621 |
| feb-07 | 4,05 | 4,111 | 4,79 | 4,1 | 4,27 | 1,708 | 4,98 | 4,19 | 4,3 | 4,03 | 5,609 |
| mar-07 | 3,95 | 4,009 | 4,61 | 3,99 | 4,18 | 1,623 | 4,86 | 4,1 | 4,2 | 4,1 | 5,434 |
| abr-07 | 4,16 | 4,209 | 4,75 | 4,21 | 4,38 | 1,676 | 5,1 | 4,3 | 4,4 | 4,15 | 5,567 |
| may-07 | 4,29 | 4,336 | 4,79 | 4,33 | 4,49 | 1,678 | 5,21 | 4,44 | 4,51 | 4,48 | 5,669 |
| jun-07 | 4,58 | 4,62 | 5,17 | 4,62 | 4,78 | 1,894 | 5,49 | 4,74 | 4,8 | 4,62 | 6,037 |
| jul-07 | 4,52 | 4,596 | 5,07 | 4,58 | 4,76 | 1,886 | 5,49 | 4,73 | 4,79 | 4,58 | 6,04 |
| ago-07 | 4,31 | 4,398 | 4,74 | 4,39 | 4,58 | 1,654 | 5,2 | 4,55 | 4,62 | 4,38 | 5,786 |
| sep-07 | 4,24 | 4,354 | 4,56 | 4,36 | 4,51 | 1,611 | 5,06 | 4,5 | 4,56 | 4,41 | 5,747 |
| oct-07 | 4,3 | 4,378 | 4,58 | 4,4 | 4,53 | 1,658 | 5,06 | 4,52 | 4,58 | 4,31 | 5,795 |
| nov-07 | 4,11 | 4,248 | 4,22 | 4,23 | 4,42 | 1,512 | 4,8 | 4,36 | 4,43 | 4,07 | 5,557 |
| dic-07 | 4,25 | 4,348 | 4,13 | 4,35 | 4,55 | 1,528 | 4,76 | 4,47 | 4,53 | 4,09 | 5,82 |
| ene-08 | 4,05 | 4,183 | 3,76 | 4,16 | 4,41 | 1,426 | 4,55 | 4,31 | 4,4 | 3,88 | 5,647 |
| feb-08 | 3,97 | 4,144 | 3,76 | 4,09 | 4,36 | 1,449 | 4,68 | 4,27 | 4,36 | 3,81 | 5,971 |
| mar-08 | 3,82 | 4,118 | 3,53 | 4,02 | 4,39 | 1,306 | 4,43 | 4,36 | 4,42 | 3,46 | 5,936 |
| abr-08 | 4,05 | 4,31 | 3,68 | 4,27 | 4,54 | 1,41 | 4,62 | 4,52 | 4,54 | 3,58 | 6,096 |
| may-08 | 4,22 | 4,422 | 3,9 | 4,4 | 4,64 | 1,67 | 4,86 | 4,6 | 4,74 | 3,68 | 6,251 |
| jun-08 | 4,55 | 4,792 | 4,13 | 4,73 | 5,11 | 1,753 | 5,17 | 4,96 | 5,17 | 3,71 | 6,384 |
| jul-08 | 4,51 | 4,798 | 4,03 | 4,7 | 5,1 | 1,609 | 5,02 | 4,95 | 5,15 | 3,81 | 6,197 |
| ago-08 | 4,22 | 4,559 | 3,92 | 4,39 | 4,82 | 1,462 | 4,67 | 4,69 | 4,87 | 3,52 | 5,855 |
| sep-08 | 4,11 | 4,568 | 3,71 | 4,36 | 4,82 | 1,486 | 4,54 | 4,66 | 4,88 | 3,66 | 5,687 |
| oct-08 | 3,9 | 4,466 | 3,8 | 4,19 | 4,76 | 1,513 | 4,52 | 4,56 | 4,93 | 3,74 | 5,921 |
| nov-08 | 3,59 | 4,147 | 3,58 | 4 | 4,61 | 1,472 | 4,14 | 4,35 | 5,09 | 3,36 | 5,982 |
| dic-08 | 3,06 | 3,858 | 2,44 | 3,54 | 4,4 | 1,311 | 3,36 | 4 | 5,08 | 2,69 | 4,892 |
| ene-09 | 3,09 | 4,146 | 2,48 | 3,61 | 4,53 | 1,25 | 3,39 | 4,32 | 5,6 | 2,97 | 4,704 |
| feb-09 | 3,16 | 4,233 | 2,86 | 3,66 | 4,53 | 1,293 | 3,59 | 4,52 | 5,7 | 2,95 | 5,306 |
| mar-09 | 3,07 | 4,059 | 2,85 | 3,65 | 4,46 | 1,308 | 3,22 | 4,68 | 5,87 | 2,96 | 5,418 |
| abr-09 | 3,18 | 4,006 | 2,9 | 3,66 | 4,35 | 1,441 | 3,38 | 4,53 | 5,5 | 3,08 | 5,552 |
| may-09 | 3,41 | 4,054 | 3,3 | 3,79 | 4,35 | 1,446 | 3,66 | 4,29 | 5,22 | 3,57 | 5,976 |
| jun-09 | 3,56 | 4,235 | 3,74 | 3,9 | 4,62 | 1,472 | 3,86 | 4,5 | 5,33 | 3,45 | 6,289 |
| jul-09 | 3,38 | 4,012 | 3,58 | 3,74 | 4,38 | 1,347 | 3,85 | 4,25 | 4,89 | 3,53 | 6,04 |
| ago-09 | 3,34 | 3,778 | 3,61 | 3,59 | 4,12 | 1,379 | 3,72 | 3,95 | 4,52 | 3,39 | 5,888 |
| sep-09 | 3,3 | 3,803 | 3,44 | 3,59 | 4,08 | 1,32 | 3,69 | 3,93 | 4,56 | 3,31 | 5,9 |
| oct-09 | 3,24 | 3,771 | 3,4 | 3,56 | 3,99 | 1,331 | 3,57 | 3,85 | 4,57 | 3,45 | 5,94 |
| nov-09 | 3,28 | 3,79 | 3,42 | 3,56 | 4,01 | 1,356 | 3,74 | 3,8 | 4,84 | 3,25 | 5,956 |
| dic-09 | 3,23 | 3,804 | 3,59 | 3,47 | 4,02 | 1,27 | 3,86 | 3,91 | 5,49 | 3,6 | 6,097 |
| ene-10 | 3,3 | 3,989 | 3,75 | 3,53 | 4,08 | 1,336 | 4,01 | 4,17 | 6,02 | 3,35 | 6,171 |
| feb-10 | 3,19 | 3,978 | 3,71 | 3,5 | 4,05 | 1,339 | 4,07 | 4,56 | 6,46 | 3,45 | 6,11 |
| mar-10 | 3,14 | 3,83 | 3,76 | 3,45 | 3,94 | 1,351 | 4,05 | 4,31 | 6,24 | 3,56 | 6,039 |
| abr-10 | 3,09 | 3,901 | 3,87 | 3,41 | 3,93 | 1,352 | 4,05 | 4,78 | 7,83 | 3,66 | 6,251 |
| may-10 | 2,82 | 4,084 | 3,46 | 3,09 | 4,01 | 1,279 | 3,76 | 5,02 | 7,97 | 3,25 | 5,928 |
| jun-10 | 2,63 | 4,555 | 3,24 | 3,07 | 4,11 | 1,21 | 3,51 | 5,54 | 9,1 | 3,08 | 5,886 |
| jul-10 | 2,65 | 4,433 | 3,01 | 2,99 | 4,03 | 1,104 | 3,41 | 5,49 | 10,34 | 3,22 | 5,756 |
| ago-10 | 2,38 | 4,037 | 2,71 | 2,69 | 3,81 | 0,982 | 3,1 | 5,31 | 10,7 | 2,83 | 5,553 |
| sep-10 | 2,33 | 4,095 | 2,65 | 2,67 | 3,84 | 1,072 | 3,03 | 6,08 | 11,34 | 2,74 | 5,445 |
| oct-10 | 2,38 | 4,037 | 2,52 | 2,72 | 3,77 | 0,892 | 2,99 | 6,05 | 9,57 | 2,89 | 5,374 |
| nov-10 | 2,55 | 4,686 | 2,75 | 2,99 | 4,14 | 1,051 | 3,22 | 6,91 | 11,52 | 3,19 | 5,665 |
| dic-10 | 2,95 | 5,374 | 3,3 | 3,34 | 4,63 | 1,194 | 3,53 | 6,53 | 12,01 | 3,16 | 5,867 |

| | ALEMANIA | ESPAÑA | USA | FRANCIA | ITALIA | JAPÓN | R. UNIDO | PORTUGAL | GRECIA | CANADÁ | AUSTRALIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ene-11 | 3,05 | 5,379 | 3,41 | 3,44 | 4,73 | 1,216 | 3,63 | 6,95 | 11,73 | 3,31 | 5,861 |
| feb-11 | 3,23 | 5,258 | 3,59 | 3,6 | 4,74 | 1,293 | 3,81 | 7,34 | 11,4 | 3,32 | 5,97 |
| mar-11 | 3,24 | 5,249 | 3,44 | 3,6 | 4,8 | 1,256 | 3,67 | 7,8 | 12,44 | 3,29 | 5,804 |
| abr-11 | 3,36 | 5,329 | 3,47 | 3,69 | 4,75 | 1,27 | 3,68 | 9,19 | 13,86 | 3,27 | 5,889 |
| may-11 | 3,13 | 5,322 | 3,19 | 3,5 | 4,74 | 1,148 | 3,4 | 9,63 | 15,94 | 3,08 | 5,684 |
| jun-11 | 2,98 | 5,48 | 3 | 3,44 | 4,82 | 1,136 | 3,27 | 10,86 | 16,69 | 3,09 | 5,56 |
| jul-11 | 2,79 | 5,825 | 3,03 | 3,4 | 5,49 | 1,118 | 3,15 | 12,15 | 16,15 | 2,88 | 5,595 |
| ago-11 | 2,27 | 5,252 | 2,32 | 2,99 | 5,28 | 1,03 | 2,57 | 10,93 | 15,9 | 2,49 | 5,371 |
| sep-11 | 1,87 | 5,2 | 1,98 | 2,65 | 5,53 | 1,011 | 2,41 | 11,34 | 17,78 | 2,19 | 5,066 |
| oct-11 | 2,04 | 5,251 | 2,14 | 2,99 | 5,77 | 1,011 | 2,51 | 11,72 | 18,04 | 2,38 | 5,303 |
| nov-11 | 1,94 | 6,192 | 2,02 | 3,42 | 6,82 | 0,993 | 2,25 | 11,89 | 17,92 | 2,15 | 5,106 |
| dic-11 | 2,01 | 5,505 | 2 | 3,14 | 6,81 | 1,014 | 2,14 | 13,08 | 21,14 | 1,96 | 4,944 |
| ene-12 | 1,87 | 5,399 | 1,96 | 3,18 | 6,56 | 0,98 | 2,05 | 13,85 | 25,91 | 2,04 | 4,853 |
| feb-12 | 1,89 | 5,111 | 1,96 | 3,02 | 5,56 | 0,968 | 2,13 | 12,81 | 29,24 | 1,98 | 4,97 |
| mar-12 | 1,88 | 5,17 | 2,17 | 2,96 | 4,96 | 1,012 | 2,26 | 13,01 | 19,07 | 2,12 | 5,091 |
| abr-12 | 1,72 | 5,79 | 2,05 | 2,99 | 5,51 | 0,953 | 2,14 | 12,01 | 21,48 | 2,1 | 4,831 |
| may-12 | 1,47 | 6,126 | 1,81 | 2,76 | 5,75 | 0,859 | 1,88 | 11,59 | 26,9 | 1,79 | 4,329 |
| jun-12 | 1,43 | 6,589 | 1,61 | 2,57 | 5,92 | 0,841 | 1,68 | 10,56 | 27,82 | 1,72 | 4,06 |
| jul-12 | 1,32 | 6,795 | 1,51 | 2,28 | 6,01 | 0,778 | 1,56 | 10,49 | 25,82 | 1,6 | 3,919 |
| ago-12 | 1,42 | 6,581 | 1,68 | 2,11 | 5,82 | 0,809 | 1,57 | 9,89 | 24,34 | 1,8 | 4,173 |
| sep-12 | 1,54 | 5,92 | 1,71 | 2,24 | 5,23 | 0,806 | 1,78 | 8,62 | 20,91 | 1,75 | 4,182 |
| oct-12 | 1,52 | 5,647 | 1,73 | 2,18 | 4,96 | 0,776 | 1,82 | 8,17 | 17,96 | 1,78 | 4,107 |
| nov-12 | 1,39 | 5,69 | 1,65 | 2,14 | 4,86 | 0,743 | 1,8 | 8,32 | 17,2 | 1,72 | 4,105 |
| dic-12 | 1,36 | 5,34 | 1,71 | 2 | 4,54 | 0,745 | 1,86 | 7,235 | 13,395 | 1,82 | 4,293 |

**Tabla 3.5.** Rentabilidades bonos a 3 años

| | ALEMANIA | ESPAÑA | USA | FRANCIA | ITALIA | JAPÓN | R. UNIDO | PORTUGAL | GRECIA | CANADÁ | AUSTRALIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ene-07 | 3,93 | 3,95 | 4,85 | 3,93 | 3,98 | 0,958 | 5,39 | 3,96 | 4,01 | 4,09 | 5,894 |
| feb-07 | 3,95 | 3,96 | 4,83 | 3,96 | 3,99 | 0,943 | 5,43 | 3,99 | 4,03 | 3,94 | 5,803 |
| mar-07 | 3,9 | 3,97 | 4,57 | 3,92 | 3,95 | 0,926 | 5,34 | 3,95 | 3,99 | 3,98 | 5,742 |
| abr-07 | 4,1 | 9,98 | 4,66 | 4,11 | 4,14 | 0,974 | 5,52 | 4,13 | 4,17 | 4,12 | 5,904 |
| may-07 | 4,25 | 3,97 | 4,74 | 4,26 | 4,31 | 1,023 | 5,64 | 4,3 | 4,31 | 4,55 | 5,877 |
| jun-07 | 4,48 | 3,98 | 5,06 | 4,49 | 4,54 | 1,201 | 5,87 | 4,54 | 4,52 | 4,66 | 6,183 |
| jul-07 | 4,47 | 3,99 | 4,88 | 4,49 | 4,55 | 1,199 | 5,8 | 4,54 | 4,54 | 4,67 | 6,176 |
| ago-07 | 4,17 | 4 | 4,39 | 4,2 | 4,29 | 1,02 | 5,45 | 4,28 | 4,28 | 4,27 | 5,969 |
| sep-07 | 4,06 | 4,01 | 4,08 | 4,09 | 4,23 | 0,92 | 5,15 | 4,19 | 4,21 | 4,25 | 6,077 |
| oct-07 | 4,11 | 4,02 | 4,03 | 4,12 | 4,24 | 0,941 | 5,07 | 4,18 | 4,19 | 4,22 | 6,353 |
| nov-07 | 3,87 | 4,03 | 3,35 | 3,9 | 4,07 | 0,849 | 4,68 | 4,01 | 4,08 | 3,85 | 6,126 |
| dic-07 | 3,94 | 4,05 | 3,29 | 3,99 | 4,17 | 0,801 | 4,54 | 4,1 | 4,16 | 3,94 | 6,233 |
| ene-08 | 3,67 | 3,97 | 2,76 | 3,7 | 3,84 | 0,667 | 4,31 | 3,79 | 3,88 | 3,3 | 6,138 |
| feb-08 | 3,38 | 3,955 | 2,4 | 3,41 | 3,56 | 0,685 | 4,25 | 3,48 | 3,68 | 3,17 | 6,248 |
| mar-08 | 3,32 | 3,93 | 2,06 | 3,44 | 3,71 | 0,611 | 3,95 | 3,7 | 3,92 | 2,67 | 5,807 |
| abr-08 | 3,7 | 3,904 | 2,44 | 3,81 | 4,04 | 0,761 | 4,23 | 4,01 | 4,14 | 2,92 | 5,806 |
| may-08 | 3,97 | 3,955 | 2,81 | 4,06 | 4,27 | 0,987 | 4,73 | 4,24 | 4,35 | 3,19 | 5,843 |
| jun-08 | 4,52 | 3,992 | 3,15 | 4,63 | 4,9 | 1,069 | 5,31 | 4,8 | 4,97 | 3,35 | 6,274 |
| jul-08 | 4,45 | 4,575 | 2,96 | 4,56 | 4,87 | 0,959 | 5,03 | 4,77 | 4,94 | 3,23 | 5,999 |
| ago-08 | 4,06 | 4,956 | 2,8 | 4,16 | 4,44 | 0,851 | 4,63 | 4,38 | 4,53 | 2,89 | 5,512 |
| sep-08 | 3,85 | 4,685 | 2,5 | 3,97 | 4,32 | 0,915 | 4,38 | 4,23 | 4,42 | 3,03 | 5,367 |
| oct-08 | 3,16 | 4,346 | 2,18 | 3,28 | 3,71 | 0,967 | 3,77 | 3,58 | 3,97 | 2,38 | 5,063 |
| nov-08 | 2,47 | 3,414 | 1,8 | 2,76 | 3,44 | 0,82 | 2,87 | 3,43 | 4,12 | 2 | 4,607 |
| dic-08 | 2,1 | 2,955 | 1,19 | 2,51 | 3,48 | 0,719 | 2,24 | 3,19 | 4,28 | 1,32 | 4,066 |
| ene-09 | 1,92 | 3,1 | 1,2 | 2,08 | 3,14 | 0,615 | 2,14 | 2,8 | 3,93 | 1,61 | 3,778 |
| feb-09 | 1,79 | 2,451 | 1,41 | 1,87 | 2,67 | 0,656 | 2 | 2,41 | 3,91 | 1,72 | 4,079 |
| mar-09 | 1,7 | 2,52 | 1,39 | 1,95 | 2,47 | 0,667 | 2,01 | 2,86 | 4,05 | 1,51 | 4,374 |
| abr-09 | 1,8 | 2,517 | 1,38 | 1,93 | 2,36 | 0,748 | 2,12 | 2,68 | 3,63 | 1,39 | 4,758 |
| may-09 | 1,75 | 2,356 | 1,43 | 1,83 | 2,39 | 0,573 | 2 | 2,43 | 3,1 | 1,84 | 5,225 |
| jun-09 | 1,87 | 2,289 | 1,74 | 2,02 | 2,5 | 0,507 | 2,21 | 2,51 | 3,05 | 1,89 | 5,988 |
| jul-09 | 1,67 | 2,052 | 1,54 | 1,93 | 2,17 | 0,42 | 2,2 | 2,16 | 2,57 | 1,94 | 6,119 |
| ago-09 | 1,77 | 2,059 | 1,64 | 1,98 | 2,16 | 0,395 | 1,99 | 2,18 | 5,52 | 1,79 | 6,048 |
| sep-09 | 1,62 | 1,53 | 1,48 | 1,79 | 1,95 | 0,329 | 1,71 | 1,96 | 2,26 | 1,89 | 5,682 |
| oct-09 | 1,82 | 1,875 | 1,47 | 1,79 | 1,94 | 0,385 | 1,58 | 1,91 | 2,26 | 1,9 | 5,756 |
| nov-09 | 1,71 | 2,275 | 1,32 | 1,7 | 1,99 | 0,372 | 1,67 | 1,87 | 2,45 | 1,62 | 5,565 |
| dic-09 | 1,58 | 2,152 | 1,36 | 1,56 | 1,95 | 0,252 | 1,68 | 1,93 | 3,72 | 1,88 | 5,5 |
| ene-10 | 1,67 | 2,385 | 1,49 | 1,56 | 2,17 | 0,264 | 1,78 | 2,13 | 4,72 | 1,66 | 5,629 |
| feb-10 | 1,48 | 2,598 | 1,4 | 1,54 | 2,17 | 0,263 | 2,01 | 2,52 | 5,92 | 1,65 | 5,467 |
| mar-10 | 1,35 | 2,663 | 1,5 | 1,4 | 1,88 | 0,251 | 1,88 | 2,5 | 5,51 | 2,03 | 5,644 |
| abr-10 | 1,24 | 2,03 | 1,64 | 1,29 | 1,89 | 0,256 | 1,83 | 3,17 | 7,91 | 2,49 | 5,878 |
| may-10 | 0,8 | 2,98 | 1,33 | 0,92 | 2,16 | 0,226 | 1,54 | 3,64 | 8,28 | 2 | 5,536 |
| jun-10 | 0,67 | 3,394 | 1,18 | 0,96 | 2,27 | 0,21 | 1,32 | 3,72 | 9,41 | 1,75 | 5,181 |
| jul-10 | 1,01 | 3,152 | 0,98 | 1,15 | 2,44 | 0,188 | 1,23 | 3,59 | 11,17 | 1,82 | 4,866 |
| ago-10 | 0,88 | 2,307 | 0,77 | 0,99 | 2,21 | 0,158 | 1,02 | 3,36 | 11,65 | 1,53 | 4,723 |
| sep-10 | 0,92 | 2,465 | 0,74 | 1,04 | 2,32 | 0,171 | 0,94 | 4,29 | 11,63 | 1,58 | 4,855 |
| oct-10 | 1,05 | 2,55 | 0,57 | 1,19 | 2,26 | 0,159 | 0,87 | 4,11 | 9,64 | 1,59 | 5,011 |
| nov-10 | 1,14 | 2,896 | 0,66 | 1,29 | 2,72 | 0,218 | 1,12 | 5,12 | 13,08 | 1,94 | 5,241 |
| dic-10 | 1,18 | 3,797 | 0,99 | 1,33 | 3,07 | 0,295 | 1,63 | 4,85 | 13,75 | 1,9 | 5,404 |

| | ALEMANIA | ESPAÑA | USA | FRANCIA | ITALIA | JAPÓN | R. UNIDO | PORTUGAL | GRECIA | CANADÁ | AUSTRALIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ene-11 | 1,37 | 3,459 | 1,03 | 1,52 | 3,17 | 0,297 | 1,75 | 5,1 | 13,78 | 1,91 | 5,394 |
| feb-11 | 1,79 | 3,297 | 1,28 | 1,92 | 3,14 | 0,366 | 2 | 5,81 | 13,4 | 2,15 | 5,564 |
| mar-11 | 1,94 | 3,609 | 1,17 | 2,08 | 3,15 | 0,319 | 1,77 | 7,26 | 15,33 | 2,13 | 5,348 |
| abr-11 | 2,11 | 3,602 | 1,21 | 2,23 | 3,37 | 0,311 | 1,74 | 10,59 | 19,11 | 2,11 | 5,42 |
| may-11 | 1,95 | 3,895 | 0,94 | 2,12 | 3,41 | 0,258 | 1,42 | 11,6 | 24,28 | 1,91 | 5,233 |
| jun-11 | 1,69 | 4,051 | 0,7 | 1,88 | 3,51 | 0,245 | 1,18 | 13,39 | 26,48 | 1,86 | 4,849 |
| jul-11 | 1,5 | 4,321 | 0,69 | 1,73 | 4,38 | 0,245 | 1,03 | 17,9 | 28,96 | 1,71 | 4,62 |
| ago-11 | 1,02 | 4,901 | 0,39 | 1,28 | 4,17 | 0,206 | 0,71 | 13,62 | 26,74 | 1,27 | 3,985 |
| sep-11 | 0,67 | 4,509 | 0,35 | 1,17 | 4,64 | 0,198 | 0,73 | 14,99 | 31,51 | 1,07 | 3,827 |
| oct-11 | 0,77 | 3,52 | 0,47 | 1,37 | 4,83 | 0,225 | 0,86 | 17,04 | 34,61 | 1,23 | 3,954 |
| nov-11 | 0,56 | 4,363 | 0,39 | 1,75 | 6,77 | 0,206 | 0,65 | 17,21 | 34,08 | 1,1 | 3,577 |
| dic-11 | 0,43 | 5,203 | 0,39 | 1,32 | 5,8 | 0,216 | 0,52 | 17,17 | 45,88 | 0,99 | 3,336 |
| ene-12 | 0,34 | 3,576 | 0,36 | 1,15 | 4,66 | 0,22 | 0,53 | 18,29 | 68,08 | 1,06 | 3,335 |
| feb-12 | 0,41 | 3,126 | 0,38 | 1,06 | 3,43 | 0,185 | 0,52 | 16,59 | 77,65 | 1,22 | 3,561 |
| mar-12 | 0,38 | 2,518 | 0,5 | 1,06 | 2,83 | 0,166 | 0,58 | 15,62 | OUT | 1,32 | 3,693 |
| abr-12 | 0,27 | 3,52 | 0,43 | 1,04 | 3,79 | 0,167 | 0,54 | 13,92 | OUT | 1,53 | 3,288 |
| may-12 | 0,16 | 5,13 | 0,39 | 0,83 | 4,04 | 0,12 | 0,44 | 12,43 | OUT | 1,16 | 2,679 |
| jun-12 | 0,18 | 5,51 | 0,38 | 0,72 | 4,87 | 0,106 | 0,36 | 8,85 | OUT | 1,04 | 2,378 |
| jul-12 | 0,05 | 5,302 | 0,33 | 0,36 | 4,66 | 0,108 | 0,24 | 8,15 | OUT | 1 | 2,302 |
| ago-12 | 0,05 | 4,848 | 0,37 | 0,26 | 3,9 | 0,106 | 0,2 | 6,67 | OUT | 1,23 | 2,632 |
| sep-12 | 0,13 | 3,546 | 0,33 | 0,37 | 3,03 | 0,112 | 0,27 | 5,09 | OUT | 1,16 | 2,465 |
| oct-12 | 0,15 | 3,266 | 0,37 | 0,4 | 2,86 | 0,112 | 0,29 | 5,07 | OUT | 1,17 | 2,541 |
| nov-12 | 0,06 | 3,663 | 0,35 | 0,31 | 2,71 | 0,107 | 0,32 | 6,04 | OUT | 1,16 | 2,652 |
| dic-12 | 0,03 | 3,161 | 0,32 | 0,3 | 2,65 | 0,1 | 0,3 | 6,1 | OUT | 1,2 | 2,815 |

**Tabla 3.6.** Rentabilidades bonos a 6 meses

| | ALEMANIA | ESPAÑA | USA | FRANCIA | ITALIA | JAPÓN | R. UNIDO | PORTUGAL | GRECIA | CANADÁ | AUSTRALIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ene-07 | 3,7 | 3,807 | 5,28 | 3,711 | 3,784 | 0,52 | 5,44 | 3,57 | 3,498 | 4,1 | 6,431 |
| feb-07 | 3,77 | 3,878 | 5,29 | 3,78 | 3,866 | 0,54 | 5,5 | 3,641 | 3,511 | 3,97 | 6,37 |
| mar-07 | 3,84 | 3,886 | 5,27 | 3,844 | 3,92 | 0,66 | 5,49 | 3,649 | 3,636 | 4,01 | 6,457 |
| abr-07 | 3,92 | 4,083 | 5,28 | 3,949 | 4,022 | 0,62 | 5,59 | 3,846 | 3,735 | 4,17 | 6,563 |
| may-07 | 4,02 | 4,221 | 5,28 | 4,041 | 4,136 | 0,62 | 5,71 | 3,984 | 3,745 | 4,56 | 6,438 |
| jun-07 | 4,1 | 4,321 | 5,29 | 4,13 | 4,181 | 0,67 | 5,82 | 4,084 | 3,951 | 4,66 | 6,594 |
| jul-07 | 4,16 | 4,364 | 5,31 | 4,188 | 4,248 | 0,72 | 5,97 | 4,127 | 3,995 | 4,71 | 6,596 |
| ago-07 | 4,46 | 4,18 | 5,44 | 4,111 | 4,06 | 0,82 | 6,33 | 3,943 | 4,092 | 4,28 | 6,672 |
| sep-07 | 4,67 | 4,026 | 5,47 | 4,001 | 4,055 | 0,85 | 6,53 | 3,789 | 4,243 | 4,22 | 6,654 |
| oct-07 | 4,62 | 4,022 | 5,09 | 3,973 | 4,01 | 0,84 | 6,16 | 3,785 | 4,26 | 4,22 | 6,846 |
| nov-07 | 4,55 | 4,02 | 4,93 | 3,977 | 4,01 | 0,83 | 6,31 | 3,783 | 4,25 | 3,84 | 7,004 |
| dic-07 | 4,79 | 4,026 | 4,97 | 3,975 | 3,985 | 0,81 | 6,28 | 3,789 | 4,52 | 3,91 | 6,929 |
| ene-08 | 4,42 | 3,761 | 3,85 | 3,908 | 3,83 | 0,74 | 5,56 | 3,524 | 4,35 | 3,22 | 6,822 |
| feb-08 | 4,29 | 3,611 | 3,02 | 3,792 | 3,899 | 0,76 | 5,57 | 3,374 | 4,3 | 3,1 | 7,186 |
| mar-08 | 4,52 | 3,711 | 2,73 | 3,856 | 4,171 | 0,8 | 5,82 | 3,474 | 4,42 | 2,63 | 7,148 |
| abr-08 | 4,71 | 3,978 | 2,91 | 3,943 | 4,078 | 0,77 | 5,84 | 3,741 | 4,68 | 2,74 | 7,333 |
| may-08 | 4,8 | 4,178 | 2,83 | 4,031 | 4,167 | 0,79 | 5,75 | 3,941 | 4,73 | 3,05 | 7,465 |
| jun-08 | 4,87 | 4,548 | 2,9 | 4,333 | 4,486 | 0,79 | 5,85 | 4,311 | 4,85 | 3,27 | 7,548 |
| jul-08 | 4,9 | 4,492 | 2,91 | 4,382 | 4,433 | 0,78 | 5,76 | 4,255 | 5,09 | 3,1 | 7,32 |
| ago-08 | 4,9 | 4,367 | 2,91 | 4,321 | 4,387 | 0,77 | 5,7 | 4,13 | 4,99 | 2,76 | 6,51 |
| sep-08 | 4,94 | 4,233 | 3,35 | 4,178 | 4,285 | 0,77 | 5,79 | 3,996 | 5,11 | 2,93 | 6,1 |
| oct-08 | 5,03 | 3,179 | 4,53 | 2,744 | 2,942 | 0,8 | 6,06 | 2,942 | 5,37 | 2,16 | 4,306 |
| nov-08 | 4,2 | 2,4 | 2,8 | 2,418 | 2,478 | 0,73 | 4,18 | 2,163 | 5,22 | 1,79 | 3,079 |
| dic-08 | 3,18 | 2,093 | 2,05 | 1,941 | 1,911 | 0,72 | 3,04 | 1,856 | 5,36 | 1,11 | 2,462 |
| ene-09 | 2,35 | 1,465 | 1,28 | 1,455 | 1,484 | 0,53 | 2,15 | 1,228 | 4,89 | 1,39 | 2,212 |
| feb-09 | 1,89 | 1,249 | 1,42 | 1,024 | 1,239 | 0,54 | 1,94 | 1,012 | 3,873 | 1,27 | 2,159 |
| mar-09 | 1,54 | 1,234 | 1,34 | 0,809 | 1,171 | 0,44 | 1,65 | 0,997 | 3,25 | 1,1 | 2,265 |
| abr-09 | 1,32 | 1,106 | 1,25 | 0,827 | 1,073 | 0,31 | 1,3 | 0,869 | 2,84 | 0,8 | 2,425 |
| may-09 | 1,2 | 0,946 | 0,94 | 0,787 | 1,026 | 0,31 | 1,13 | 0,709 | 2,58 | 1,04 | 2,62 |
| jun-09 | 1,14 | 0,956 | 0,82 | 0,804 | 0,758 | 0,21 | 1,01 | 0,719 | 2,55 | 1,33 | 2,908 |
| jul-09 | 0,87 | 0,83 | 0,7 | 0,568 | 0,595 | 0,18 | 0,8 | 0,593 | 2,34 | 1,33 | 3,027 |
| ago-09 | 0,76 | 0,785 | 0,6 | 0,492 | 0,551 | 0,15 | 0,55 | 0,548 | 2,24 | 1,2 | 3,705 |
| sep-09 | 0,64 | 0,776 | 0,46 | 0,456 | 0,553 | 0,14 | 0,39 | 0,539 | 2,08 | 1,3 | 3,867 |
| oct-09 | 0,6 | 0,856 | 0,44 | 0,523 | 0,629 | 0,16 | 0,38 | 0,619 | 2,08 | 1,31 | 4,453 |
| nov-09 | 0,56 | 0,854 | 0,4 | 0,508 | 0,68 | 0,14 | 0,45 | 0,617 | 2,01 | 1,06 | 4,375 |
| dic-09 | 0,55 | 0,881 | 0,31 | 0,485 | 0,609 | 0,13 | 0,45 | 0,644 | 2,1 | 1,41 | 4,346 |
| ene-10 | 0,52 | 0,807 | 0,3 | 0,437 | 0,56 | 0,11 | 0,45 | 0,57 | 2,176 | 1,21 | 4,557 |
| feb-10 | 0,5 | 0,832 | 0,3 | 0,398 | 0,647 | 0,11 | 0,45 | 0,595 | 2,351 | 1,19 | 4,297 |
| mar-10 | 0,5 | 0,74 | 0,29 | 0,388 | 0,568 | 0,1 | 0,48 | 0,503 | 2,612 | 1,63 | 4,637 |
| abr-10 | 0,5 | 1,085 | 0,35 | 0,424 | 0,816 | 0,1 | 0,5 | 0,848 | 2,979 | 1,89 | 4,777 |
| may-10 | 0,5 | 1,583 | 0,54 | 0,337 | 1,331 | 0,11 | 0,55 | 1,346 | 3,42 | 1,44 | 4,614 |
| jun-10 | 0,55 | 2,269 | 0,66 | 0,295 | 0,981 | 0,12 | 0,64 | 2,032 | 3,607 | 1,45 | 4,574 |
| jul-10 | 0,71 | 2,096 | 0,69 | 0,527 | 1,037 | 0,12 | 0,65 | 1,859 | 3,712 | 1,55 | 4,64 |
| ago-10 | 0,76 | 1,732 | 0,37 | 0,478 | 0,96 | 0,12 | 0,64 | 1,495 | 3,657 | 1,21 | 4,543 |
| sep-10 | 0,77 | 1,79 | 0,33 | 0,476 | 1,064 | 0,13 | 0,6 | 1,553 | 3,61 | 1,42 | 4,739 |
| oct-10 | 0,89 | 1,828 | 0,3 | 0,705 | 1,207 | 0,09 | 0,6 | 1,591 | 3,679 | 1,43 | 4,842 |
| nov-10 | 0,96 | 2,295 | 0,38 | 0,753 | 1,488 | 0,08 | 0,6 | 2,058 | 3,646 | 1,7 | 4,951 |
| dic-10 | 0,92 | 3,256 | 0,35 | 0,62 | 1,705 | 0,1 | 0,65 | 3,019 | 3,682 | 1,68 | 4,939 |

| | ALEMANIA | ESPAÑA | USA | FRANCIA | ITALIA | JAPÓN | R. UNIDO | PORTUGAL | GRECIA | CANADÁ | AUSTRALIA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ene-11 | 0,94 | 2,768 | 0,37 | 0,605 | 1,426 | 0,12 | 0,7 | 2,531 | 3,74 | 1,64 | 4,879 |
| feb-11 | 0,99 | 2,218 | 0,27 | 0,794 | 1,311 | 0,12 | 0,7 | 1,981 | 3,754 | 1,69 | 4,893 |
| mar-11 | 1,07 | 2,144 | 0,34 | 0,957 | 1,401 | 0,11 | 0,71 | 1,907 | 3,755 | 1,72 | 4,8117 |
| abr-11 | 1,25 | 2,549 | 0,32 | 1,111 | 1,666 | 0,14 | 0,75 | 2,312 | 3,883 | 1,74 | 4,8456 |
| may-11 | 1,31 | 2,515 | 0,26 | 1,175 | 1,664 | 0,12 | 0,75 | 2,278 | 3,952 | 1,57 | 4,9768 |
| jun-11 | 1,37 | 2,687 | 0,21 | 1,215 | 1,998 | 0,12 | 0,75 | 2,45 | 4,099 | 1,55 | 4,8067 |
| jul-11 | 1,5 | 3,287 | 0,29 | 1,201 | 2,281 | 0,14 | 0,75 | 3,05 | 4,287 | 1,47 | 4,5486 |
| ago-11 | 1,45 | 3,254 | 0,26 | 0,772 | 2,151 | 0,13 | 0,79 | 3,017 | 4,306 | 1,12 | 3,6223 |
| sep-11 | 1,42 | 3,331 | 0,28 | 0,536 | 3,094 | 0,13 | 0,88 | 3,094 | 4,368 | 0,95 | 3,5668 |
| oct-11 | 1,45 | 3,468 | 0,34 | 0,615 | 3,566 | 0,13 | 0,93 | 3,231 | 4,496 | 1,09 | 3,728 |
| nov-11 | 1,36 | 4,747 | 0,42 | 0,681 | 6,608 | 0,11 | 0,97 | 4,51 | 4,616 | 1,01 | 3,3541 |
| dic-11 | 1,33 | 3,453 | 0,48 | 0,201 | 3,278 | 0,09 | 1,03 | 3,216 | 4,883 | 0,95 | 3,129 |
| ene-12 | 1,06 | 2,044 | 0,42 | 0,252 | 1,979 | 0,1 | 1,05 | 1,807 | 4,79 | 1,03 | 3,3355 |
| feb-12 | 0,91 | 1,632 | 0,34 | 0,246 | 1,206 | 0,11 | 1,03 | 1,395 | 4,864 | 1,12 | 3,6781 |
| mar-12 | 0,7 | 1,434 | 0,35 | 0,117 | 1,122 | 0,11 | 0,99 | 1,197 | 4,937 | 1,19 | 3,7859 |
| abr-12 | 0,6 | 2,419 | 0,35 | 0,118 | 1,78 | 0,1 | 0,97 | 2,182 | 4,964 | 1,42 | 3,3883 |
| may-12 | 0,54 | 3,269 | 0,37 | 0,099 | 2,115 | 0,1 | 0,96 | 3,032 | 4,904 | 1,1 | 2,7326 |
| jun-12 | 0,5 | 4,175 | 0,36 | 0,113 | 2,978 | 0,08 | 0,91 | 3,938 | 5,014 | 1 | 2,555 |
| jul-12 | 0,34 | 4,045 | 0,4 | 0,01 | 2,469 | 0,06 | 0,74 | 3,808 | 4,822 | 0,98 | 2,7536 |
| ago-12 | 0,17 | 3,094 | 0,35 | -0,005 | 1,591 | 0,05 | 0,62 | 2,857 | 4,557 | 1,16 | 3,0474 |
| sep-12 | 0,09 | 2,63 | 0,32 | 0,007 | 1,509 | 0,06 | 0,56 | 2,393 | 4,605 | 1,1 | 2,8685 |
| oct-12 | 0,07 | 2,538 | 0,27 | 0,006 | 1,352 | 0,07 | 0,45 | 2,301 | 4,644 | 1,08 | 2,6643 |
| nov-12 | 0,08 | 2,424 | 0,27 | -0,006 | 0,921 | 0,07 | 0,45 | 2,187 | 4,603 | 1,1 | 2,8232 |
| dic-12 | 0,08 | 2,26 | 0,3 | 0,002 | 0,951 | 0,09 | 0,45 | 2,023 | 4,698 | 1,13 | 2,6795 |

# 4 Modelos de gestión del riesgo.

Se procede a partir de este punto a la aplicación del modelo en sí. Se comienza con una breve introducción teórica, definiendo una serie de términos necesarios para la comprensión de lo que viene a continuación, que es el desarrollo del modelo de Markowitz y su aplicación práctica.

## 4.1 Portafolio de inversión.

También llamado Cartera de Inversión, es una selección de documentos o valores que se cotizan en el mercado bursátil y en los que una persona o empresa deciden colocar o invertir su dinero.

Los portafolios de inversión se integran con los diferentes bonos que el inversionista haya seleccionado. Para hacer su elección, debe tener en cuenta aspectos básicos como el nivel de riesgo que está dispuesto a correr o los objetivos que busca alcanzar con su inversión.

En este sentido, en la selección de los activos específicos que serán incluidos en el portafolio de inversión se tratará de construir un portafolio eficiente (aquel que provee un mayor retorno esperado para un determinado nivel de riesgo o, de manera equivalente, el menor riesgo para un retorno esperado dado) y, para ello, será necesario conocer muy bien los tipos de bonos disponibles en el mercado de valores para, de esta forma, poder elegir aquellas opciones más convenientes, de acuerdo a las expectativas dadas.

Con estas consideraciones en mente y con un análisis meticuloso basado en la tolerancia de riesgo del inversionista, un portafolio puede ser construido con una visión estratégica apropiada que potencialmente pueda aumentar el retorno de la inversión, diversificando los riesgos de las diferentes inversiones.

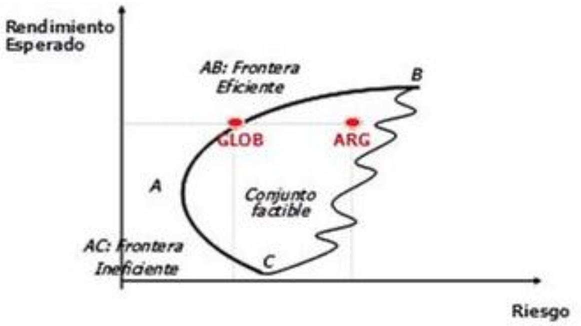



**Figura 3.** Frontera eficiente

Los riesgos inherentes a la inversión son asumidos, exclusivamente, por el inversionista, por lo que cualquier fluctuación, ya sea positiva o negativa, únicamente le afectará a él.

Cuando se realiza una inversión, existen diversos tipos de riesgos entre los que se pueden destacar por su importancia los siguientes:

- Los riesgos de mercado; se producen debido a que las condiciones político económicas del país y las condiciones exteriores suelen ser cambiantes, y esto ocasiona que haya turbulencia en los valores de las tasas de interés, en las paridades y, por supuesto, en la situación de liquidez. Este tipo de riesgo es también conocido como riesgo sistemático, y es imposible eliminarlo, pues esta fuera del control de los inversionistas, así que se debe aprender a manejarlo.

- Los riesgos de crédito; se refieren a la posibilidad que existe de incumplimiento de contrato, es decir, que el emisor no liquide su deuda ya que nada asegura su solvencia. Siempre existirá la posibilidad de quiebra.

- Los riesgos tecnológicos u operativos; se originan porque las empresas pueden estar operando con tecnología obsoleta, empleando sistemas inadecuados o realizando operaciones de manera equivocada (por ejemplo, cometiendo errores administrativos). Por supuesto, todos estos factores aumentan la incertidumbre de la inversión.

Mediante la información histórica del comportamiento de los bonos de inversión es posible realizar una medición del riesgo, esta medición requiere del empleo de técnicas estadísticas tales como el cálculo de la media ó valor promedio (x), la varianza ($\sigma^2$) y la desviación estándar (S).

Siempre existirán fluctuaciones en el precio, es decir, el valor futuro de un instrumento variará con respecto al valor promedio del mismo, a esta desviación se le conoce como riesgo de precio. Este proyecto se basa, de entre todos los existentes para la medición del riesgo, en el modelo propuesto por Markowitz para la obtención de portafolios eficientes.

Cuando las situaciones en el mercado cambian, el valor de los bonos de inversión puede verse afectado, ya sea positiva o negativamente.


**Figura 4.** Tipos de riesgo.

Esquemáticamente en la Figura 4 se representan los tipos de riesgo a los que se enfrenta el inversionista en el mercado. Un riesgo que puede minimizar el inversionista es el llamado riesgo no sistemático, el cual tiene que ver con el comportamiento de los bonos financieros, y lo que se busca aquí es que los cambios en los bonos financieros sean independientes, así se busca que no todos los bonos financieros disminuyan al mismo tiempo, reduciendo así el riesgo de pérdida. Para hacer la elección de este tipo de bonos independientes también existen técnicas estadísticas tales como el cálculo del coeficiente de correlación ($\rho_{ij}$) y la covarianza ($\sigma_{ij}$).

El coeficiente de correlación se denota por: $\rho_{ij}$ donde: $-1 < \rho_{ij} < 1$.

El coeficiente de correlación se emplea para determinar el grado de correlación existente entre los distintos rendimientos de los bonos de inversión que conforman el portafolio y permite observar como varía el rendimiento del instrumento *j* al variar el rendimiento del instrumento *i*.

Si $\rho_{ij}$ = 1, los rendimientos de dichos bonos varía de forma directamente proporcional a través del tiempo, es decir, si uno aumenta el otro también lo hará y viceversa. Gráficamente, se puede representar esta situación, como se aprecia en la Figura. 5.

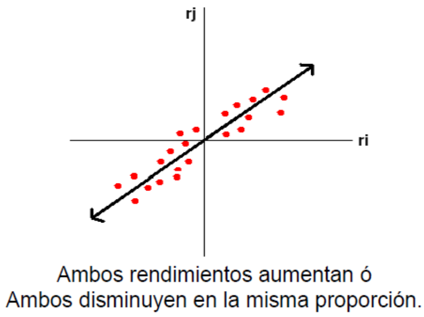



**Figura 5.** $\rho_{ij}$ = 1

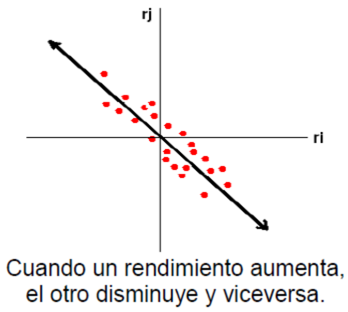



**Figura 6.** $\rho_{ij}$ = -1

Si $\rho_{ij}$ = -1, los rendimientos varían de forma inversamente proporcional, es decir, si uno aumenta, el otro disminuye ó viceversa. Se puede representar, gráficamente, esta situación como se muestra en la Figura 6.

Si $\rho_{ij}$ = 0, los rendimientos varían de manera independiente y, por tanto, existe una ausencia de correlación entre ellos. Es decir, no importa como varía el rendimiento del instrumento *i*, ya que este no afectará el rendimiento del instrumento *j*. Esta situación se puede representar gráficamente tal y como se aprecia en la Figura 7.

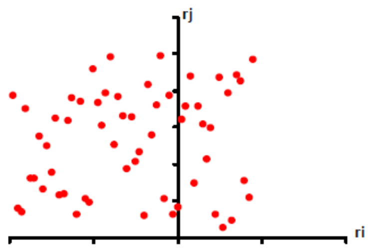



**Figura 7.** $\rho_{ij}$ = 0

Lo deseable, por tanto, es elegir bonos de inversión cuyo coeficiente de correlación sea $\rho_{ij} < 0$ ya que con ello se estarían compensando las disminuciones en los rendimientos del instrumento *i* con los aumentos en el rendimiento del instrumento *j*.

Si se eligieran bonos financieros con $\rho_{ij} > 0$ (es decir, cuyos rendimientos varíen en la misma proporción) las pérdidas podrían ser muy elevadas ya que cuando disminuye el rendimiento del instrumento *i*, también disminuye el rendimiento del instrumento *j*. Aunque, por supuesto, que si sucede lo contrario las ganancias se incrementarían considerablemente. Sin embargo, como los mercados son vulnerables, no es recomendable elegir bonos de inversión con este coeficiente de correlación.

El análisis de portafolio proporciona herramientas para realizar una selección idónea (óptima) de los bonos de inversión. Entre los métodos empleados se encuentra “la teoría de portafolios Media-Varianza” conocida como el modelo de Markowitz.

## 4.2 Teoría Media-Varianza. Modelo de Markowitz.

Esta teoría es la empleada en el Modelo de Markowitz. En ella, se considera que un portafolio está integrado por diferentes bonos de inversión, en los cálculos necesarios para medir el rendimiento total del portafolio y el riesgo final del portafolio se deben considerar los riesgos y rendimientos respectivos de todos los bonos de inversión que conforman el portafolio, determinándose mediante el cálculo de la media y la desviación estándar. Sin embargo, el nivel de rendimiento también se verá influenciado por los distintos niveles de correlación existente entre los diferentes bonos.

Los cálculos necesarios para aplicar el modelo de Markowitz se describen a continuación en los apartados de medición del rendimiento y riesgo de un portafolio de inversión.

### 4.2.1 Medición del rendimiento del portafolio de inversión.

El rendimiento de un bono de inversión es medido mediante el cálculo del valor promedio, también conocido como media aritmética. Su notación vendría determinada por los siguientes signos:

- $\mu$ → cuando se trabaja con todos los elementos de la población o
- $\bar{x}$ → cuando se trabaja sólo con una muestra de la misma.

Cuando se trabaja con datos aleatorios (los cuales ocurren con cierta probabilidad) se emplea el término de valor esperado con la notación E(x), también conocido como esperanza matemática.

En este proyecto, se están sumando rendimientos obtenidos durante cierto número de periodos T, así que $\bar{x} = \overline{\mathrm{R}_i}$.

La fórmula empleada para calcular el valor promedio del rendimiento sería:

$$\overline{\mathrm{R}_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mathrm{R}_{it}}{\mathrm{T}} \qquad (4.2.1.1.)$$

donde:

$\mathrm{R}_i$ = rendimiento del instrumento *i*.
$\mathrm{R}_{it}$ = rendimiento obtenido del instrumento *i* en el periodo *t*.
T = número de periodos que se analizan.

A partir de aquí, y teniendo en cuenta que el portafolio de inversión estará compuesto por *n* valores o bonos, el rendimiento del portafolio serían los rendimientos históricos de los mismos y la proporción del monto de la inversión que se destinará a cada uno. A este monto se le denomina peso y se designa por $w_i$, siendo el subíndice *i* el bono correspondiente.

De este modo, el cálculo del rendimiento del portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos esperados de cada uno de los bonos que lo componen, dado por la fórmula:

$$\mathrm{R}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \text{ x } \overline{\mathrm{R}}_i \qquad (4.2.1.2.)$$

debiéndose cumplir que se invierte en la cartera el total del capital dispuesto:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad (100\ \%), \qquad (4.2.1.3.)$$

y donde:

$\mathrm{R}_p$ = rendimiento esperado del portafolio.
$w_i$ = proporción del monto de la inversión destinada al bono *i*.
$\overline{\mathrm{R}}_\mathrm{i}$ = rendimento promedio del bono *i*.
$n$ = número de bonos que se analizan.

### 4.2.2 Medición del riesgo del portafolio de inversión.

La medición del riesgo se realiza mediante el cálculo de la desviación estándar, que es una medida de dispersión de los datos que va a indicar que tan dispersos se encuentran los valores obtenidos con respecto al valor promedio. Por tanto, un mayor valor de la desviación estándar representará un mayor riesgo.

Una medida de dispersión indica qué tan cercanos o separados están los datos con respecto a su valor central, es decir, se necesita un valor que indique una medida para comparar las dispersiones de los datos entre diferentes conjuntos.

La variación que existe entre cada uno de los rendimientos obtenidos $\mathrm{R}_{it}$ y el valor del rendimiento promedio $\overline{\mathrm{R}_{i}}$, se puede obtener fácilmente mediante la diferencia:

$$\mathrm{R}_{it} - \overline{\mathrm{R}_{i}}$$

En la Figura 8 se puede observarse como los valores de rendimiento obtenidos difieren con respecto al valor promedio.

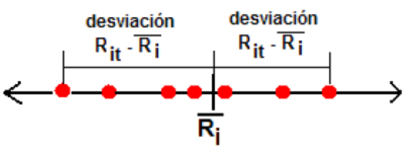



**Figura 8**. $\mathrm{R}_{it} - \overline{\mathrm{R}_{i}}$

Sin embargo al obtener las diferencias $\mathrm{R}_{it} - \overline{\mathrm{R}_{i}}$ se obtendrán valores tanto positivos como negativos, de tal manera que, al sumar estos resultados se anularán unos valores con otros y el resultado será cero. Por lo tanto la suma de los valores de las diferencias obtenidas no es de utilidad.

Una forma de resolver este problema es elevar al cuadrado cada uno de los resultados de las diferencias, ya que el cuadrado de un número es siempre positivo y al sumar valores positivos nunca se anulará el resultado. El promedio de las desviaciones absolutas se conoce como desviación media, denotada por DM.

La medida de dispersión que se calcula mediante el promedio de las sumas obtenidas, se le conoce con el nombre de varianza. Si se divide este sumatorio entre *n* se le llama varianza sesgada o poblacional denotada por $\sigma^2$, la varianza poblacional se puede escribir por lo tanto mediante la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \overline{R_i})^2}{T} \qquad (4.2.2.1.)$$

siendo T el número de períodos considerado.

En los siguientes apartados, se utilizarán constantemente las expresiones anteriores, por lo que es conveniente, en algunos casos, emplear la siguiente notación:

$$\overline{R_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{T} = E\,(R_i) \qquad (4.2.2.2.)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \overline{R_i})^2}{T} = E\,(R_{it} - \overline{R_i})^2 \qquad (4.2.2.3.)$$

Se llama desviación estándar de un conjunto de datos a la raíz cuadrada positiva de la varianza. El riesgo respectivo del instrumento *i* se mide mediante la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \overline{R_i})^2}{T}} \qquad (4.2.2.4.)$$

Si se comparan los resultados entre los rendimientos promedios esperados y los valores de riesgo entre dos bonos de inversión *i* y *j*, será preferible el instrumento *i* cuando:

$\overline{R_i} = \overline{R_j}$ con $\sigma_i < \sigma_j \rightarrow$ cuando los rendimientos promedios esperados sean iguales, se preferirá aquel que presente un menor riesgo.

$\overline{R_i} > \overline{R_j}$ con $\sigma_i = \sigma_j \rightarrow$ cuando los riesgos sean iguales, se preferirá aquel que presente un mayor rendimiento.

$\overline{R_i} > \overline{R_j}$ con $\sigma_i < \sigma_j \rightarrow$ lo deseable es seleccionar el instrumento que presente un mayor rendimiento y un menor riesgo.

Sin embargo, no es recomendable realizar una inversión sobre un único bono. Se pretende minimizar los riesgos, por lo que es conveniente la diversificación en la compra de bonos para que se puedan compensar las posibles pérdidas de unos con las deseables ganancias de otros.

En este sentido, la selección de los bonos se realiza mediante la combinación de varios de ellos, que directamente van a afectar al desempeño del portafolio. En éste caso el cálculo de los rendimientos y riesgos individuales de los bonos ya no resulta de mucha utilidad.

En la determinación del riesgo del portafolio también se considera la variación que existe entre cada uno de los rendimientos reales obtenidos para el portafolio $\mathrm{R}_p$ y el valor del rendimiento promedio del portafolio $\overline{\mathrm{R}_p}$ . De esta forma, contra mas alejados se encuentren los rendimientos obtenidos del valor del rendimiento promedio mayor será la desviación o variabilidad de los rendimientos y, por tanto, mayor será el riesgo.

Sin embargo, como ya se ha mencionado anteriormente, sumar estas diferencias no serviría de nada puesto que se anularían los resultados. Por ello, se calcularía el promedio de las diferencias elevadas al cuadrado. De tal forma que, la varianza del portafolio vendría dada por:

$$\sigma_p{}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\mathrm{R}_{it} - \overline{\mathrm{R}_i}\,)^2}{\mathrm{T}} \qquad (4.2.2.5.)$$

Considerando que se analizan sólo dos bonos de inversión:

$$\mathrm{R}_p = w_1\mathrm{R}_1 + \ w_2\mathrm{R}_2 \qquad (4.2.2.6.)$$

Se puede sustituir y desarrollar la expresión (4.2.2.5.):

$$\sigma_p{}^2 = \mathrm{E}\ (w_1\mathrm{R}_1 + w_2\mathrm{R}_2 - (w_1\overline{\mathrm{R}_1} + w_2\overline{\mathrm{R}_2}))^2 \qquad (4.2.2.7.)$$

$$\sigma_p{}^2 = \mathrm{E}\ (w_1\mathrm{R}_1 + w_2\mathrm{R}_2 - w_1\overline{\mathrm{R}_1} - w_2\overline{\mathrm{R}_2})^2 \qquad (4.2.2.8.)$$

Factorizando

$w_1$ y $w_2$: $$\sigma_p{}^2 = \mathrm{E}\ [w_1(\mathrm{R}_1 - \overline{\mathrm{R}_1}\,) + w_2\ (\mathrm{R}_2 - \overline{\mathrm{R}_2})]^2 \qquad (4.2.2.9.)$$

desarrollando:

$$\sigma_p{}^2 = \mathrm{E}\ [w_1{}^2(\mathrm{R}_1 - \overline{\mathrm{R}_1}\,)^2 + 2\ w_1w_2\ (\mathrm{R}_1 - \overline{\mathrm{R}_1}\,)(\mathrm{R}_2 - \overline{\mathrm{R}_2}) + w_2{}^2(\mathrm{R}_2 - \overline{\mathrm{R}_2}\,)^2] \qquad (4.2.2.10.)$$

$$\sigma_p{}^2 = w_1{}^2\ \mathrm{E}\ (\mathrm{R}_1 - \overline{\mathrm{R}_1}\,)^2 + 2\ w_1w_2\ \mathrm{E}\ (\mathrm{R}_1 - \overline{\mathrm{R}_1}\,)(\mathrm{R}_2 - \overline{\mathrm{R}_2}) + w_2{}^2\mathrm{E}(\mathrm{R}_2 - \overline{\mathrm{R}_2}\,)^2 \qquad (4.2.2.11.)$$

donde E $(R_i - \overline{R_i})^2$ se definió como la varianza, denotada por $\sigma^2$, por lo tanto:

$$\sigma_p{}^2 = w_1{}^2\sigma_1{}^2 + 2\, w_1 w_2\, \mathrm{E}\ (R_1 - \overline{R_1})(R_2 - \overline{R_2}) + w_2{}^2\sigma_2{}^2 \qquad (4.2.2.12.)$$

Anteriormente se mencionó que el valor de la covarianza es un punto importante en la selección de bonos de inversión, sin embargo no se definió como calcularla. La covarianza se denota mediante $\sigma_{ij}$, donde $i$ y $j$ son los bonos que se están analizando. La covarianza se determina como:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \overline{R_i})(R_{jt} - \overline{R_j}) = \mathrm{E}\ (R_i - \overline{R_i})(R_j - \overline{R_j}) \qquad (4.2.2.13.)$$

La covarianza es el producto de dos desviaciones, por lo tanto es importante hacer notar que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ puesto que si se invierten los factores del producto no se altera el resultado. Por lo que la varianza del portafolio se puede escribir como:

$$\sigma_p{}^2 = w_1{}^2\sigma_1{}^2 + w_2{}^2\sigma_2{}^2 + 2\, w_1 w_2\, \sigma_{12} \qquad (4.2.2.14.)$$

(Varianza de un portafolio de dos bonos)

La covarianza es una manera de conocer cómo se comportan los rendimientos de dos bonos de inversión. De esta forma:

- Si $\sigma_{ij} > 0$ → los rendimientos se mueven en la misma dirección, es decir, o ambos rendimientos obtenidos son mayores a los rendimientos esperados o ambos son menores.

- Si $\sigma_{ij} < 0$ → las pérdidas de uno se compensan con las ganancias de otros, por lo que conformarían los bonos deseables a tener en el portafolio.

- Si $\sigma_{ij}$ tiende a 0 → los rendimientos de los bonos no guardan ninguna relación entre ellos.

La fórmula para el cálculo de la varianza del portafolio puede generalizarse para un número *n* de bonos considerando todas las combinaciones posibles entre estos, como se muestra a continuación: (4.2.2.15)

$$\begin{array}{llll}
\sigma_p{}^2 = w_1\, w_1\, \sigma_{11} & + w_1\, w_2\, \sigma_{12} & + \ldots + w_1\, w_n\, \sigma_{1n} + \\
w_2\, w_1\, \sigma_{21} & + w_2\, w_2\, \sigma_{22} & + \ldots + w_2\, w_{\mathrm{n}}\, \sigma_{2n} + \\
\vdots & \vdots & + \ldots + \quad \vdots \\
w_n\, w_1\, \sigma_{n1} & + w_n\, w_2\, \sigma_{\mathrm{n}2} & + \ldots + w_n\, w_n\, \sigma_{nn}
\end{array}$$

Una consideración importante es que en la fórmula se puede apreciar que la varianza de cada instrumento es multiplicada por el cuadrado de la proporción invertida en este, por lo tanto donde se presenta $\sigma_{\mathrm{i}j}$ con *i*=*j*, este es igual a $\sigma_i{}^2$, es decir la varianza del instrumento, tal y como se demuestra a continuación:

$$\sigma_{ii} = \mathrm{E}\ (\mathrm{R}_i - \bar{\mathrm{R}}_1)(\mathrm{R}_i - \bar{\mathrm{R}}_1) = (\mathrm{R}_i - \bar{\mathrm{R}}_1)^2 = \sigma_i{}^2 \qquad (4.2.2.16.)$$

Lo cual puede escribirse mediante un doble sumatorio, generalizando la varianza del portafolio: (4.2.2.3)

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j\, \sigma_{ij} \qquad (4.2.2.17.)$$

(Varianza de un portafolio de *n* bonos)

La varianza del portafolio también puede obtenerse mediante su forma matricial, como se muestra: (4.2.2.18)

$$\sigma_p{}^2 = [w_1 \quad w_2 \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_n \end{bmatrix} = [w_1 \quad w_2 \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2{}^2 & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_n{}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_n \end{bmatrix}$$

Hay que tener presente que la matriz cuadrada es la matriz de covarianza de los bonos y que en su diagonal se contiene la varianza de los bonos en consideración.

Sin embargo, la varianza del portafolio también puede escribirse: (4.2.2.19.)

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j\, \sigma_{ij} \;\; = \sum_{i=1}^{n} w_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j\, \sigma_{ij} \text{ , con } i \neq j$$

Si se considera la misma proporción de la inversión en cada uno de *n* bonos:

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) \quad \sigma_{ij} \text{ , con } i \neq j \qquad (4.2.2.20.)$$

Factorizando $\left(\frac{1}{n}\right)$ del primer sumatorio y $\left(\frac{(n-1)}{n}\right)$ del segundo, puesto que aquí se tiene $n - 1$ bonos de inversión considerando que $i \neq j$, se obtiene:

$$\sigma_p{}^2 = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i{}^2}{n}\right) + \frac{(n-1)}{n} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\sigma_{ij}}{n(n-1)}\right) \text{ , con } \; i \neq j \qquad (4.2.2.21.)$$

El primer sumatorio es realmente el promedio de las varianzas y el segundo es el promedio de las covarianzas, puesto que se tienen $n(n - 1)$ covarianzas calculadas. Sustituyendo las sumatorias por sus respectivos promedios se obtiene que:

$$\sigma_p{}^2 = \left(\frac{1}{n}\right) \overline{\sigma_1{}^2} + \frac{(n-1)}{n} \overline{\sigma_{1j}} \text{ , con } \; i \neq j \qquad (4.2.2.22.)$$

Esta expresión permite apreciar que es lo que sucede cuando se incrementa el número de bonos de inversión que conforman al portafolio. La varianza de los bonos individuales tiende a ser cero cuando la cantidad de bonos de inversión se incrementa, sin embargo, el límite de $\frac{(n-1)}{n}$ tiende a uno cuando *n* crece. Por lo que la varianza del portafolio tiende a estar dada por el promedio de la covarianza de los bonos que lo conforman.

El riesgo del portafolio es precisamente la raíz cuadrada de la desviación estándar, por lo tanto la fórmula empleada para calcularlo viene dado por:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j\, \sigma_{ij}} \qquad (4.2.2.23.)$$

## 4.3 Aplicación del modelo.

A partir de aquí se desarrolla la aplicación de todo el fundamento matemático anterior al estudio del portafolio de inversión.

En el apartado 3 se establecía la cartera de países objeto de estudio y que conformarán el portafolio. De esta forma, siguiendo la terminología empleada en el apartado anterior, para este proyecto:

- $n$ = 11
- T = 5 x 12 = 60 (Desde Enero de 2007 a Diciembre de 2011)

Y, por tanto, el rendimiento promedio de cada uno de los $n$-países objeto de estudio será (de acuerdo a (4.2.1.1)):

$$\overline{R_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{it}}{60} \text{ para } i = 1,2,\ldots 11 \qquad (4.3.1.)$$

La función de Excel asociada a dicha fórmula es la función promedio, que se calcula en la correspondiente matriz para cada uno de los países, de acuerdo a esto se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 4.3.1.** Promedios

| Bono a 10 años | | Bono a 3 años | | Bono a 6 meses | |
|---|---|---|---|---|---|
| | PROMEDIO | | PROMEDIO | | PROMEDIO |
| ALEMANIA | 0,034 | ALEMANIA | 0,024 | ALEMANIA | 0,024 |
| ESPAÑA | 0,045 | ESPAÑA | 0,035 | ESPAÑA | 0,027 |
| EEUU | 0,035 | EEUU | 0,020 | EEUU | 0,020 |
| FRANCIA | 0,037 | FRANCIA | 0,025 | FRANCIA | 0,019 |
| ITALIA | 0,046 | ITALIA | 0,034 | ITALIA | 0,024 |
| JAPÓN | 0,014 | JAPÓN | 0,006 | JAPÓN | 0,004 |
| R: UNIDO | 0,040 | R: UNIDO | 0,028 | R: UNIDO | 0,027 |
| PORTUGAL | 0,058 | PORTUGAL | 0,053 | PORTUGAL | 0,025 |
| GRECIA | 0,079 | GRECIA | 0,095 | GRECIA | 0,038 |
| CANADÁ | 0,034 | CANADÁ | 0,024 | CANADÁ | 0,022 |
| AUSTRALIA | 0,057 | AUSTRALIA | 0,053 | AUSTRALIA | 0,050 |

A partir de aquí, el rendimiento del portafolio serían los rendimientos promedio calculados y los pesos de cada uno ($w_i$). Estos pesos son la incógnita principal del modelo, que, como se desarrollará posteriormente, serán los correspondientes a la optimización de la función objetivo, así de acuerdo a (4.2.1.2), la rentabilidad del portafolio será:

**Tabla 4.3.2.** Rendimientos.

| **Bono a 10 años** | **Bono a 3 años** | **Bono a 6 meses** |
|---|---|---|
| $R_p = [w_i] \begin{bmatrix} 0.034 \\ 0.045 \\ 0.035 \\ 0.037 \\ 0.046 \\ 0.014 \\ 0.040 \\ 0.058 \\ 0.079 \\ 0.034 \\ 0.057 \end{bmatrix}$ | $R_p = [w_i] \begin{bmatrix} 0.024 \\ 0.035 \\ 0.020 \\ 0.025 \\ 0.034 \\ 0.006 \\ 0.028 \\ 0.053 \\ 0.095 \\ 0.024 \\ 0.053 \end{bmatrix}$ | $R_p = [w_i] \begin{bmatrix} 0.024 \\ 0.027 \\ 0.020 \\ 0.019 \\ 0.024 \\ 0.004 \\ 0.027 \\ 0.025 \\ 0.038 \\ 0.022 \\ 0.050 \end{bmatrix}$ |

debiéndose cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{11} w_i = 100, \tag{4.3.2.}$$

En el desarrollo anterior se establece que el riesgo del portafolio vendrá dado por la varianza de los datos históricos de los rendimientos de los bonos que componen la cartera. Aplicando la expresión 4.2.2.2 al modelo, se obtiene: (4.3.3.)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} w_i\, w_j\, \sigma_{ij} = \; & w_1\, w_1\, \sigma_{1\,1} + w_1\, w_2\, \sigma_{1\,2} + \dots + w_1\, w_{11}\, \sigma_{1\,11} + \\ & w_2\, w_1\, \sigma_{2\,1} + w_2\, w_2\, \sigma_{2\,2} + \dots + w_2\, w_{11}\, \sigma_{2\,11} + \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad + \dots + \quad \vdots \\ & w_{11}\, w_1\, \sigma_{11\,1} + w_{11}\, w_2\, \sigma_{11\,2} + \dots + w_{11}\, w_{11}\, \sigma_{11\,11} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo ya demostrado en el apartado anterior de que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, y además que $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, y sacando factor común $w_i$ en cada una de las filas, se obtiene: (4.3.4.)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{12} w_i\, w_j\, \sigma_{ij} = \; & w_1\,(w_1\,\sigma_1^{\,2} + w_2\,\sigma_{12} + \dots + w_{11}\,\sigma_{1\,11}) \; + \\ & w_2\,(w_1\,\sigma_{12} + w_2\,\sigma_2^{\,2} + \dots + w_{11}\,\sigma_{2\,11}) \; + \\ & \vdots \quad \vdots \quad + \dots + \quad \vdots \\ & w_{11}\,(w_1\,\sigma_{1\,11} + w_2\,\sigma_{2\,11} + \dots + w_{11}\,\sigma_{11}^{\,2})\end{aligned}$$

De acuerdo a esto se comienza calculando las matrices de covarianzas. Según lo desarrollado, la matriz de covarianza de los bonos será una matriz simétrica, en la que: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, y que en su diagonal contiene a la varianza de los bonos en consideración al ser $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$. A modo de ejemplo, el elemento $a_{12}$ de la M.C. 1. Matriz de covarianzas 10 años. Datos hasta 2011. Corresponde a la relación de las rentabilidades del país 1 (Alemania) con respecto al país 2 (España) y en esta matriz en concreto toma en valor -0.131. La correlación de los países a lo largo de todo este Proyecto sigue la numeración establecida en la Tabla 3.3.

Las matrices de covarianzas para el largo, medio y corto plazo serán por tanto:

**Bono a 10 años**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,533*** | -0,131 | 0,504 | 0,374 | -0,091 | 0,158 | 0,586 | -1,132 | -2,532 | 0,387 | 0,128 |
| -0,131 | ***0,339*** | -0,146 | -0,045 | 0,273 | -0,046 | -0,173 | 1,236 | 2,107 | -0,133 | -0,049 |
| 0,504 | -0,146 | ***0,622*** | 0,334 | -0,150 | 0,166 | 0,623 | -1,148 | -2,432 | 0,446 | 0,155 |
| 0,374 | -0,045 | 0,334 | ***0,296*** | 0,015 | 0,114 | 0,400 | -0,644 | -1,621 | 0,253 | 0,078 |
| -0,091 | 0,273 | -0,150 | 0,015 | ***0,356*** | -0,024 | -0,150 | 1,101 | 1,652 | -0,139 | -0,076 |
| 0,158 | -0,046 | 0,166 | 0,114 | -0,024 | ***0,056*** | 0,182 | -0,358 | -0,798 | 0,122 | 0,037 |
| 0,586 | -0,173 | 0,623 | 0,400 | -0,150 | 0,182 | ***0,715*** | -1,367 | -2,919 | 0,472 | 0,156 |
| -1,132 | 1,236 | -1,148 | -0,644 | 1,101 | -0,358 | -1,367 | ***6,226*** | 10,850 | -0,963 | -0,384 |
| -2,532 | 2,107 | -2,432 | -1,621 | 1,652 | -0,798 | -2,919 | 10,850 | ***21,157*** | -1,997 | -0,699 |
| 0,387 | -0,133 | 0,446 | 0,253 | -0,139 | 0,122 | 0,472 | -0,963 | -1,997 | ***0,355*** | 0,111 |
| 0,128 | -0,049 | 0,155 | 0,078 | -0,076 | 0,037 | 0,156 | -0,384 | -0,699 | 0,111 | ***0,125*** |

M.C. 1. Matriz de covarianzas 10 años. Datos hasta 2011.

## Bono a 3 años

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***1,711*** | 0,699 | 1,613 | 1,553 | 0,638 | 0,389 | 2,170 | -1,727 | -6,704 | 1,241 | 0,641 |
| 0,699 | ***1,501*** | 0,668 | 0,729 | 0,903 | 0,155 | 0,920 | 1,879 | 2,762 | 0,540 | 0,010 |
| 1,613 | 0,668 | ***1,919*** | 1,474 | 0,531 | 0,390 | 2,249 | -2,093 | -7,128 | 1,385 | 0,691 |
| 1,553 | 0,729 | 1,474 | ***1,491*** | 0,742 | 0,365 | 2,004 | -1,117 | -5,216 | 1,130 | 0,529 |
| 0,638 | 0,903 | 0,531 | 0,742 | ***1,189*** | 0,157 | 0,800 | 2,738 | 4,437 | 0,441 | -0,112 |
| 0,389 | 0,155 | 0,390 | 0,365 | 0,157 | ***0,106*** | 0,518 | -0,473 | -1,720 | 0,279 | 0,115 |
| 2,170 | 0,920 | 2,249 | 2,004 | 0,800 | 0,518 | ***2,975*** | -2,636 | -9,294 | 1,693 | 0,859 |
| -1,727 | 1,879 | -2,093 | -1,117 | 2,738 | -0,473 | -2,636 | ***18,188*** | 38,732 | -1,321 | -1,824 |
| -6,704 | 2,762 | -7,128 | -5,216 | 4,437 | -1,720 | -9,294 | 38,732 | ***95,108*** | -4,833 | -4,824 |
| 1,241 | 0,540 | 1,385 | 1,130 | 0,441 | 0,279 | 1,693 | -1,321 | -4,833 | ***1,116*** | 0,575 |
| 0,641 | 0,010 | 0,691 | 0,529 | -0,112 | 0,115 | 0,859 | -1,824 | -4,824 | 0,575 | ***0,585*** |

M.C. 2. Matriz de covarianzas 3 años. Datos hasta 2011.

## Bono a 6 meses

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***2,966*** | 1,763 | 2,930 | 2,637 | 2,141 | 0,493 | 4,107 | 1,763 | 1,028 | 1,650 | 1,833 |
| 1,763 | ***1,743*** | 1,754 | 1,658 | 1,893 | 0,253 | 2,465 | 1,714 | 0,877 | 1,140 | 1,449 |
| 2,930 | 1,754 | ***3,850*** | 2,830 | 2,138 | 0,506 | 4,483 | 1,754 | 0,681 | 2,164 | 2,007 |
| 2,637 | 1,658 | 2,830 | ***2,588*** | 1,980 | 0,442 | 3,831 | 1,658 | 0,775 | 1,721 | 1,988 |
| 2,141 | 1,893 | 2,138 | 1,980 | ***2,368*** | 0,324 | 3,012 | 1,893 | 0,952 | 1,294 | 1,535 |
| 0,493 | 0,253 | 0,506 | 0,442 | 0,324 | ***0,091*** | 0,702 | 0,253 | 0,156 | 0,272 | 0,276 |
| 4,107 | 2,465 | 4,483 | 3,831 | 3,012 | 0,702 | ***6,089*** | 2,465 | 1,232 | 2,582 | 2,815 |
| 1,763 | 1,714 | 1,754 | 1,658 | 1,893 | 0,253 | 2,465 | ***1,743*** | 0,877 | 1,140 | 1,449 |
| 1,028 | 0,877 | 0,681 | 0,775 | 0,952 | 0,156 | 1,232 | 0,877 | ***0,836*** | 0,343 | 0,426 |
| 1,650 | 1,140 | 2,164 | 1,721 | 1,294 | 0,272 | 2,582 | 1,140 | 0,343 | ***1,444*** | 1,536 |
| 1,833 | 1,449 | 2,007 | 1,988 | 1,535 | 0,276 | 2,815 | 1,449 | 0,426 | 1,536 | ***2,444*** |

M.C. 3. Matriz de covarianzas 6 meses. Datos hasta 2011.

Una vez calculadas las matrices de covarianzas, se definen una serie de matrices auxiliares que permitirán, basándose en el desarrollo realizado en 4.3.4. continuar con la ejecución del modelo.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | ESTUDIO DE RIESGO / RENTABILIDAD DE LA INVERSIÓN A LARGO PLAZO | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | PROMEDIO | | DESVIACIÓN | | VARIANZA | | PESO | PROMEDIO | SUMA | CÁLCULO |
| 5 | | | | | | | | | | VALORES | RENTABIL. | PRODUCTO | RIESGO |
| 6 | | ALEMANIA | | 0,034 | | 0,730 | | 0,533 | ALEMANIA | 0,000 | 0,034 | 5,483 | 0,000 |
| 7 | | ESPAÑA | | 0,045 | | 0,582 | | 0,339 | ESPAÑA | 0,000 | 0,045 | 3,248 | 0,000 |
| 8 | | USA | | 0,035 | | 0,789 | | 0,622 | USA | 0,000 | 0,035 | 6,878 | 0,000 |
| 9 | | FRANCIA | | 0,037 | | 0,544 | | 0,296 | FRANCIA | 0,000 | 0,037 | 4,535 | 0,000 |
| 10 | | ITALIA | | 0,046 | | 0,597 | | 0,356 | ITALIA | 0,000 | 0,046 | 3,086 | 0,000 |
| 11 | | JAPÓN | | 0,014 | | 0,236 | | 0,056 | JAPÓN | 83,061 | 0,014 | 2,181 | 181,169 |
| 12 | | U.K. | | 0,040 | | 0,845 | | 0,715 | U.K. | 0,000 | 0,040 | 6,473 | 0,000 |
| 13 | | PORTUGAL | | 0,058 | | 2,495 | | 6,226 | PORTUGAL | 0,000 | 0,058 | 5,075 | 0,000 |
| 14 | | GRECIA | | 0,079 | | 4,600 | | 21,157 | GRECIA | 3,675 | 0,079 | 2,181 | 8,017 |
| 15 | | CANADÁ | | 0,034 | | 0,596 | | 0,355 | CANADÁ | 0,000 | 0,034 | 4,273 | 0,000 |
| 16 | | AUSTRALIA | | 0,057 | | 0,354 | | 0,125 | AUSTRALIA | 13,264 | 0,057 | 2,181 | 28,930 |
| 17 | | | | | | | | | | 100,000 | | | 218,115 |
| 18 | | FUNCION OBJETIVO | | | Min (α RIESGO + β 1 / Rp) | | 14,769 | | | RENTABILIDAD DE LA INVERSIÓN | | | |
| 19 | | RESTRICCIONES | | | SUMA PESOS = | | 100 | | | Rp | 2,185 | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | | |

**Figura 9.** Matrices auxiliares

Tal y como puede observarse en la captura de pantalla adjunta (Figura 9. Matrices auxiliares), se define la matriz “suma-producto” [L6:L16] que proporciona el valor de cada término de la ecuación (4.3.4.) que está entre paréntesis, así por ejemplo la celda L6, representa el valor de $w_i$ x $\sigma_{1j}$.

Se define una segunda matriz auxiliar “cálculo-riesgo” [M6:M16], resultado del producto de los $w_i$ por los términos de la matriz anterior “suma-producto”. La suma de los términos de esta matriz facilita, en la celda M17, el valor de $\sigma_p{}^2$. El riesgo del portafolio será la raíz cuadrada de este valor.

Cómo se ha mencionado con anterioridad, los pesos $w_i$ son las incógnitas, resultados que se obtienen una vez aplicado el algoritmo de optimización, y cuyo resultado son los que se representan en la Figura10. Matrices auxiliares, en la matriz “peso-valores” [J6:J16].

Llegados a este punto, se está ya en condiciones de aplicar un algoritmo de optimización que permita resolver el modelo. Se comentaba en el primer capítulo que se tomarán en este punto dos opciones:

- Modelo con función objetivo multicriterio: rentabilidad y riesgo: en la cual se desarrolla el modelo de optimización tomando como función objetivo una función multicriterio, de forma que en la misma se puede optimizar la resolución minimizando el riesgo de la inversión al mismo tiempo que se maximiza la rentabilidad.

- Modelo de optimización de la rentabilidad con acotación del riesgo: consistente en el desarrollo del modelo a partir de un solo criterio a través de la optimización de la rentabilidad manteniendo el riesgo acotado.

### 4.3.1 Modelo con función objetivo multicriterio: rentabilidad y riesgo.

Se procede a partir de este punto al desarrollo de la primera de las dos opciones definidas, donde la función objetivo será una función multicriterio compuesta por dos parámetros, el riesgo y la rentabilidad.

#### 4.3.1.1 Desarrollo del modelo.

El modelo a resolver será el siguiente

$$\text{Min} \quad \alpha \, \text{RIESGO} + \beta \, \frac{1}{\text{RENTABILIDAD}}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{11} w_i = 100 \qquad (4.3.1.1.1.)$$

o lo que es lo mismo:

$$\text{Min} \quad \alpha \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} w_i \, w_j \, \sigma_{ij} + \beta \frac{1}{\sum_{i=1}^{11} w_i \times \bar{\text{R}}_{\text{i}}}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{11} w_i = 100 \qquad (4.3.1.1.2.)$$

Como puede observarse, se han introducido en la función objetivo los parámetros α y β, los cuales, al tratarse de un planteamiento multicriterio, en este caso con dos términos, por una lado el riesgo, por otro la rentabilidad, nos van a permitir poder dar mayor o menor peso a uno u otro previo a la ejecución del modelo. Evidentemente la suma de ambos tiene que ser 1. Así, por ejemplo, se puede dar la opción de obtener la máxima rentabilidad con β = 1 ( ⇒ α = 0), sin tener en cuenta el riesgo.

Para la resolución del modelo se utilizará el complemento "*Solver*" de Excel, cuyos parámetros quedan definidos según la Figura 10. Parámetros de *Solver*:

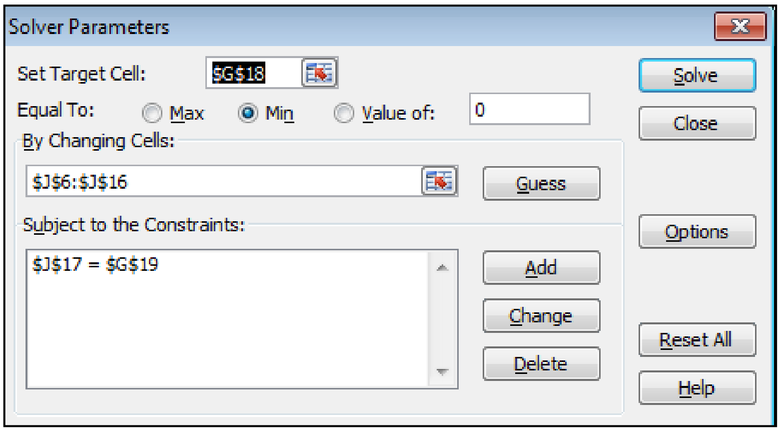



**Figura 10.** Parámetros de *Solver*.

Con las siguientes opciones:

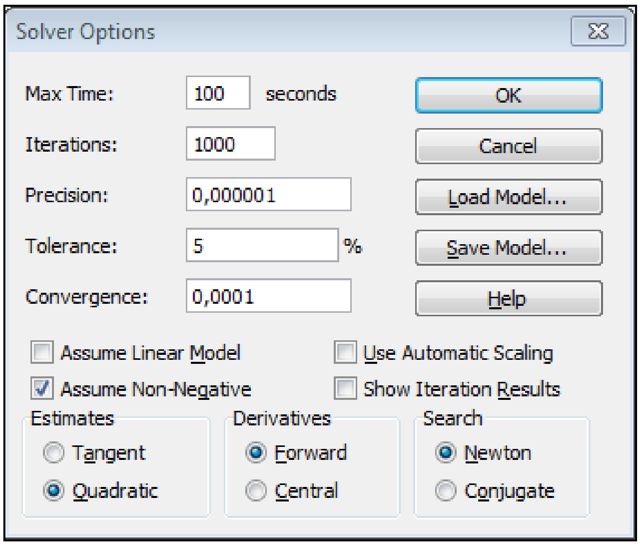



**Figura 11.** Opciones de *Solver*.

Aunque resulta bastante intuitivo, se desarrolla una breve descripción:

"*Solver*" realizará iteraciones limitadas bien en número, bien en tiempo de acuerdo a las opciones especificadas según la Figura 11, de manera que se minimice el valor de la función objetivo, definido en el ejemplo (ver la Figura 9. Matrices auxiliares), con el valor de la celda G18 "Set Target Cell" (Figura10. Parámetros de *Solver*). Los resultados de dicha iteración están definidos por los valores variables de la matriz dada por las celdas [J6, J16], "By Changing Cells". Es decir, "*Solver*" variará los valores de [J6:J16] de manera que las iteraciones le lleven a minimizar el valor de la celda G18. Las restricciones están definidas por los valores introducidos en "Subject to the Contraints" (Figura 10. Parámetros de *Solver*), que en este caso, es única y definida por J17=G19, que observando la Figura 9. Matrices auxiliares, lo que hace es asegurar que la suma de los pesos dados a cada uno de los bonos sea igual a 100.

Recalcar aquí algo que en apartados sucesivos de este Proyecto va a resultar fundamental:

La restricción 4.3.2. $\sum_{i=1}^{11} w_i = 100$, obliga a que en la cartera se invierta el total del capital disponible.

El modelo multicriterio permite, en una misma función objetivo, establecer más de una variable de decisión. Para el caso; riesgo y rentabilidad. Además la introducción de los parámetros α y β permite simular distintas posibles realidades que ayuden a la toma de una decisión óptima.

Se aplicará el complemento "*Solver*" variando los valores de α y β, lo cual permite simular la subjetividad de un posible inversor, el cual sea más o menos adverso al riesgo, priorizando éste sobre la rentabilidad obtenida o a la inversa.

*Resultados*: Una vez ejecutado "*Solver*" con distintos valores de α y β, los resultados obtenidos son los que se muestran a continuación:

**Tabla 4.3.1.1.1.** Resultados modelo. Opción 1.

| | α =1 β = 0 | | | α =0,75 β = 0,25 | | | α =0,5 β = 0,5 | | | α =0,25 β = 0,75 | | | α =0 β = 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
| **ALE** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ESP** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **EEUU** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **FRA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **JAP** | 83,06 | 84,28 | 100 | 82,64 | 83,67 | 100 | 81,85 | 82,6 | 100 | 79,71 | 79,99 | 94,74 | 0 | 0 | 0 |
| **R.U.** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **POR** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **GRE** | 3,67 | 2,28 | 0 | 3,68 | 2,3 | 0 | 3,68 | 2,34 | 0 | 3,68 | 2,43 | 5,26 | 100 | 100 | 0 |
| **CAN** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **AUS** | 13,27 | 13,44 | 0 | 13,68 | 14,03 | 0 | 14,47 | 15,06 | 0 | 16,61 | 17,58 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| $\sigma_p$ | 14,77 | 25,64 | 30,15 | 14,77 | 25,64 | 30,15 | 14,77 | 25,66 | 30,15 | 14,81 | 25,76 | 31,54 | 460 | 975 | 156 |
| $R_p$ | 2,185 | 1,4 | 0,4 | 2,203 | 1,43 | 0,4 | 2,238 | 1,49 | 0,4 | 2,33 | 1,62 | 0,57 | 7,864 | 9,48 | 4,976 |
| **F.O.** | 14,77 | 25,64 | 30,15 | 11,19 | 19,41 | 23,24 | 7,61 | 13,17 | 16,34 | 4,02 | 6,91 | 9,19 | 0,13 | 0,11 | 0,20 |

Analizando estos resultados, llama la atención la escasa diversificación que ofrece el modelo. Esto es debido a que a medida que evoluciona la crisis financiera y va transcurriendo el tiempo, la diferencia entre las rentabilidades de los bonos de países como Japón respecto a otros situados en el extremo opuesto, caso de Grecia, se dispara.

Así, mientras que la rentabilidad del bono a 10 años de Grecia en Enero de 2007 era de 4,280 y la de Japón de 1,709, una diferencia de 257 puntos básicos, en Diciembre de 2011 la rentabilidad para este mismo bono, pasó a ser de 21,140 para Grecia y de 1,014 para Japón, lo que supone una diferencia de 2012 puntos básicos. Es decir, la diferencia entre uno y otro país se ha multiplicado en 5 años prácticamente por 10, lo que hace que el resto de países situados entre ambos, apenas tengan influencia en las variaciones en cuanto al riesgo y la rentabilidad, de ahí la poca diversificación en el portafolio.

### 4.3.1.2 Análisis de resultados.

Se va a proceder en este punto al análisis de los resultados obtenidos. Según el desarrollo realizado hasta ahora, el modelo ha dado, en función de los valores históricos de que se disponen, un portafolio óptimo de inversión que minimiza la función objetivo.

Para comprobar la fiabilidad del mismo, se va a proceder a realizar el cálculo real de la rentabilidad y el riesgo de la cartera, conformada por los pesos *wi* obtenidos en el apartado anterior con los datos reales de que se disponen del año 2012.

Las rentabilidades reales de los distintos bonos objeto de estudio en este Proyecto han sido para el año 2012 las siguientes:

**Tabla 4.3.1.2.1.** Rentabilidades bonos a 10 años. Año 2012.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 1,870 | 1,890 | 1,880 | 1,720 | 1,470 | 1,430 | 1,320 | 1,420 | 1,540 | 1,520 | 1,390 | 1,360 |
| **ESP** | 5,399 | 5,111 | 5,170 | 5,790 | 6,126 | 6,589 | 6,795 | 6,581 | 5,920 | 5,647 | 5,690 | 5,340 |
| **EEUU** | 1,960 | 1,960 | 2,170 | 2,050 | 1,810 | 1,610 | 1,510 | 1,680 | 1,710 | 1,730 | 1,650 | 1,710 |
| **FRA** | 3,180 | 3,020 | 2,960 | 2,990 | 2,760 | 2,570 | 2,280 | 2,110 | 2,240 | 2,180 | 2,140 | 2,000 |
| **ITA** | 6,560 | 5,560 | 4,960 | 5,510 | 5,750 | 5,920 | 6,010 | 5,820 | 5,230 | 4,960 | 4,860 | 4,540 |
| **JAP** | 0,980 | 0,968 | 1,012 | 0,953 | 0,859 | 0,841 | 0,778 | 0,809 | 0,806 | 0,776 | 0,743 | 0,745 |
| **R.U.** | 2,050 | 2,130 | 2,260 | 2,140 | 1,880 | 1,680 | 1,560 | 1,570 | 1,780 | 1,820 | 1,800 | 1,860 |
| **POR** | 13,850 | 12,810 | 13,010 | 12,010 | 11,590 | 10,560 | 10,490 | 9,890 | 8,620 | 8,170 | 8,320 | 7,235 |
| **GRE** | 25,910 | 29,240 | 19,070 | 21,480 | 26,900 | 27,820 | 25,820 | 24,340 | 20,910 | 17,960 | 17,200 | 13,395 |
| **CAN** | 2,040 | 1,980 | 2,120 | 2,100 | 1,790 | 1,720 | 1,600 | 1,800 | 1,750 | 1,780 | 1,720 | 1,820 |
| **AUS** | 4,853 | 4,970 | 5,091 | 4,831 | 4,329 | 4,060 | 3,919 | 4,173 | 4,182 | 4,107 | 4,105 | 4,293 |

**Tabla 4.3.1.2.2.** Rentabilidades bonos a 3 años. Año 2012.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 0,340 | 0,410 | 0,380 | 0,270 | 0,160 | 0,180 | 0,050 | 0,050 | 0,130 | 0,150 | 0,060 | 0,030 |
| **ESP** | 3,576 | 3,126 | 2,518 | 3,520 | 5,130 | 5,510 | 5,302 | 4,848 | 3,546 | 3,266 | 3,663 | 3,161 |
| **EEUU** | 0,360 | 0,380 | 0,500 | 0,430 | 0,390 | 0,380 | 0,330 | 0,370 | 0,330 | 0,370 | 0,350 | 0,320 |
| **FRA** | 1,150 | 1,060 | 1,060 | 1,040 | 0,830 | 0,720 | 0,360 | 0,260 | 0,370 | 0,400 | 0,310 | 0,300 |
| **ITA** | 4,660 | 3,430 | 2,830 | 3,790 | 4,040 | 4,870 | 4,660 | 3,900 | 3,030 | 2,860 | 2,710 | 2,650 |
| **JAP** | 0,220 | 0,185 | 0,166 | 0,167 | 0,120 | 0,106 | 0,108 | 0,106 | 0,112 | 0,112 | 0,107 | 0,100 |
| **R.U.** | 0,530 | 0,520 | 0,580 | 0,540 | 0,440 | 0,360 | 0,240 | 0,200 | 0,270 | 0,290 | 0,320 | 0,300 |
| **POR** | 18,290 | 16,590 | 15,620 | 13,920 | 12,430 | 8,850 | 8,150 | 6,670 | 5,090 | 5,070 | 6,040 | 6,100 |
| **GRE** | 68,080 | 77,650 | OUT | OUT | OUT | OUT | OUT | OUT | OUT | OUT | OUT | OUT |
| **CAN** | 1,060 | 1,220 | 1,320 | 1,530 | 1,160 | 1,040 | 1,000 | 1,230 | 1,160 | 1,170 | 1,160 | 1,200 |
| **AUS** | 3,335 | 3,561 | 3,693 | 3,288 | 2,679 | 2,378 | 2,302 | 2,632 | 2,465 | 2,541 | 2,652 | 2,815 |

**Tabla 4.3.1.2.3.** Rentabilidades bonos a 6 meses. Año 2012.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 1,060 | 0,910 | 0,700 | 0,600 | 0,540 | 0,500 | 0,340 | 0,170 | 0,090 | 0,070 | 0,080 | 0,080 |
| **ESP** | 2,044 | 1,632 | 1,434 | 2,419 | 3,269 | 4,175 | 4,045 | 3,094 | 2,630 | 2,538 | 2,424 | 2,260 |
| **EEUU** | 0,420 | 0,340 | 0,350 | 0,350 | 0,370 | 0,360 | 0,400 | 0,350 | 0,320 | 0,270 | 0,270 | 0,300 |
| **FRA** | 0,252 | 0,246 | 0,117 | 0,118 | 0,099 | 0,113 | 0,010 | -0,005 | 0,007 | 0,006 | -0,006 | 0,002 |
| **ITA** | 1,979 | 1,206 | 1,122 | 1,780 | 2,115 | 2,978 | 2,469 | 1,591 | 1,509 | 1,352 | 0,921 | 0,951 |
| **JAP** | 0,100 | 0,110 | 0,110 | 0,100 | 0,100 | 0,080 | 0,060 | 0,050 | 0,060 | 0,070 | 0,070 | 0,090 |
| **R.U.** | 1,050 | 1,030 | 0,990 | 0,970 | 0,960 | 0,910 | 0,740 | 0,620 | 0,560 | 0,450 | 0,450 | 0,450 |
| **POR** | 1,807 | 1,395 | 1,197 | 2,182 | 3,032 | 3,938 | 3,808 | 2,857 | 2,393 | 2,301 | 2,187 | 2,023 |
| **GRE** | 4,790 | 4,864 | 4,937 | 4,964 | 4,904 | 5,014 | 4,822 | 4,557 | 4,605 | 4,644 | 4,603 | 4,698 |
| **CAN** | 1,030 | 1,120 | 1,190 | 1,420 | 1,100 | 1,000 | 0,980 | 1,160 | 1,100 | 1,080 | 1,100 | 1,130 |
| **AUS** | 3,336 | 3,678 | 3,786 | 3,388 | 2,733 | 2,555 | 2,754 | 3,047 | 2,869 | 2,664 | 2,823 | 2,679 |

De acuerdo a estos datos de rentabilidad reales durante el año 2012, se procede ahora al cálculo de las rentabilidades y riesgos reales de las carteras obtenidas como resultados del apartado anterior para los distintos valores de α y β para el largo, el medio y el corto plazo.

Según los datos del 2012, las rentabilidades promedio de cada bono serán:

**Tabla 4.3.1.2.4.** Rentabilidades promedio. Año 2012.

| Bono a 10 años | | Bono a 3 años | | Bono a 6 meses | |
|---|---|---|---|---|---|
| | PROMEDIO | | PROMEDIO | | PROMEDIO |
| ALEMANIA | 0,034 | ALEMANIA | 0,024 | ALEMANIA | 0,024 |
| ESPAÑA | 0,045 | ESPAÑA | 0,035 | ESPAÑA | 0,027 |
| EEUU | 0,035 | EEUU | 0,020 | EEUU | 0,020 |
| FRANCIA | 0,037 | FRANCIA | 0,025 | FRANCIA | 0,019 |
| ITALIA | 0,046 | ITALIA | 0,034 | ITALIA | 0,024 |
| JAPÓN | 0,014 | JAPÓN | 0,006 | JAPÓN | 0,004 |
| R. UNIDO | 0,040 | R. UNIDO | 0,028 | R. UNIDO | 0,027 |
| PORTUGAL | 0,058 | PORTUGAL | 0,053 | PORTUGAL | 0,025 |
| GRECIA | 0,079 | GRECIA | 0,095 | GRECIA | 0,038 |
| CANADÁ | 0,034 | CANADÁ | 0,024 | CANADÁ | 0,022 |
| AUSTRALIA | 0,057 | AUSTRALIA | 0,053 | AUSTRALIA | 0,050 |

Los pesos obtenidos ($w_i$) en el apartado anterior para cada bono según los distintos valores de α y β son:

**Tabla 4.3.1.2.5.** Resultados modelo.

| | α =1 β = 0 | | | α =0,75 β = 0,25 | | | α =0,5 β = 0,5 | | | α =0,25 β = 0,75 | | | α =0 β = 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
| **ALE** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ESP** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **EEUU** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **FRA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **JAP** | 83,06 | 84,28 | 100 | 82,64 | 83,67 | 100 | 81,85 | 82,6 | 100 | 79,71 | 79,99 | 94,74 | 0 | 0 | 0 |
| **R.U.** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **POR** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **GRE** | 3,67 | 2,28 | 0 | 3,68 | 2,3 | 0 | 3,68 | 2,34 | 0 | 3,68 | 2,43 | 5,26 | 100 | 100 | 0 |
| **CAN** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **AUS** | 13,27 | 13,44 | 0 | 13,68 | 14,03 | 0 | 14,47 | 15,06 | 0 | 16,61 | 17,58 | 0 | 0 | 0 | 100 |

Con lo que las rentabilidades reales que se habrían obtenido durante 2012 con las carteras óptimas según el modelo serían las dadas por $R_p = \sum_{\mathrm{i}=1}^{11} \mathrm{w_i} \ \mathrm{x} \ \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}}$, esto es, multiplicando matricialmente los resultados de la tabla 4.3.1.2.5. y la tabla 4.3.1.2.4.:

**Tabla 4.3.1.2.6.** Rentabilidades reales. Año 2012.

| | α =1 β = 0 | | | α =0,75 β = 0,25 | | | α =0,5 β = 0,5 | | | α =0,25 β = 0,75 | | | α =0 β = 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
| $\mathrm{R}_p$ | 2,12 | 2,159 | 0,083 | 2,139 | 2,190 | 0,083 | 2,167 | 2,247 | 0,083 | 2,243 | 2,381 | 0,331 | 22,504 | 72,865 | 3,026 |

Se procede ahora al cálculo de los riesgos reales para las distintas carteras que se habrían asumido durante el año 2012.

Las matrices de covarianzas, según los datos históricos de rentabilidad para el año 2012, reflejados en las tablas 4.3.1.2.1, 4.3.1.2.2 y 4.3.1.2.3 para el largo, medio y corto plazo respectivamente son:

**Bono a 10 años**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,046*** | -0,077 | 0,035 | 0,072 | 0,022 | 0,018 | 0,039 | 0,331 | 0,234 | 0,029 | 0,075 |
| -0,077 | ***0,327*** | -0,073 | -0,087 | 0,135 | -0,023 | -0,099 | -0,231 | 0,984 | -0,060 | -0,156 |
| 0,035 | -0,073 | ***0,039*** | 0,061 | -0,003 | 0,016 | 0,039 | 0,270 | 0,002 | 0,029 | 0,071 |
| 0,072 | -0,087 | 0,061 | ***0,181*** | 0,111 | 0,036 | 0,068 | 0,794 | 1,012 | 0,050 | 0,133 |
| 0,022 | 0,135 | -0,003 | 0,111 | ***0,337*** | 0,019 | -0,019 | 0,730 | 2,208 | 0,003 | 0,015 |
| 0,018 | -0,023 | 0,016 | 0,036 | 0,019 | ***0,009*** | 0,016 | 0,178 | 0,182 | 0,013 | 0,034 |
| 0,039 | -0,099 | 0,039 | 0,068 | -0,019 | 0,016 | ***0,051*** | 0,270 | -0,080 | 0,032 | 0,079 |
| 0,331 | -0,231 | 0,270 | 0,794 | 0,730 | 0,178 | 0,270 | ***4,641*** | 6,304 | 0,224 | 0,612 |
| 0,234 | 0,984 | 0,002 | 1,012 | 2,208 | 0,182 | -0,080 | 6,304 | ***24,187*** | -0,008 | 0,221 |
| 0,029 | -0,060 | 0,029 | 0,050 | 0,003 | 0,013 | 0,032 | 0,224 | -0,008 | ***0,028*** | 0,060 |
| 0,075 | -0,156 | 0,071 | 0,133 | 0,015 | 0,034 | 0,079 | 0,612 | 0,221 | 0,060 | ***0,166*** |

M.C. 4. Matriz de covarianzas 10 años. Datos 2012.

**Bono a 3 años**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,018*** | -0,058 | 0,004 | 0,041 | 0,009 | 0,004 | 0,015 | 0,532 | 0,167 | 0,006 | 0,051 |
| -0,058 | ***0,986*** | -0,014 | -0,087 | 0,559 | -0,016 | -0,054 | -1,088 | -1,077 | -0,064 | -0,299 |
| 0,004 | -0,014 | ***0,002*** | 0,011 | -0,003 | 0,001 | 0,004 | 0,126 | 0,048 | 0,004 | 0,014 |
| 0,041 | -0,087 | 0,011 | ***0,126*** | 0,078 | 0,011 | 0,042 | 1,515 | -0,215 | 0,015 | 0,125 |
| 0,009 | 0,559 | -0,003 | 0,078 | ***0,669*** | 0,006 | 0,006 | 1,196 | -2,943 | -0,043 | -0,070 |
| 0,004 | -0,016 | 0,001 | 0,011 | 0,006 | ***0,002*** | 0,004 | 0,163 | -0,084 | 0,001 | 0,015 |
| 0,015 | -0,054 | 0,004 | 0,042 | 0,006 | 0,004 | ***0,018*** | 0,539 | -0,024 | 0,008 | 0,051 |
| 0,532 | -1,088 | 0,126 | 1,515 | 1,196 | 0,163 | 0,539 | ***23,589*** | -4,067 | 0,153 | 1,778 |
| 0,167 | -1,077 | 0,048 | -0,215 | -2,943 | -0,084 | -0,024 | -4,067 | ***45,792*** | 0,383 | 0,542 |
| 0,006 | -0,064 | 0,004 | 0,015 | -0,043 | 0,001 | 0,008 | 0,153 | 0,383 | ***0,019*** | 0,034 |
| 0,051 | -0,299 | 0,014 | 0,125 | -0,070 | 0,015 | 0,051 | 1,778 | 0,542 | 0,034 | ***0,230*** |

M.C. 5. Matriz de covarianzas 3 años. Datos 2012.

**Bono a 6 meses**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,119*** | -0,087 | 0,010 | 0,029 | 0,051 | 0,005 | 0,073 | -0,087 | 0,034 | 0,002 | 0,092 |
| -0,087 | ***0,727*** | 0,009 | -0,028 | 0,397 | -0,009 | -0,024 | 0,667 | 0,013 | -0,039 | -0,242 |
| 0,010 | 0,009 | ***0,002*** | 0,002 | 0,018 | 0,000 | 0,008 | 0,009 | 0,003 | -0,001 | 0,005 |
| 0,029 | -0,028 | 0,002 | ***0,009*** | 0,010 | 0,001 | 0,018 | -0,028 | 0,008 | 0,000 | 0,023 |
| 0,051 | 0,397 | 0,018 | 0,010 | ***0,398*** | -0,002 | 0,061 | 0,397 | 0,048 | -0,024 | -0,084 |
| 0,005 | -0,009 | 0,000 | 0,001 | -0,002 | ***0,000*** | 0,003 | -0,009 | 0,002 | 0,001 | 0,005 |
| 0,073 | -0,024 | 0,008 | 0,018 | 0,061 | 0,003 | ***0,060*** | -0,024 | 0,029 | 0,004 | 0,059 |
| -0,087 | 0,667 | 0,009 | -0,028 | 0,397 | -0,009 | -0,024 | ***0,727*** | 0,013 | -0,039 | -0,242 |
| 0,034 | 0,013 | 0,003 | 0,008 | 0,048 | 0,002 | 0,029 | 0,013 | ***0,025*** | 0,003 | 0,018 |
| 0,002 | -0,039 | -0,001 | 0,000 | -0,024 | 0,001 | 0,004 | -0,039 | 0,003 | ***0,013*** | 0,021 |
| 0,092 | -0,242 | 0,005 | 0,023 | -0,084 | 0,005 | 0,059 | -0,242 | 0,018 | 0,021 | ***0,175*** |

M.C. 6. Matriz de covarianzas 6 meses. Datos 2012.

De acuerdo a los $w_i$ de la tabla 4.3.1.2.5. y las matrices de covarianza calculadas, se obtienen los riesgos reales para cada uno de los portafolios. Así, aplicando que $\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{11} w_i\, w_j\, \sigma_{ij}$, se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 4.3.1.2.7.** Riesgos reales. Año 2012.

| | α =1 β = 0 | | | α =0,75 β = 0,25 | | | α =0,5 β = 0,5 | | | α =0,25 β = 0,75 | | | α =0 β = 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
| $\sigma_p$ | 25.03 | 18,03 | 2,10 | 25,14 | 18,32 | 2,10 | 25,26 | 18,87 | 2,10 | 25,61 | 20,16 | 2,59 | 491,80 | 676,70 | 41,87 |

Según los resultados recogidos por las tablas 4.3.1.2.7. y 4.3.1.2.6., la función objetivo del modelo:

$$\text{F.o.} = \alpha\,\sigma_p + \beta\, 1/\text{R}_p = \alpha \sum_{i=1}^{11}\sum_{j=1}^{11} w_i\, w_j\, \sigma_{ij} + \beta\, \frac{1}{\sum_{i=1}^{11} w_i \text{ x } \bar{\text{R}}_i}$$

será para los distintos valores de α y β:

**Tabla 4.3.1.2.8.** Función objetivo. Año 2012.

| | α =1 β = 0 | | | α =0,75 β = 0,25 | | | α =0,5 β = 0,5 | | | α =0,25 β = 0,75 | | | α =0 β = 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
| **F.o.** | 25,03 | 18,03 | 2,10 | 18,97 | 13,86 | 1,60 | 12,86 | 9,66 | 7,05 | 6,74 | 5,36 | 2,92 | 0,04 | 0,01 | 0,33 |

Si se comparan estos últimos resultados, obtenidos a partir de los datos reales de rentabilidad de los bonos del año 2012 con los resultados dados por el modelo, se obtienen los datos reflejados en la tabla 4.3.1.2.9.:

**Tabla 4.3.1.2.9.** Comparativa resultados modelo / Resultados datos reales. Año 2012.

| | α =1 β = 0 | | | α =0,75 β = 0,25 | | | α =0,5 β = 0,5 | | | α =0,25 β = 0,75 | | | α =0 β = 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
| $\sigma_p$ | 14,77 | 25,64 | 30,15 | 14,77 | 25,64 | 30,15 | 14,77 | 25,66 | 30,15 | 14,81 | 25,76 | 31,54 | 460 | 975 | 156 |
| $\boldsymbol{\sigma_p}$ | ***25.0*** | ***18,03*** | ***2,10*** | ***25,14*** | ***18,32*** | ***2,10*** | ***25,26*** | ***18,87*** | ***2,10*** | ***25,61*** | ***20,16*** | ***2,59*** | ***491,8*** | ***676,7*** | ***41,87*** |
| $R_p$ | 2,185 | 1,4 | 0,4 | 2,203 | 1,43 | 0,4 | 2,238 | 1,49 | 0,4 | 2,33 | 1,62 | 0,57 | 7,864 | 9,48 | 4,976 |
| $\boldsymbol{R_p}$ | ***2,12*** | ***2,159*** | ***0,083*** | ***2,139*** | ***2,190*** | ***0,083*** | ***2,167*** | ***2,247*** | ***0,083*** | ***2,243*** | ***2,381*** | ***0,331*** | ***22,50*** | ***72,865*** | ***3,026*** |
| F.O. | 14,77 | 25,64 | 30,15 | 11,19 | 19,41 | 23,24 | 7,61 | 13,17 | 16,34 | 4,02 | 6,91 | 9,19 | 0,13 | 0,11 | 0,20 |
| ***F.o.*** | ***25,03*** | ***18,03*** | ***2,10*** | ***18,97*** | ***13,86*** | ***1,60*** | ***12,86*** | ***9,66*** | ***7,05*** | ***6,74*** | ***5,36*** | ***2,92*** | ***0,04*** | ***0,01*** | ***0,33*** |

Siendo:

| |
|---|
| Datos estimados según el modelo objeto de estudio |
| ***Datos reales*** |

Analizando los datos de la tabla 4.3.1.2.9, se puede extraer algunas conclusiones:

- En ambos casos, como no podría ser de otro modo, el riesgo crece a medida que aumenta la rentabilidad (a medida que aumenta el valor de β en detrimento de α la rentabilidad aumenta, pero el riesgo se dispara). Sin embargo, este aumento del riesgo no guarda la misma proporción en el caso estimado que en el real. Por ejemplo, para una rentabilidad estimada en L/P (con α=0, β=1) de 7,864%, se estimaba asumir un riesgo de 460 puntos, mientras que la rentabilidad real en este mismo caso se hubiera ido al 22,5% sin apenas aumentar el riesgo. La explicación a esto se puede encontrar en el hecho de que el país que afecta en estas condiciones, Grecia, durante parte del año 2012 no realizó emisiones de deuda, estando durante unos meses, y por mandato de la Troika (F.M.I., Banco Mundial y U.E.), fuera del mercado, produciéndose por tanto pocas variaciones en la rentabilidad de sus bonos, manteniéndose con ello prácticamente constante su nivel de riesgo dado por $\sigma_p^2$.

- Se observa también, como el hecho ya comentado de la poca diversificación que se produce en el portafolio, provoca, a excepción del caso de $\beta$=1, pocas variaciones en los valores de rentabilidad y riesgo, ocasionado, igual que se comentaba con anterioridad por el hecho de la gran diferencia en cuanto a las rentabilidades que existe entre los países situados en los extremos de la cartera.

### 4.3.2 Modelo de optimización de la rentabilidad con acotación del riesgo.

Se procede ahora al desarrollo de un nuevo modelo, en el cuál, la variable de optimización es, exclusivamente, la rentabilidad a obtener de la inversión, desapareciendo el riesgo de la función objetivo y convirtiéndose en una restricción más.

En este apartado, se pretende analizar la influencia que tiene el hecho de establecer límites en los valores máximos del riesgo en la cartera óptima. Intentando, al mismo tiempo, observar para qué valores de riesgo máximo, la cartera se diversifica hacia otros valores diferentes a los observados en el apartado anterior.

El modelo a resolver será el siguiente

Max $\quad \mathrm{R}_p$

s.a.

$\sum_{i=1}^{11} w_i = 100$ (4.3.2.1.)

$\sigma_p \leq \sigma_{max}$

o lo que es lo mismo:

Max $\sum_{i=1}^{11} w_i \times \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{i}}$

s.a.

$\sum_{i=1}^{11} w_i = 100$ (4.3.2.1.)

$\sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} w_i \, w_j \, \sigma_{ij} \leq \sigma_{max}$

El valor de $\sigma_{max}$ será introducido en el libro Excel a voluntad por el usuario, permitiendo así resolver el modelo para diferente fronteras de riesgo máximo. En los resultados se expondrá un resumen de los valores más significativos.

Los parámetros de configuración de "*Solver*" para la resolución del modelo son los representados en la Figura 12. Parámetros de *Solver*.

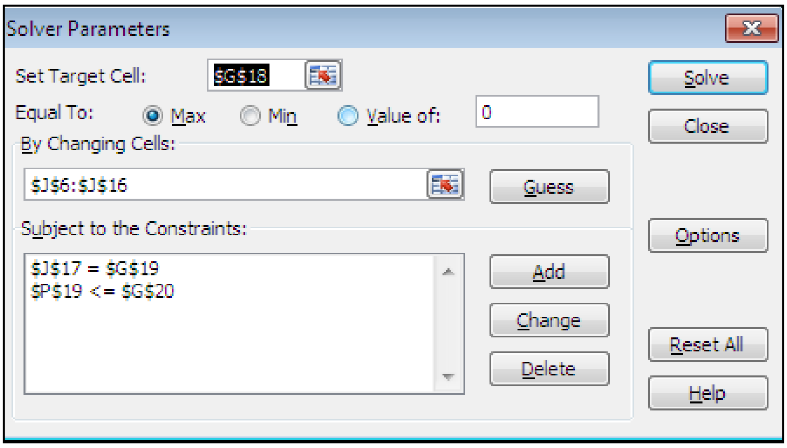



**Figura 12.** Parámetros de *Solver*.

Es este caso, la función objetivo dada por el valor de la celda G18, corresponde al valor de la rentabilidad de la inversión, valor que ahora se pretende maximizar, cómo así se indica en la opción correspondiente.

Además, se ha introducido como nueva restricción que el valor calculado para el riesgo de la cartera solución del modelo y dado por el valor de la celda P19, sea en todo caso menor que el valor de la celda G20, en la cual y a voluntad, se procede, previo a la ejecución de "*Solver*", a introducir el máximo riesgo que está dispuesto a asumir el posible inversor.

Las opciones siguen siendo las mismas que en el caso anterior, representadas en la Figura 13. Opciones de *Solver*.

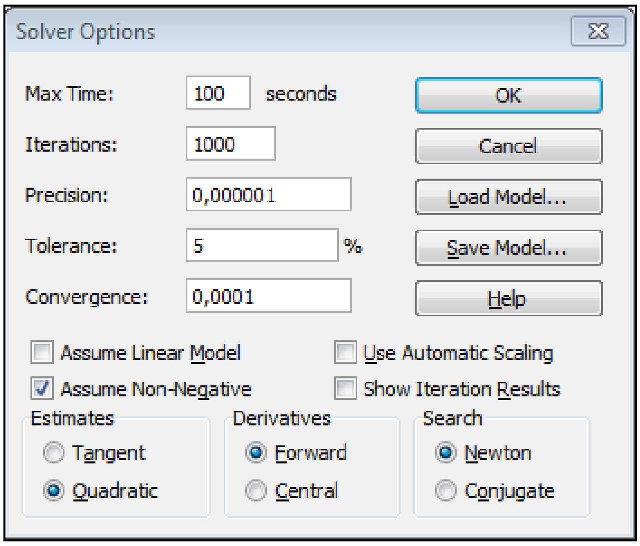



**Figura 13.** Opciones de *Solver*.

Se procede ahora a la resolución del modelo variando el valor del riesgo máximo que se quiera considerar para la inversión.

Sin embargo, previo a ello, es necesario tener en cuenta que de acuerdo a los resultados recogidos por el apartado anterior (Tabla 4.3.1.1.1. Resultados modelo. Opción. 1), se puede concluir, que los valores de riesgo mínimo y máximo que se va a obtener en cualquier cartera que se plantee van a ser los dados en la tabla anterior en los casos de $\beta = 0$ y $\beta = 1$ respectivamente (independientemente del plazo, es decir, sería igual en el C/P, M/P y L/P).

De esta forma, tomando como ejemplo el largo plazo, para cualquier cartera posible, el riesgo mínimo que se incurre con una inversión en la misma será el correspondiente al caso de $\beta = 0$, esto es 14,77%, mientras que el riesgo máximo será el correspondiente al caso de $\beta = 1$, o sea 460%.

Así, si se intenta resolver el modelo para valores de riesgo inferiores a 14,77%, no se obtiene una solución, el modelo no converge, mientras que si se eleva el valor máximo de riesgo por encima del 460%, la cartera óptima de inversión, y por tanto su rentabilidad asociada, no varían. Resolviendo el modelo para distintos valores de riesgo máximo de inversión entre estos valores se obtienen diferentes carteras óptimas. De forma análoga se actúa para el medio y el corto plazo.

Los resultados con las diferentes opciones empleadas se recogen en la Tabla 4.3.2.1. Resultados modelo. Opción 2.

***Resultados***

**Tabla 4.3.2.1.** Resultados modelo. Opción 2.

| | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P | L/P | M/P | C/P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ESP** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **EEUU** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **FRA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 16.02 | 0 | 0 | 3.11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **JAP** | 82.47 | 83.97 | 100 | 29.49 | 43.58 | 79.65 | 0 | 0 | 58.58 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **R.U.** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **POR** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **GRE** | 3.68 | 2.29 | 0 | 1.92 | 3.77 | 18.31 | 3.92 | 6.42 | 33.39 | 23.60 | 26.88 | 69.75 | 100 | 100 | 0 |
| **CAN** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **AUS** | 13.86 | 13.74 | 0 | 52.57 | 52.75 | 2.04 | 92.97 | 93.58 | 8.03 | 76.40 | 73.12 | 30.25 | 0 | 0 | 100 |
| $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ | 14.77 | 25.64 | 30.15 | 20 | 35 | 38 | 30 | 57 | 50 | 100 | 230 | 90 | 1000 | 1000 | 1000 |
| $\boldsymbol{F.O. = R_p}$ | 2.21 | 1.42 | 0.40 | 4.31 | 3.41 | 1.11 | 5.79 | 5.61 | 1.9 | 6.25 | 6.46 | 4.16 | 7.86 | 9.48 | 4.97 |
| $\boldsymbol{\sigma_P}$ | 14.77 | 25.64 | 30.15 | 20 | 35 | 38 | 30 | 57 | 50 | 100 | 230 | 90 | 459.97 | 975 | 156 |

Se puede observar, como no podía ser de otro modo, que en los valores extremos del riesgo, las carteras óptimas ofrecidas por el modelo coinciden con las obtenidas en el caso anterior.

A tenor de los resultados obtenidos, y a fin de obtener una visión más clarificadora de cuál es la evolución que experimenta la cartera en función de la variación que se establezca en la frontera del riesgo máximo, se procede a representar de forma gráfica dicha evolución. Únicamente se han tenido en cuenta los países que entran a formar parte de la cartera en un determinado momento.

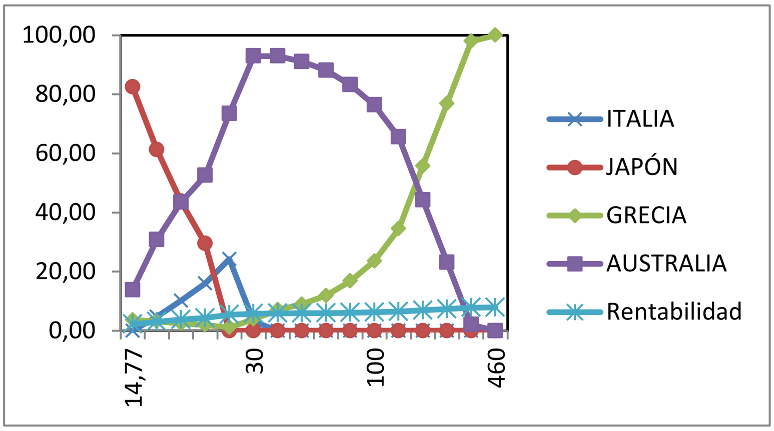



**Figura 14.** Evolución de la cartera en función del riesgo máximo. Largo Plazo.

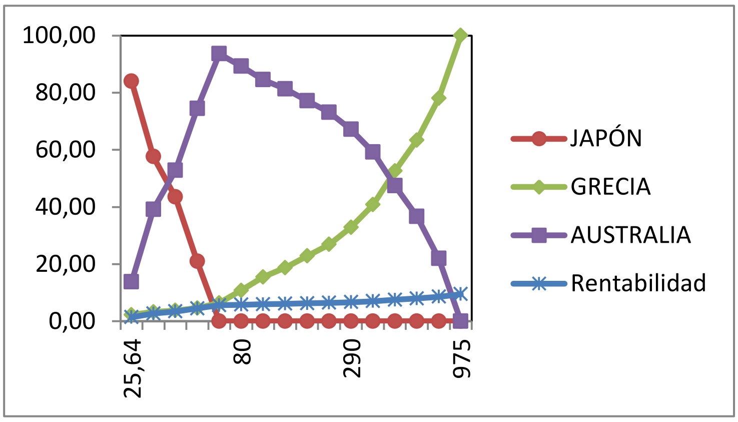



**Figura 15.** Evolución de la cartera en función del riesgo máximo. Medio Plazo.

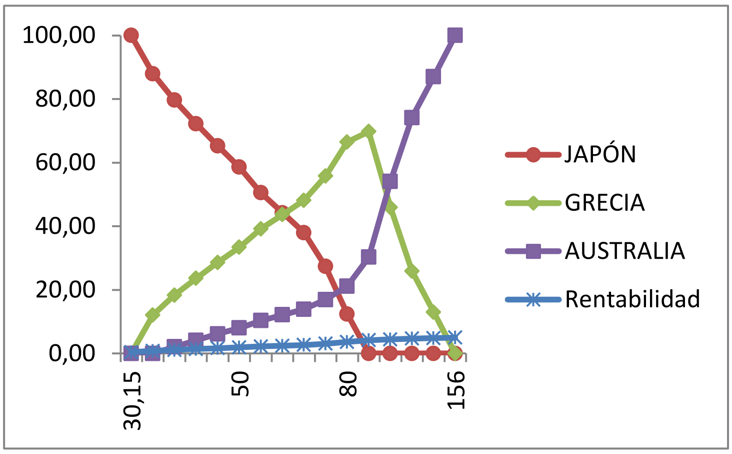



**Figura 16.** Evolución de la cartera en función del riesgo máximo. Corto Plazo.

Las gráficas anteriores definen la variación de los pesos de los distintos bonos que componen la cartera de inversión, a medida que se modifica el techo del riesgo máximo asumido por el inversor. A fin de aclarar lo máximo posible las gráficas, se han omitido aquellos bonos que no aparecen en ninguna de las carteras óptimas a lo largo del estudio. Además y como ampliación de la información recogida por las mismas, se ha introducido los valores de rentabilidad global de la inversión de acuerdo al nivel de riesgo máximo considerado.

Se observa en todos los casos, como no podía ser de otro modo, como la rentabilidad es creciente en función del nivel de riesgo, así, a medida que aumenta el nivel de riesgo que el inversor está dispuesto a asumir, aumenta también el valor de la rentabilidad esperada. Si se compara esta variación de la rentabilidad entre los distintos plazos de recuperación de la inversión, se observa que mientras que el corto plazo, para un riesgo mínimo del 30,15% la cartera correspondiente ofrece una rentabilidad esperada de un 0,40 %, para el máximo riesgo del 156%, la rentabilidad correspondiente es del 4,97%, esto es un aumento del 1200%.

Si se realiza esta comparación para el largo plazo y niveles de riesgo similares, se tiene que para un nivel de riesgo mínimo del 14,77%, la rentabilidad esperada por la cartera de inversión es del 2,21 %, mientras que si se va a niveles de riesgo en torno al 156%

(max. del corto plazo), la rentabilidad ofrecida por la cartera estaría en torno a un 6,50%, es decir un aumento del 294%.

Con todos estos datos en la mano, entraría aquí el poder de decisión del inversor, ya que aunque el aumento de rentabilidad es mucho mayor en el corto plazo a medida que se asume un mayor nivel de riesgo, estos niveles son en valor absoluto menores que en el largo plazo, un 4,97% frente a un 6,50%, siendo además mayor el riesgo mínimo que se asume en el corto plazo, un 30,15%, que en el largo plazo, un 14,77%. Como contrapartida está el plazo de recuperación de la inversión, 6 meses del corto plazo frente a los 10 años del largo plazo.

En cuanto a la conformación de las carteras óptimas en cada uno de los casos, cabe destacar un aspecto fundamental, como se observa en los resultados recogidos en la Tabla 4.3.2.1. Resultados modelo. Opción 2, el riesgo global de la cartera ($\sigma_P$), coincide siempre con el valor de riesgo máximo que se esté considerando, ($\sigma_{max}$), o lo que es lo mismo, cada resultado obtenido como aplicación del modelo, da la cartera correspondiente a la máxima rentabilidad para el nivel de riesgo considerado. Esto es en cada caso la cartera eficiente del nivel de riesgo considerado, es decir, no existe ninguna otra cartera, para ese determinado nivel de riesgo, que ofrezca una rentabilidad mayor, siendo el conjunto de todas estas carteras la frontera eficiente del portafolio de inversión.

En el siguiente capítulo, en el desarrollo de la teoría de optimización por escenarios, se profundiza algo más en los términos de carteras y fronteras eficientes, sus definiciones y aplicaciones.

Si se observa la evolución de los bonos de Japón, es destacable en los tres casos, largo, medio y corto plazo, que el peso de sus bonos es máximo para los niveles bajos de riesgo, siendo incluso del 100% en el corto plazo, y va cayendo en la cartera óptima a medida que aumenta el nivel de riesgo, cosa completamente lógica y normal a tenor de las rentabilidades ofrecidas por los bonos de Japón en cualquiera de los casos, siendo a medida que se aumenta el nivel de riesgo asumible por el inversor, cuando la cartera evoluciona hacia otros valores de mayores rentabilidades como Australia y Grecia.

En los casos de estos dos últimos países, se observa que en un primer momento, en el largo y medio plazo, a medida que se aumenta el nivel de riesgo, y cae la inversión en los bonos de Japón, las carteras óptimas tienden a aumentar el porcentaje de inversión, sobretodo, en Australia y, mínimamente, en Grecia. Y no es a partir de ciertos valores de riesgo, en torno al 30% en el largo plazo y en torno al 75% en el medio plazo, cuando el porcentaje de inversión en Australia comienza a decaer y se dispara el porcentaje de inversión en bonos griegos, alcanzándose el 100% para los máximos niveles de riesgo.

# 5 Optimización robusta para la gestión del riesgo.

En este apartado se tiene en consideración la posibilidad de que se pudieran producir diferentes escenarios. Esto conduce a proponer un modelo de optimización robusta, que trata de encontrar una solución robusta ante posibles escenarios diferentes. Es lógico pensar que la crisis se irá atenuando y la diferencia de interés que los distintos países se ven obligados a pagar por su deuda se vaya atenuando. Pero si no es así, o si esa atenuación es más o menos rápida, con este proyecto, se pretende conocer si este modelo podría adelantar estos resultados.

Para intentar, en la medida de lo posible, responder a esta y otras cuestiones, se desarrolla a continuación una metodología basada en la creación de escenarios a partir de los cuales modelar distintas "realidades" posibles, y, de esta manera, evaluar la robustez del modelo, realizando un análisis de sensibilidad del mismo y estudiar cómo responde a distintas alternativas de evolución de las rentabilidades de los bonos que conforman la cartera de inversión.

Para ello se deben planificar diferentes escenarios futuros posibles s=1,2,….., S donde existirán para cada uno de ellos unos rendimientos esperados de cada bono, denotados por $r_{is}$ (donde *i* es el bono de que se trate y *s* el escenario en el que se encuentra). Con ello, lo que se pretende es simular distintas situaciones futuras, que como tales son desconocidas.

En el caso objeto de estudio de este Proyecto, dónde la cartera de inversión está conformada por títulos de renta fija correspondientes a deuda pública, las posibles situaciones futuras que se pueden plantear, corresponden a la evolución que experimente la economía de los distintos países que conforman la cartera de inversión.

Se plantearán así tres enfoques de estudio, los cuales se fundamentan en el concepto prima de riesgo. La prima de riesgo, diferencia de rentabilidad en puntos básicos del bono de cada país a 10 años respecto al de Alemania, marca la tendencia que va a sufrir la rentabilidad de dichos bonos.

De acuerdo a esta definición, se toma como referencia la rentabilidad de los bonos de Alemania, para la zona Euro y su área de influencia económica.

En este Proyecto se generaliza este concepto a nivel mundial, manteniendo la referencia en los bonos alemanes. Esta generalización del concepto de prima de riesgo no supone en sí misma ningún problema, ya que al tratarse de una referencia, lo único que no ocurre en la situación real y sí podría ocurrir ahora es que apareciera algún caso con prima de riesgo negativa. De hecho, a lo largo del desarrollo del proyecto, aparecerán algunos valores en la prima de riesgo objetivo para Japón que serán negativos lo que simplemente indicará que la rentabilidad a pagar por Japón para colocar su deuda en los mercados será menor que la que tendría que pagar Alemania.

Por el hecho de fundamentar este estudio en el desarrollo del concepto de prima de riesgo, todo lo que sigue a continuación se realiza sobre las rentabilidades de los bonos en el largo plazo (10 años).

Los tres enfoques que se desarrollan son los siguientes:

- ENFOQUE I: Prima de riesgo objetivo.

  En este primer enfoque, se plantea para la creación de escenarios una prima de riesgo objetivo a alcanzar por los países a finales de 2014, de acuerdo a esto se realiza una progresión lineal de la rentabilidad de los bonos de cada país desde enero de 2013 hasta diciembre de 2014, a fin de alcanzar ese objetivo marcado de prima de riesgo, obteniendo así las rentabilidades de los bonos para el año 2013. Se plantearán cinco alternativas en cinco escenarios distintos de menos a más optimistas.

- ENFOQUE II: Evolución por zonas.

  En el segundo enfoque, se analizará una evolución de los intereses a lo largo de 2012 de acuerdo a unos porcentajes de evolución asignados a la prima de riesgo de cada país. Se englobarán los países de la cartera por zonas geográficas y se plantearán posibilidades a que se de una u otra evolución en cada zona, creándose tres escenarios distintos con varias combinaciones de ambas. Una vez desarrollado el modelo, se podrán comparar los resultados obtenidos con la realidad, de acuerdo a los datos reales que se tienen de la rentabilidad de los bonos a lo largo del año 2012.

- ENFOQUE III: Desarrollo ideal.

  El tercer enfoque sería el desarrollo ideal del estudio, planteando distintos escenarios fundamentales de cada país de forma independiente, que modelara la evolución prevista de su economía. Como ya se indicó al inicio del presente Proyecto, esta forma de actuar, que por otra parte es la que se utiliza en muchos estudios profesionales sobre la materia, conlleva un conocimiento exhaustivo de la economía de cada país, lo cual se sale de los objetivos planteados, por lo que no se desarrolla.

## 5.1 Modelo de optimización por escenarios. Modelos MM y MAD.

En la práctica, resulta muy difícil, cuando no imposible, cumplir con la premisa de una cartera de inversión con máxima rentabilidad al menor riesgo. Para proseguir con el análisis, es conveniente introducir el principio de dominación, que analiza inversiones alternativas dentro de un mismo nivel de rendimiento o clase de riesgo. Así, entre inversiones que tienen el mismo rendimiento, el principio de dominación establece que es preferible aquélla con el menor riesgo, y, de la misma manera, para cada clase de riesgo es preferible la inversión con el mayor rendimiento. Este principio puede reducir el número de alternativas por considerar como un criterio para elegir entre inversiones individuales.

Por otra parte, el criterio para elegir entre combinaciones de activos financieros en una cartera se basa en los planteamientos de Markowitz. Al asignar a más de un título un monto dado a invertir se abren múltiples combinaciones posibles tan sólo con dos de ellos al variar las proporciones que se comprarían de cada uno. En este caso, la determinación de la combinación más deseable de riesgo y rendimiento dependería de las preferencias del inversionista por el rendimiento de su capital y también de su aversión al riesgo. Sin embargo, cuando se combinan tres o más activos en una cartera se puede observar que para cada nivel de riesgo habrá dos o más combinaciones de acciones que ofrecen niveles de rendimiento distintos. Markowitz llamó carteras eficientes a las que proporcionan los rendimientos esperados más altos para cada nivel de riesgo, o lo que es lo mismo, el menor grado de riesgo para cada rendimiento esperado.

En la Figura 17. Frontera eficiente, por ejemplo, la cartera N no es eficiente porque en ese mismo nivel de rendimiento hay otra cartera $E_1$ que tiene un menor riesgo; igualmente, para ese mismo nivel de riesgo que representa N hay otra cartera $E_2$ que produce un mayor rendimiento.

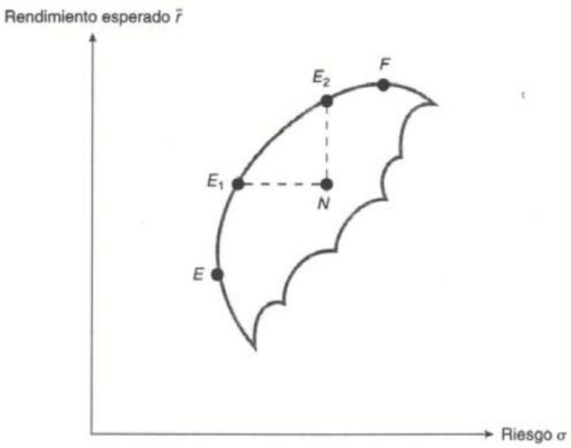



**Figura 17.** Frontera eficiente.

Cuando se dibujan sobre un plano todas las carteras que es posible crear con un número dado de acciones, teniendo en el eje X al riesgo y en el eje Y al rendimiento esperado, se define una superficie que representa a dicho conjunto de carteras viables, que en la figura es el área delimitada por la línea continua. Sin embargo, solamente interesará al inversionista para cada nivel de riesgo aquella cartera que sea eficiente; lo mismo sucede para cada nivel de rendimiento esperado. Así, a la curva que delimita esa superficie en los niveles más altos de rendimiento esperado y en los niveles más bajos de riesgo se le conoce como la frontera eficiente y representa al conjunto eficiente de carteras. En la Figura 17, es el segmento E-F de la línea continua.

De acuerdo con todo esto, a la hora de calcular la frontera eficiente de un determinado escenario, se calculará para cada valor de rentabilidad, la cartera de inversión que proporcione el riesgo mínimo para dicho valor. Para lo cual se resuelve el siguiente modelo:

Min $\quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{is}\, w_{js}\, \sigma_{ij}$ (5.1.1.)

s.a.

$\sum_{i=1}^{n} w_{is} \text{ x } r_{is} = r_s\ 100$ (5.1.2.)

$\sum_{i=1}^{n} w_{is} = 1 \quad (100\ \%)$ (5.1.3.)

Los parámetros de configuración de "*Solver*" para la resolución de este modelo son los representados en la Figura 18. Parámetros de configuración de *Solver*.

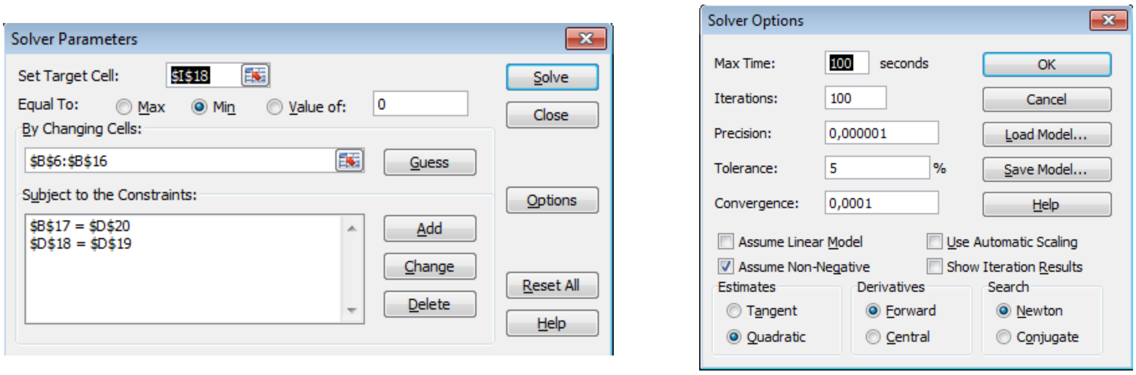



**Figura 18.** Parámetros de configuración *Solver*.

Otra observación importante, es que todo inversor parte de un capital conocido destinado a la inversión al no considerar el problema subyacente de la distribución de su riqueza. Sin embargo, existen situaciones reales en las que se trata de calcular el capital a invertir, coste, o dotación inicial de la cartera junto a la composición de la misma, de forma que se optimicen las expectativas globales del inversor.

Se pueden establecer como datos conocidos del problema $C_{min}$ y $C_{max}$ como el capital mínimo y máximo, respectivamente, que el inversor está dispuesto a destinar a la cartera. Evidentemente:

$$0 \leq C_{min} \leq C \leq C_{max} \qquad (5.1.4.)$$

siendo C el capital a invertir.

Se puede suponer que el capital que se está dispuesto a invertir en la cartera es función de la rentabilidad total esperada de la misma, es decir, $C = C(r)$. Esta función, cuyo rango es $[C_{min}, C_{max}]$ , se supone estrictamente creciente y acotada puesto que a mayor rentabilidad total esperada, el inversor está dispuesto a disminuir en mayor proporción su utilidad de consumo presente a cambio de aumentar la utilidad de riqueza que obtendría si no la hubiese disminuido. Pero mayor rentabilidad esperada supone también asumir mayor riesgo total.

En este Proyecto, una vez determinadas las carteras óptimas para cada uno de los escenarios, se establecerá para el desarrollo de los modelos coordinados que, como se ha venido haciendo hasta ahora, el capital invertido corresponde al 100% del disponible, con lo cual:

$$C_{min} = C_{max} = C\ (x) = C \qquad (5.1.5.)$$

No obstante, considerar todas las restricciones de todos los escenarios conduciría, con toda seguridad, a un modelo irrealizable, lo que lleva al concepto de modelo robusto y solución robusta:

- Un modelo es robusto si su solución es casi factible para todo escenario (S).

- Una solución es robusta si permanece cerca de la óptima de cada escenario.

Puesto que es improbable que una solución pueda cumplir simultáneamente los criterios de robustez para la factibilidad y para la optimalidad, se trata de construir un modelo coordinado que combine ambos conceptos de la forma adecuada, es decir, un modelo robusto que controle suficientemente el riesgo que el inversor asume al realizar la inversión.

Los modelos coordinados que a continuación se proponen, están basados en el desarrollo del modelo de desviaciones medias absolutas, propuesto por Konno y Yamazaki (1991) para su aplicación en la Bolsa de Tokio. Este modelo minimiza las desviaciones absolutas respecto a la rentabilidad media esperada de la cartera, sujeta al mismo tipo de restricciones que el modelo clásico de Markowitz.

Konno y Yamazaki prueban, que si las rentabilidades de los activos financieros se comportan como una función de distribución normal, minimizar la varianza, expresada como una función cuadrática de la matriz de varianzas-covarianzas, es equivalente a minimizar las desviaciones absolutas respecto a la media. Este resultado tiene la enorme ventaja de que el modelo puede ser resuelto entonces mediante programación lineal, en lugar de hacerlo mediante programación cuadrática con el consiguiente ahorro en tiempo de cálculo. Hay que tener en cuenta aquí cual era el desarrollo de la informática en los años 90 del siglo pasado.

El modelo propuesto es el siguiente:

$$\min \ \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{\mathrm{T}}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma_{it} - \sigma_i)\, x_i + y_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (5.1.6.)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} (\sigma_{it} - \sigma_i)\, x_i + y_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (5.1.7.)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \ x_i \geq \rho \qquad (5.1.8.)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (5.1.9.)$$

siendo:

$x_i$ = tanto por uno invertido en el activo financiero *i*.

$\sigma_i$ = rentabilidad media esperada del activo financiero *i*:

$$\sigma_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} \sigma_{it}}{\mathrm{T}}$$

$\sigma_{it}$ = es la rentabilidad del activo financiero *i* en el período *t*.

$\rho$ = es la tasa de rentabilidad requerida o deseada parametrizable.

Con este planteamiento, lo que se hace es minimizar la suma de las desviaciones absolutas con respecto a la rentabilidad esperada de cada activo financiero. Las desviaciones medias absolutas respecto a la media para cada período se denomina $y_t$.

Posteriormente, Canós y Ventura (1999) proponen el siguiente modelo coordinado:

Min ε

s.a.

$P_s\, \varepsilon_s(x) \leq \varepsilon$ s =1,..., S (5.1.10.)

$C_{min}\left[1 - \frac{C_{min} - C_s}{C_{min}}\, y_s\right] \leq C(x)$ s =1,..., S-1 (5.1.11.)

$C_{max}\left[1 - \frac{C_{max} - C_{s+1}}{C_{max}}\, y_s\right] \geq C(x)$ s =1,..., S-1 (5.1.12.)

$\sigma(x) \leq \sigma(xs{+}1)\, ys + \sigma(x_S)\,(1 - ys)$ s =1,..., S-1 (5.1.13.)

$1 \leq \sum_{s=1}^{S-1} y_s \leq 2$ (5.1.14.)

$y_s + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq s-1 \\ i\neq s+1}}^{S} y_i \leq 1$ $s$ =1,..., $S$-1 (5.1.15.)

$\varepsilon,\ x \geq 0$ $y_s \in \{0,1\}$

en el que dada una solución factible $x = (x_1,...,x_n)$ se definen los siguientes conceptos, que se desarrollan a continuación:

I) Se denomina error coordinado de $x$ respecto al escenario $s$ a la diferencia

$$\varepsilon_s(x) = r_s C_s - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad (5.1.16.)$$

El signo del error coordinado indica si con la solución $x$ se obtiene una cartera coordinada con mayor o menor rentabilidad que la cartera $s$.

Ahora bien, atendiendo a esta definición, ocurre que la cartera solución del modelo coordinado es idéntica a la óptima en el escenario más favorable donde el capital a invertir es el máximo considerado, al igual que el riesgo. El error coordinado respecto a esta cartera es cero y negativo para las carteras óptimas del resto de escenarios siendo, por tanto, ésta la cartera solución del modelo coordinado. Por ello, es conveniente definir el error coordinado de $x$ respecto al escenario s como la desviación relativa en el beneficio esperado de la solución $x$ respecto al del óptimo de cada escenario, expresada en términos porcentuales en lugar de en unidades monetarias, es decir:

$$\varepsilon_s(x) = \frac{r_s C_s - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i}{r_s C_s} \quad (5.1.17.)$$

II) Se denomina riesgo coordinado asociado a $x$ a $\sigma(x) = \sigma(x_1,...,x_n)$, siendo la función de riesgo total $\sigma$ la utilizada en todos los escenarios.

III) Se denomina capital total coordinado asociado a $x$ a $C(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Además de definen las variables binarias $y_s$, s = 1,...,S-1

Que toman el valor 1 si $C(x) \in [C_s, C_{s+1}]$ y 0 en caso contrario.

Adicionalmente, se definen $y_0 = 0$, $y_S = 0$.

El modelo minimiza el máximo error coordinado no negativo. Para que fuese robusto se debería minimizar el máximo error coordinado, independientemente del signo. Sin embargo, desde el punto de vista económico, los errores coordinados no positivos son incluso deseables por el inversor, con lo cual no tiene sentido minimizarlos.

Las restricciones (5.1.11.), (5.1.12.) y (5.1.13.) son transformaciones de una restricción condicional:

si $C(x) \in [C_s , C_{s+1}]$ entonces $\sigma(x) \leq \sigma(x_{s+1})$, destinada a controlar el riesgo coordinado total.

Por lo menos una variable binaria ha de valer uno, pero puede ocurrir que el capital coordinado sea igual a uno de los capitales establecidos en la partición. En tal caso, habrá dos variables binarias que valdrán uno, cumpliéndose que son adyacentes.

En resumen, y como conclusión a todo lo expuesto, se proponen en este Proyecto dos modelos coordinados:

- Modelo MM (*Min-Max error*)
- Modelo MAD (*Minimum Absolute Deviation*)

A continuación se explica cada uno de ellos.

En el primero se minimiza el máximo error producido en el escenario S más desfavorable, y se ha denominado Modelo MM (*Min-Max error*), definido como:

Min $\varepsilon$

s.a.

$P_s\, \varepsilon_s(x) \leq \varepsilon$ s =1,..., S (5.1.18.)

$C_{min}\left[1 - \frac{C_{min} - C_s}{C_{min}}\, y_s\right] \leq C(x)$ s =1,..., S-1 (5.1.19.)

$C_{max}\left[1 - \frac{C_{max} - C_{s+1}}{C_{max}}\, y_s\right] \geq C(x)$ s =1,..., S-1 (5.1.20.)

$L(x) \leq L(xs+1)\, ys + L(x_S)\,(1 - ys)$ s =1,..., S-1 (5.1.21.)

$1 \leq \sum_{s=1}^{S-1} y_s \leq 2$ (5.1.22.)

$\varepsilon,\ x \geq 0 \qquad y_s \in \{0,1\}$

Para la construcción de estos modelos el riesgo de la cartera se medirá a través de la varianza de los rendimientos históricos de la misma, siendo $\sigma_{ij}$ la covarianza del rendimiento del activo *i* con el del rendimiento del activo *j*.

Como variables del modelo se toman: el error coordinado ($\varepsilon$); la cantidad invertida en el activo *i* ($x_i$) que ahora corresponde a la inversión que finalmente se acomete y es independiente del escenario que se pueda o no producir; el riesgo de inversión del vector de activos $x = (x_1,\ldots, x_i,\ldots, x_n)$ [$\sigma(x)$] y la variable binaria que establece el escenario observado s ($y_s$).

Como datos a tener en cuenta se tomará la probabilidad de ocurrencia del escenario s ($P_S$), el capital mínimo a invertir ($C_{min}$) y el capital máximo a invertir ($C_{max}$).

Hay que recordar aquí lo expuesto en (5.1.2.), es decir,

$$C_{min} = C_{max} = C\ (x) = C \qquad (5.1.23.)$$

Por último, el conjunto de distintos rating de bonos *i*; $i = 1,2,\ldots, n$ y el conjunto de escenarios (S) serán los parámetros a incluir.

Una vez resuelto el modelo, el valor de las variables $x_i$ serán los de la composición de la cartera real.

El segundo modelo coincide con el anterior y sólo se diferencia en la función objetivo, en la cual se busca minimizar el error medio ponderado por la probabilidad de ocurrencia del escenario s. Se ha denominado modelo MAD (*Minimum Absolute Deviation*), siendo la función objetivo referida:

$$\text{Min } \varepsilon = \sum_{s=1}^{S} \mathrm{P}_{S} \, |\varepsilon_{S}|.$$

De acuerdo con todo lo desarrollado y con los escenarios creados en el apartado anterior, se procede a continuación a la resolución de ambos modelos.

## 5.2 Enfoque 1: Prima riesgo objetivo.

Como se ha comentado anteriormente, se procede a crear cinco escenarios distintos. En las siguientes tablas se plantean, de acuerdo a las características dadas a cada escenario, las primas objetivos que se pretende simular que se alcanzarán a finales de 2014, de modo, que haciendo una progresión lineal, se obtienen los intereses previstos en cada escenario para el año 2013.

Las primas de riesgo a 1 de Enero de 2013 eran, a partir de los datos de la tabla 3.1., para los países de la cartera las siguientes:

**Tabla 5.2.1.** Primas de riesgo. Enero de 2013.

| | ALE | ESP | EEUU | FRA | ITA | JAP | R.U. | POR | GRE | CAN | AUS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PRIMA | 0 | 398 | 35 | 64 | 318 | -62 | 50 | 588 | 1204 | 46 | 293 |

De acuerdo a esto se generan los distintos escenarios:

- Escenario s = 1 (muy pesimista)
- Escenario s = 2 (pesimista)
- Escenario s = 3 (mantenimiento de tipos)
- Escenario s = 4 (optimista)
- Escenario s = 5 (muy optimista)

- **Escenario s=1 (muy pesimista).**

Simula que a finales de 2014 las primas de riesgo son el doble que en Enero de 2013, lo cual proporciona los siguientes intereses para los bonos a lo largo de 2013:

**Tabla 5.2.2.** Rentabilidades escenario 1.

| | PRIMA | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 0 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 |
| **ESP** | 796 | 5,506 | 5,672 | 5,838 | 6,003 | 6,169 | 6,335 | 6,501 | 6,667 | 6,833 | 6,998 | 7,164 | 7,330 |
| **EEUU** | 70 | 1,725 | 1,739 | 1,754 | 1,768 | 1,783 | 1,798 | 1,812 | 1,827 | 1,841 | 1,856 | 1,870 | 1,885 |
| **FRA** | 128 | 2,027 | 2,053 | 2,080 | 2,107 | 2,133 | 2,160 | 2,187 | 2,213 | 2,240 | 2,267 | 2,293 | 2,320 |
| **ITA** | 636 | 4,673 | 4,805 | 4,938 | 5,070 | 5,203 | 5,335 | 5,468 | 5,600 | 5,733 | 5,865 | 5,998 | 6,130 |
| **JAP** | -123 | 0,719 | 0,694 | 0,668 | 0,643 | 0,617 | 0,591 | 0,566 | 0,540 | 0,514 | 0,489 | 0,463 | 0,438 |
| **R.U.** | 100 | 1,881 | 1,902 | 1,923 | 1,943 | 1,964 | 1,985 | 2,006 | 2,027 | 2,048 | 2,068 | 2,089 | 2,110 |
| **POR** | 1175 | 7,480 | 7,725 | 7,969 | 8,214 | 8,459 | 8,704 | 8,949 | 9,193 | 9,438 | 9,683 | 9,928 | 10,173 |
| **GRE** | 2407 | 13,896 | 14,398 | 14,899 | 15,401 | 15,902 | 16,404 | 16,905 | 17,407 | 17,908 | 18,410 | 18,911 | 19,413 |
| **CAN** | 92 | 1,839 | 1,858 | 1,878 | 1,897 | 1,916 | 1,935 | 1,954 | 1,973 | 1,993 | 2,012 | 2,031 | 2,050 |
| **AUS** | 586 | 4,416 | 4,538 | 4,660 | 4,783 | 4,905 | 5,027 | 5,150 | 5,272 | 5,394 | 5,517 | 5,639 | 5,762 |

- **Escenario s=2 (pesimista).**

Situación intermedia entre s=1 y s=3.

**Tabla 5.2.3.** Rentabilidades escenario 2.

| | PRIMA | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ALE | 0 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 |
| ESP | 597 | 5,423 | 5,506 | 5,589 | 5,672 | 5,755 | 5,838 | 5,920 | 6,003 | 6,086 | 6,169 | 6,252 | 6,335 |
| EEUU | 53 | 1,717 | 1,725 | 1,732 | 1,739 | 1,746 | 1,754 | 1,761 | 1,768 | 1,776 | 1,783 | 1,790 | 1,798 |
| FRA | 96 | 2,013 | 2,027 | 2,040 | 2,053 | 2,067 | 2,080 | 2,093 | 2,107 | 2,120 | 2,133 | 2,147 | 2,160 |
| ITA | 477 | 4,606 | 4,673 | 4,739 | 4,805 | 4,871 | 4,938 | 5,004 | 5,070 | 5,136 | 5,203 | 5,269 | 5,335 |
| JAP | -93 | 0,732 | 0,719 | 0,707 | 0,694 | 0,681 | 0,668 | 0,655 | 0,643 | 0,630 | 0,617 | 0,604 | 0,591 |
| R.U. | 75 | 1,870 | 1,881 | 1,891 | 1,902 | 1,912 | 1,923 | 1,933 | 1,943 | 1,954 | 1,964 | 1,975 | 1,985 |
| POR | 881 | 7,357 | 7,480 | 7,602 | 7,725 | 7,847 | 7,969 | 8,092 | 8,214 | 8,337 | 8,459 | 8,581 | 8,704 |
| GRE | 1805 | 13,646 | 13,896 | 14,147 | 14,398 | 14,649 | 14,899 | 15,150 | 15,401 | 15,652 | 15,902 | 16,153 | 16,404 |
| CAN | 69 | 1,830 | 1,839 | 1,849 | 1,858 | 1,868 | 1,878 | 1,887 | 1,897 | 1,906 | 1,916 | 1,925 | 1,935 |
| AUS | 440 | 4,354 | 4,415 | 4,476 | 4,538 | 4,599 | 4,660 | 4,721 | 4,782 | 4,843 | 4,904 | 4,965 | 5,026 |

- **Escenario s=3 (mantenimiento de tipos).**

**Tabla 5.2.4.** Rentabilidades escenario 3.

| | PRIMA | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ALE | 0 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 |
| ESP | 398 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 | 5,340 |
| EEUU | 35 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 | 1,710 |
| FRA | 64 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 | 2,000 |
| ITA | 318 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 | 4,540 |
| JAP | -62 | 0,745 | 0,745 | 0,744 | 0,744 | 0,744 | 0,744 | 0,744 | 0,743 | 0,743 | 0,743 | 0,743 | 0,743 |
| R.U. | 50 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 | 1,860 |
| POR | 588 | 7,235 | 7,235 | 7,236 | 7,236 | 7,236 | 7,236 | 7,236 | 7,237 | 7,237 | 7,237 | 7,237 | 7,238 |
| GRE | 1204 | 13,395 | 13,395 | 13,396 | 13,396 | 13,396 | 13,396 | 13,396 | 13,397 | 13,397 | 13,397 | 13,397 | 13,398 |
| CAN | 46 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 | 1,820 |
| AUS | 293 | 4,293 | 4,293 | 4,293 | 4,293 | 4,293 | 4,292 | 4,292 | 4,292 | 4,292 | 4,292 | 4,292 | 4,292 |

- **Escenario s=4 (optimista).**

Situación intermedia entre s=3 y s=5.

**Tabla 5.2.4.** Rentabilidades escenario 4.

| | PRIMA | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 0 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 |
| **ESP** | 88 | 5,257 | 5,174 | 5,091 | 5,008 | 4,925 | 4,843 | 4,760 | 4,677 | 4,594 | 4,511 | 4,428 | 4,345 |
| **EEUU** | 19 | 1,703 | 1,695 | 1,688 | 1,680 | 1,673 | 1,665 | 1,658 | 1,650 | 1,643 | 1,635 | 1,628 | 1,620 |
| **FRA** | 28 | 1,987 | 1,973 | 1,960 | 1,947 | 1,933 | 1,920 | 1,907 | 1,893 | 1,880 | 1,867 | 1,853 | 1,840 |
| **ITA** | 120 | 4,474 | 4,408 | 4,341 | 4,275 | 4,209 | 4,143 | 4,076 | 4,010 | 3,944 | 3,878 | 3,811 | 3,745 |
| **JAP** | -25 | 0,758 | 0,770 | 0,783 | 0,796 | 0,809 | 0,821 | 0,834 | 0,847 | 0,859 | 0,872 | 0,885 | 0,898 |
| **R.U.** | 3 | 1,850 | 1,839 | 1,829 | 1,818 | 1,808 | 1,798 | 1,787 | 1,777 | 1,766 | 1,756 | 1,745 | 1,735 |
| **POR** | 277 | 7,113 | 6,990 | 6,868 | 6,746 | 6,624 | 6,501 | 6,379 | 6,257 | 6,134 | 6,012 | 5,890 | 5,768 |
| **GRE** | 478 | 13,144 | 12,894 | 12,643 | 12,393 | 12,142 | 11,891 | 11,641 | 11,390 | 11,139 | 10,889 | 10,638 | 10,388 |
| **CAN** | -1 | 1,810 | 1,801 | 1,791 | 1,782 | 1,772 | 1,763 | 1,753 | 1,743 | 1,734 | 1,724 | 1,715 | 1,705 |
| **AUS** | 74 | 4,232 | 4,171 | 4,110 | 4,049 | 3,988 | 3,927 | 3,866 | 3,805 | 3,744 | 3,684 | 3,623 | 3,562 |

- **Escenario s=5 (muy optimista).**

Fin de la actual crisis económica, simula que a finales de 2014 las primas de riesgo son las mismas que en Enero de 2007.

**Tabla 5.2.5.** Rentabilidades escenario 5.

| | PRIMA | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 0 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 | 1,360 |
| **ESP** | 4.2 | 5,176 | 5,012 | 4,848 | 4,684 | 4,520 | 4,356 | 4,191 | 4,027 | 3,863 | 3,699 | 3,535 | 3,371 |
| **EEUU** | 78 | 1,728 | 1,746 | 1,764 | 1,782 | 1,800 | 1,818 | 1,835 | 1,853 | 1,871 | 1,889 | 1,907 | 1,925 |
| **FRA** | 0.030 | 1,973 | 1,947 | 1,920 | 1,893 | 1,867 | 1,840 | 1,813 | 1,787 | 1,760 | 1,733 | 1,707 | 1,680 |
| **ITA** | 0.210 | 4,408 | 4,275 | 4,143 | 4,010 | 3,878 | 3,746 | 3,613 | 3,481 | 3,348 | 3,216 | 3,083 | 2,951 |
| **JAP** | -2.321 | 0,770 | 0,794 | 0,819 | 0,844 | 0,868 | 0,893 | 0,918 | 0,942 | 0,967 | 0,992 | 1,016 | 1,041 |
| **R.U.** | 0.900 | 1,840 | 1,819 | 1,799 | 1,778 | 1,758 | 1,737 | 1,717 | 1,696 | 1,676 | 1,655 | 1,635 | 1,615 |
| **POR** | 0.150 | 6,990 | 6,746 | 6,501 | 6,256 | 6,011 | 5,767 | 5,522 | 5,277 | 5,032 | 4,788 | 4,543 | 4,298 |
| **GRE** | 0.250 | 12,894 | 12,392 | 11,891 | 11,390 | 10,888 | 10,387 | 9,886 | 9,384 | 8,883 | 8,381 | 7,880 | 7,379 |
| **CAN** | 0.140 | 1,801 | 1,782 | 1,763 | 1,744 | 1,724 | 1,705 | 1,686 | 1,667 | 1,648 | 1,629 | 1,610 | 1,591 |
| **AUS** | 1.591 | 4,172 | 4,050 | 3,929 | 3,807 | 3,685 | 3,564 | 3,442 | 3,321 | 3,199 | 3,078 | 2,956 | 2,835 |

### 5.2.1 Escenario s=1

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,358*** | 0,029 | 0,053 | 0,262 | -0,051 | 0,041 | 0,484 | 0,991 | 0,038 | 0,242 |
| 0,000 | 0,029 | ***0,003*** | 0,005 | 0,023 | -0,004 | 0,004 | 0,043 | 0,087 | 0,003 | 0,021 |
| 0,000 | 0,053 | 0,005 | ***0,009*** | 0,042 | -0,008 | 0,007 | 0,078 | 0,159 | 0,006 | 0,039 |
| 0,000 | 0,262 | 0,023 | 0,042 | ***0,228*** | -0,040 | 0,033 | 0,387 | 0,792 | 0,030 | 0,193 |
| 0,000 | -0,051 | -0,004 | -0,008 | -0,040 | ***0,009*** | -0,006 | -0,075 | -0,153 | -0,006 | -0,037 |
| 0,000 | 0,041 | 0,004 | 0,007 | 0,033 | -0,006 | ***0,006*** | 0,061 | 0,124 | 0,005 | 0,030 |
| 0,000 | 0,484 | 0,043 | 0,078 | 0,387 | -0,075 | 0,061 | ***0,779*** | 1,463 | 0,056 | 0,357 |
| 0,000 | 0,991 | 0,087 | 0,159 | 0,792 | -0,153 | 0,124 | 1,463 | ***3,269*** | 0,115 | 0,731 |
| 0,000 | 0,038 | 0,003 | 0,006 | 0,030 | -0,006 | 0,005 | 0,056 | 0,115 | ***0,005*** | 0,028 |
| 0,000 | 0,242 | 0,021 | 0,039 | 0,193 | -0,037 | 0,030 | 0,357 | 0,731 | 0,028 | ***0,195*** |

M.C. 7. Matriz de covarianzas. Escenario 1.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 1,360 |
| ESPAÑA | 6,418 |
| EEUU | 1,805 |
| FRANCIA | 2,173 |
| ITALIA | 5,401 |
| JAPÓN | 0,578 |
| R. UNIDO | 1,995 |
| PORTUGAL | 8,826 |
| GRECIA | 16,654 |
| CANADÁ | 1,945 |
| AUSTRALIA | 5,089 |

Rend. mínimo: 0.578, correspondiente a bonos de Japón.

Rend. máximo: 16,654, correspondiente a bonos de Grecia.

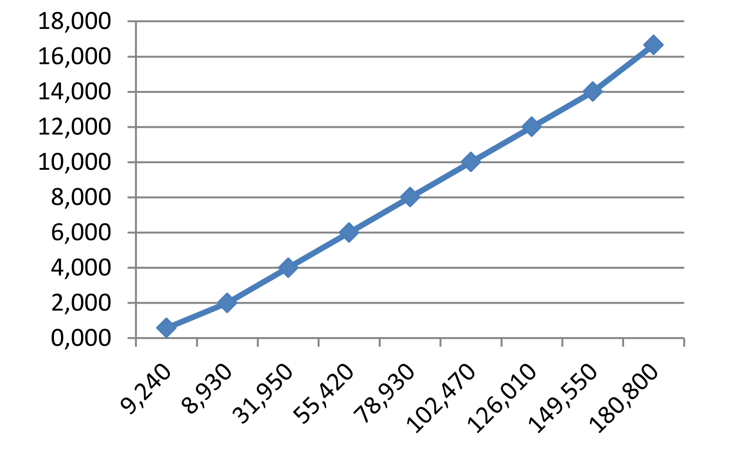
Promedio rentabilidades Escenario 1.

Resolviendo el modelo expuesto en (5.1.1.) para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (0.578 , 16,654)$, se obtienen las carteras eficientes, es decir, aquellas que para cada rentabilidad representan el mínimo riesgo asociado, o lo que es lo mismo, la frontera eficiente del escenario $s_1$.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 0.578 | 9.24 |
| 2.000 | 8.93 |
| 4.000 | 31.95 |
| 6.000 | 55.42 |
| 8.000 | 78.93 |
| 10.000 | 102.47 |
| 12.000 | 126.01 |
| 14.000 | 149.55 |
| 16.654 | 180.80 |

**Frontera eficiente para s=1**




Del conjunto de carteras eficientes para el escenario $s_1$, representadas en la figura anterior, se toma como cartera óptima del escenario aquella cuyo rendimiento esperado es igual a la media de los rendimientos esperados de todos los bonos en ese escenario, en este caso, el rendimiento medio de los bonos en el escenario $s_1$ y su riesgo asociado, resolviendo el modelo para este $\overline{r_1}$ son:

$$\overline{r_1} = \frac{\sum_{t=1}^{11} \mathrm{R}_{i1}}{11} = 4.750 \qquad \sigma_1 = 38{,}669$$

Todos estos datos junto con la cartera óptima correspondiente a este escenario se recogen al final del capítulo en la tabla 5.3.1.

### 5.2.2 Escenario s=2

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,089*** | 0,007 | 0,013 | 0,065 | -0,013 | 0,010 | 0,121 | 0,248 | 0,009 | 0,060 |
| 0,000 | 0,007 | ***0,001*** | 0,001 | 0,006 | -0,001 | 0,001 | 0,011 | 0,022 | 0,001 | 0,005 |
| 0,000 | 0,013 | 0,001 | ***0,002*** | 0,011 | -0,002 | 0,002 | 0,019 | 0,040 | 0,002 | 0,010 |
| 0,000 | 0,065 | 0,006 | 0,011 | ***0,057*** | -0,010 | 0,008 | 0,097 | 0,198 | 0,008 | 0,048 |
| 0,000 | -0,013 | -0,001 | -0,002 | -0,010 | ***0,002*** | -0,002 | -0,019 | -0,038 | -0,001 | -0,009 |
| 0,000 | 0,010 | 0,001 | 0,002 | 0,008 | -0,002 | ***0,001*** | 0,015 | 0,031 | 0,001 | 0,008 |
| 0,000 | 0,121 | 0,011 | 0,019 | 0,097 | -0,019 | 0,015 | ***0,195*** | 0,366 | 0,014 | 0,089 |
| 0,000 | 0,248 | 0,022 | 0,040 | 0,198 | -0,038 | 0,031 | 0,366 | ***0,817*** | 0,029 | 0,183 |
| 0,000 | 0,009 | 0,001 | 0,002 | 0,008 | -0,001 | 0,001 | 0,014 | 0,029 | ***0,001*** | 0,007 |
| 0,000 | 0,060 | 0,005 | 0,010 | 0,048 | -0,009 | 0,008 | 0,089 | 0,183 | 0,007 | ***0,049*** |

M.C. 8. Matriz de covarianzas. Escenario 2.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 1,360 |
| ESPAÑA | 5,879 |
| EEUU | 1,757 |
| FRANCIA | 2,087 |
| ITALIA | 4,971 |
| JAPÓN | 0,662 |
| R. UNIDO | 1,928 |
| PORTUGAL | 8,031 |
| GRECIA | 15,025 |
| CANADÁ | 1,882 |
| AUSTRALIA | 4,690 |

Promedio rentabilidades Escenario 2.

Rend. mínimo: 0.662, correspondiente a bonos de Japón.

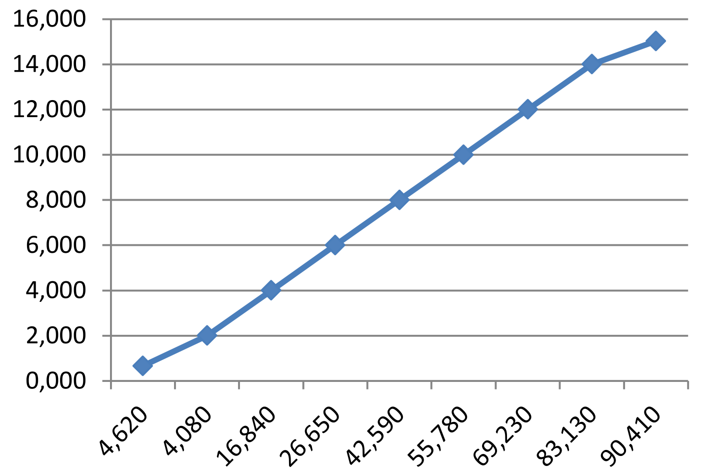
Rend. máximo: 15.025, correspondiente a bonos de Grecia.

Como en el caso anterior, resolviendo el modelo para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (0.662 , 15.025)$, se obtiene la frontera eficiente del escenario $s_2$.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 0.662 | 4.62 |
| 2.000 | 4.08 |
| 4.000 | 16.84 |
| 6.000 | 26.65 |
| 8.000 | 42.59 |
| 10.000 | 55.78 |
| 12.000 | 69.23 |
| 14.000 | 83.13 |
| 15.025 | 90.41 |

**Frontera eficiente para s=2**




De forma análoga al escenario anterior, se obtienen los siguientes datos:

$$\overline{r_2} = \frac{\sum_{t=1}^{11} \mathrm{R}_{i2}}{11} = 4.388 \quad \sigma_2 = 19.326$$

### 5.2.3 Escenario s=3

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 |
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | ***0,000*** |

M.C. 9. Matriz de covarianzas. Escenario 3.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 1,360 |
| ESPAÑA | 5,340 |
| EEUU | 1,710 |
| FRANCIA | 2,000 |
| ITALIA | 4,540 |
| JAPÓN | 0,744 |
| R. UNIDO | 1,860 |
| PORTUGAL | 7,236 |
| GRECIA | 13,396 |
| CANADÁ | 1,820 |
| AUSTRALIA | 4,292 |

Promedio rentabilidades Escenario 3.

Rend. mínimo: 0.744, correspondiente a bonos de Japón.

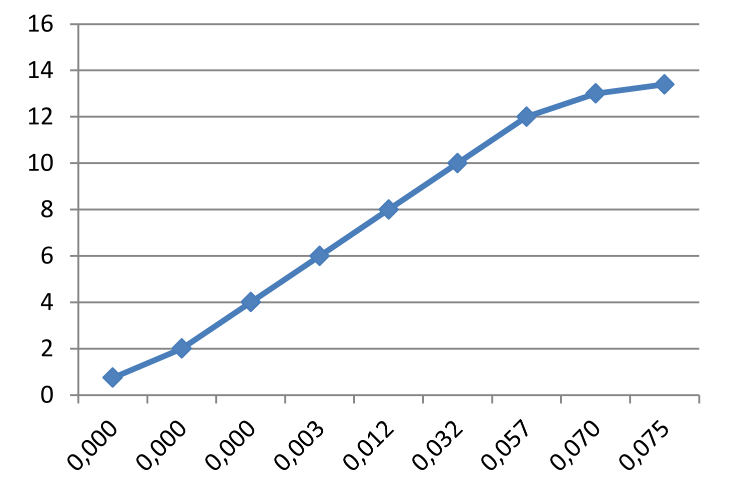
Rend. máximo: 13,396, correspondiente a bonos de Grecia.

De forma análoga al escenario anterior, se resuelve el modelo expuesto en (5.1.1.) para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (0.744\ ,\ 13{,}396)$, y se obtiene la frontera eficiente del escenario $s_3$.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 0,744 | 0,000 |
| 2,000 | 0,000 |
| 4,000 | 0,000 |
| 6,000 | 0,003 |
| 8,000 | 0,012 |
| 10,000 | 0,032 |
| 12,000 | 0,057 |
| 13,000 | 0,070 |
| 13,396 | 0,075 |

**Frontera eficiente para s=3**




De forma análoga al escenario anterior, se obtienen los siguientes datos:

$$\overline{r_3} = \frac{\sum_{t=1}^{11} \mathrm{R}_{i3}}{11} = 4{,}027 \qquad \sigma_3 = 2{,}5\ 10^{-5}$$

Todos estos datos junto con la cartera óptima correspondiente a este escenario se recogen al final del capítulo en la tabla 5.3.1.

### 5.2.4 Escenario s=4

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,089*** | 0,007 | 0,013 | 0,065 | -0,013 | 0,010 | 0,121 | 0,248 | 0,009 | 0,060 |
| 0,000 | 0,007 | ***0,001*** | 0,001 | 0,006 | -0,001 | 0,001 | 0,011 | 0,022 | 0,001 | 0,005 |
| 0,000 | 0,013 | 0,001 | ***0,002*** | 0,011 | -0,002 | 0,002 | 0,019 | 0,040 | 0,002 | 0,010 |
| 0,000 | 0,065 | 0,006 | 0,011 | ***0,057*** | -0,010 | 0,008 | 0,097 | 0,198 | 0,008 | 0,048 |
| 0,000 | -0,013 | -0,001 | -0,002 | -0,010 | ***0,002*** | -0,002 | -0,019 | -0,038 | -0,001 | -0,009 |
| 0,000 | 0,010 | 0,001 | 0,002 | 0,008 | -0,002 | ***0,001*** | 0,015 | 0,031 | 0,001 | 0,008 |
| 0,000 | 0,121 | 0,011 | 0,019 | 0,097 | -0,019 | 0,015 | ***0,194*** | 0,365 | 0,014 | 0,089 |
| 0,000 | 0,248 | 0,022 | 0,040 | 0,198 | -0,038 | 0,031 | 0,365 | ***0,817*** | 0,029 | 0,182 |
| 0,000 | 0,009 | 0,001 | 0,002 | 0,008 | -0,001 | 0,001 | 0,014 | 0,029 | ***0,001*** | 0,007 |
| 0,000 | 0,060 | 0,005 | 0,010 | 0,048 | -0,009 | 0,008 | 0,089 | 0,182 | 0,007 | ***0,048*** |

M.C. 10. Matriz de covarianzas. Escenario 4.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 1,360 |
| ESPAÑA | 4,801 |
| EEUU | 1,661 |
| FRANCIA | 1,913 |
| ITALIA | 4,109 |
| JAPÓN | 0,828 |
| R. UNIDO | 1,792 |
| PORTUGAL | 6,440 |
| GRECIA | 11,766 |
| CANADÁ | 1,758 |
| AUSTRALIA | 3,897 |

Rend. mínimo: 0.828, correspondiente a bonos de Japón.

Rend. máximo: 11.766, correspondiente a bonos de Grecia.

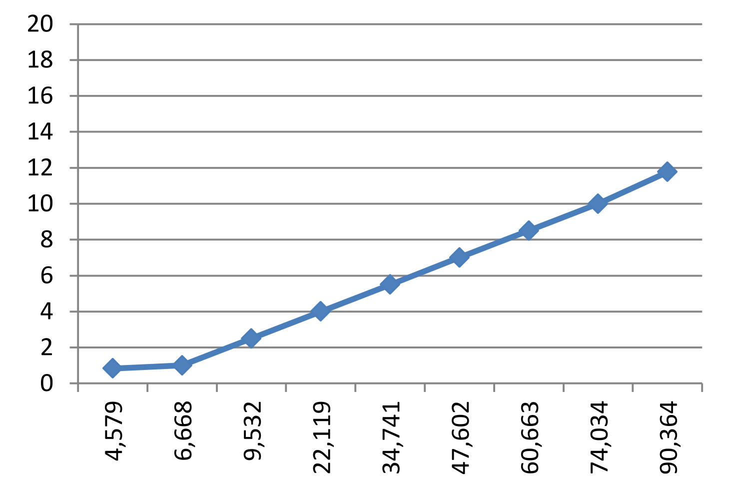
Promedio rentabilidades Escenario 4.

Resolviendo el modelo para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (0.828 , 11.766)$, se obtiene la frontera eficiente del escenario $s_4$.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---:|---:|
| 0,828 | 4,579 |
| 1,000 | 6,668 |
| 2,500 | 9,532 |
| 4,000 | 22,119 |
| 5,500 | 34,741 |
| 7,000 | 47,602 |
| 8,500 | 60,663 |
| 10,000 | 74,034 |
| 11,766 | 90,364 |

**Frontera eficiente para s=4**




De forma análoga, se obtienen los siguientes datos:

$$\overline{r_4} = \frac{\sum_{t=1}^{11} \mathrm{R}_{i4}}{11} = 3.666 \quad \sigma_4 = 19.313$$

### 5.2.5 Escenario s=5

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,350*** | -0,035 | 0,052 | 0,259 | -0,048 | 0,040 | 0,479 | 0,980 | 0,037 | 0,238 |
| 0,000 | -0,035 | ***0,004*** | -0,006 | -0,028 | 0,005 | -0,004 | -0,052 | -0,107 | -0,004 | -0,026 |
| 0,000 | 0,052 | -0,006 | ***0,009*** | 0,042 | -0,008 | 0,006 | 0,078 | 0,159 | 0,006 | 0,039 |
| 0,000 | 0,259 | -0,028 | 0,042 | ***0,228*** | -0,039 | 0,032 | 0,386 | 0,791 | 0,030 | 0,192 |
| 0,000 | -0,048 | 0,005 | -0,008 | -0,039 | ***0,008*** | -0,006 | -0,072 | -0,147 | -0,006 | -0,036 |
| 0,000 | 0,040 | -0,004 | 0,006 | 0,032 | -0,006 | ***0,005*** | 0,060 | 0,122 | 0,005 | 0,030 |
| 0,000 | 0,479 | -0,052 | 0,078 | 0,386 | -0,072 | 0,060 | ***0,779*** | 1,462 | 0,056 | 0,354 |
| 0,000 | 0,980 | -0,107 | 0,159 | 0,791 | -0,147 | 0,122 | 1,462 | ***3,268*** | 0,114 | 0,726 |
| 0,000 | 0,037 | -0,004 | 0,006 | 0,030 | -0,006 | 0,005 | 0,056 | 0,114 | ***0,005*** | 0,028 |
| 0,000 | 0,238 | -0,026 | 0,039 | 0,192 | -0,036 | 0,030 | 0,354 | 0,726 | 0,028 | ***0,192*** |

M.C. 11. Matriz de covarianzas. Escenario 5.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 1,360 |
| ESPAÑA | 4,273 |
| EEUU | 1,826 |
| FRANCIA | 1,827 |
| ITALIA | 3,679 |
| JAPÓN | 0,905 |
| R. UNIDO | 1,727 |
| PORTUGAL | 5,644 |
| GRECIA | 10,136 |
| CANADÁ | 1,696 |
| AUSTRALIA | 3,503 |

Promedio rentabilidades Escenario 5.

Rend. mínimo: 0.905, correspondiente a bonos de Japón.

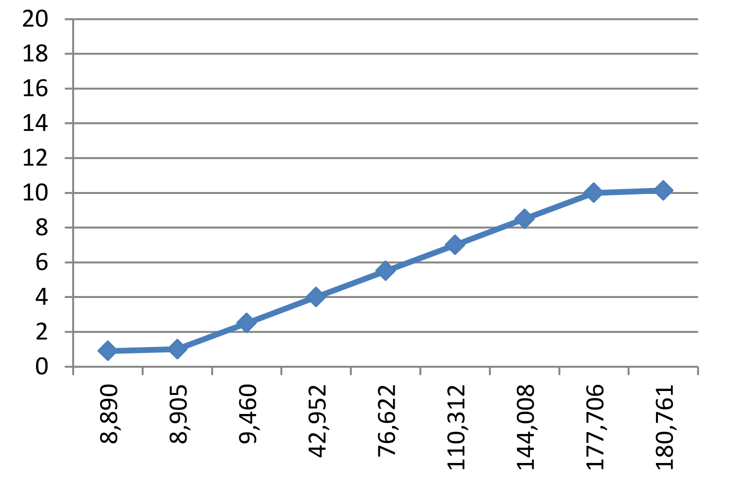
Rend. máximo: 10.136, correspondiente a bonos de Grecia.

Resolviendo el modelo para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (0.905 , 10.136)$ se obtiene la frontera eficiente del escenario $s_5$.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 0,905 | 8,890 |
| 1,000 | 8,905 |
| 2,500 | 9,460 |
| 4,000 | 42,952 |
| 5,500 | 76,622 |
| 7,000 | 110,312 |
| 8,500 | 144,008 |
| 10,000 | 177,706 |
| 10,136 | 180,761 |

**Frontera eficiente para s=5**




Por último en este escenario, se obtienen los siguientes datos:

$$\overline{r_5} = \frac{\sum_{t=1}^{11} \mathrm{R}_{i5}}{11} = 3.325 \quad \sigma_5 = 27.824$$

Como resumen, se recoge en la siguiente tabla los valores obtenidos para el rendimiento óptimo $r_S$, el capital a invertir $C_S$, el riesgo asociado $\sigma(x_s)$, la varianza correspondiente $L_S$ y la composición de la cartera óptima $[x_i]$, para cada uno de los S_escenarios:

**Tabla 5.2.5.1.** Carteras óptimas de cada escenario.

| | s1 | s2 | s3 | s4 | s5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_S$ | 4,75% | 4,39% | 4,03% | 3,67% | 3,33% |
| $C_S$ | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| $\sigma(x_s)$ | 38,669 | 19,326 | $2{,}5\ 10^{-5}$ | 19,313 | 27,824 |
| $L_S$ | 1495,280 | 373,479 | $6{,}3\ 10^{-10}$ | 372,998 | 774,174 |
| ALEMANIA | 0 | 0 | 15,931 | 0 | 0 |
| ESPAÑA | 12,191 | 12,325 | 36,911 | 11,438 | 0 |
| EEUU | 0 | 4,403 | 3,039 | 0 | 81,552 |
| FRANCIA | 14,964 | 14,762 | 0,000 | 18,398 | 0 |
| ITALIA | 14,934 | 14,64 | 35,589 | 14,382 | 0 |
| JAPÓN | 0 | 0 | 0,014 | 0 | 0 |
| R. UNIDO | 12,757 | 12,152 | 8,306 | 13,733 | 0 |
| PORTUGAL | 8,694 | 8,182 | 0,005 | 8,570 | 0,766 |
| GRECIA | 4,365 | 4,214 | 0,086 | 4,222 | 17,682 |
| CANADÁ | 17,377 | 12,445 | 0,000 | 12,205 | 0 |
| AUSTRALIA | 14,718 | 16,877 | 0,118 | 17,052 | 0 |

Se observa en los resultados obtenidos y recogidos en la tabla 5.2.5.1. como en los escenarios s1, s2 y s4, las carteras óptimas ofrecidas por el modelo presentas muy pequeñas variaciones de un escenario a otro. Únicamente en torno un 4% de aumento en la inversión en bonos de EEUU que aparece en la cartera del escenario s3, en detrimento de inversión en bonos canadienses. La explicación a esto se encuentra en el hecho de que la medición del riesgo realizada por el modelo se fundamenta, de acuerdo a la teoría de Markowitz, en la variabilidad de los datos de que se dispone, entre los bonos de un mismo país y de un país respecto al resto. La forma en la que se han desarrollado los escenarios, con un aumento o disminución en bloque para todos los países de la cartera, hace que las varianzas y covarianzas de un escenario a otro sufran pocos cambios, con lo que el modelo, a la hora de minimizar el riesgo, ofrezca como resultado carteras óptimas de inversión muy similares.

Llama la atención el caso del escenario s3, en este escenario se ha contemplado la posibilidad real de un mantenimiento de los tipos de interés, de las rentabilidades ofrecidas por los bonos a 10 años de los países de la cartera. Este mantenimiento de tipos, lleva a que tanto las varianzas de los bonos de un mismo país como las covarianzas de los bonos de un país respecto al resto sean cero, tal y como se refleja en la matriz de covarianzas de dicho escenario M.C. 11. Esta circunstancia hace que el modelo, de acuerdo a como queda reflejado en la frontera eficiente de este escenario, sea capaz de establecer una cartera de valores de riesgo muy pequeños para cualquier valor de rentabilidad que se considere. Al tomar como valor óptimo para el escenario la rentabilidad promedio del mismo, el modelo diversifica entre los diferentes países la cartera óptima, ya que en la función objetivo toma mucho más peso el término de la rentabilidad obtenida, frente al del riesgo, que como se acaba de comentar se mueve en valores mínimos.

### 5.2.6 Resultados para el modelo MM.

Una vez obtenidas las carteras óptimas para cada uno de los escenarios propuestos, estudiados de forma independiente, se procede a incoporar la información de que se dispone al modelo MM, el cuál proporcionará la composición de la cartera óptima de manera que se minimice el error coordinado respecto a cada uno de los escenarios.

#### 5.2.6.1 Equi-probabilidad de escenarios.

Se supondrán dos posibilidades en este estudio, en la primera se considera equi-probabilidad de concurrencia de todos los escenarios, es decir, que la probabilidad que se de cada uno de ellos sea del 20% o lo que es lo mismo $P_S = 0{,}20$.

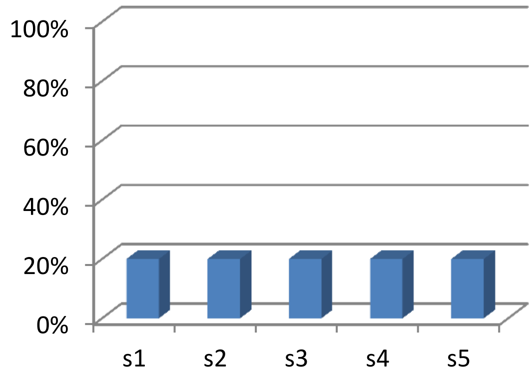



**Figura 19.** Equi-probabilidad de escenarios.

Se procede a partir de este punto a la resolución del modelo MM.

Como se expuso anteriormente en el punto 5.1. de este Proyecto, el modelo coordinado a resolver es el siguiente:

Min ε

s.a.

$P_s\, \varepsilon_s(x) \leq \varepsilon$ s =1,..., S (5.2.6.1.1.)

$C_{min}\left[1 - \frac{C_{min} - C_s}{C_{min}}\, y_s\right] \leq C(x)$ s =1,..., S-1 (5.2.6.1.2.)

$C_{max}\left[1 - \frac{C_{max} - C_{s+1}}{C_{max}}\, y_s\right] \geq C(x)$ s =1,..., S-1 (5.2.6.1.3.)

$L(x) \leq L(x_{s+1})\, y_s + L(x_S)\,(1 - y_s)$ s =1,..., S-1 (5.2.6.1.4.)

$1 \leq \sum_{s=1}^{S-1} y_s \leq 2$ (5.2.6.1.5.)

$\varepsilon, x \geq 0$ $y_s \in \{0,1\}$

Se utilizará como en el resto de resoluciones anteriores el complemento *"Solver"* de Excel. Se pasa ahora a describir como de ha definido este modelo en Excel.

En la Figura 20, para ayudar a la explicación, se adjunta captura de pantalla sobre la cual se basa la decripción del modelo.

**Figura 20.** Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios.

Las opciones empleadas en *"Solver"* son las que se adjuntan en la Figura 21. Parámetros de *Solver*. Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios.

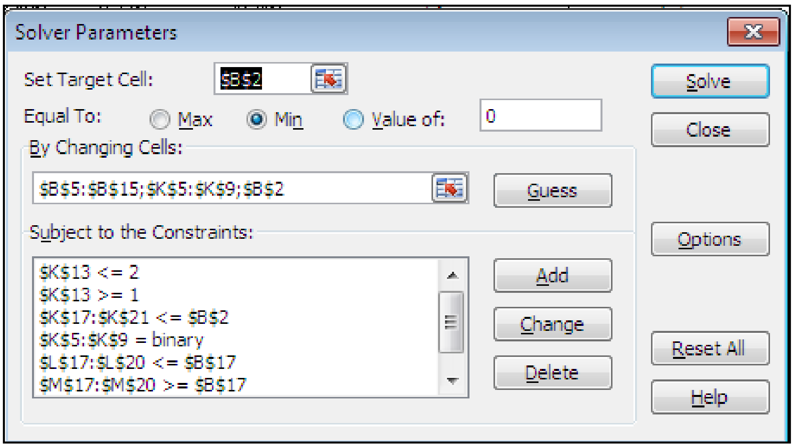



**Figura 21.** Parámetros de *Solver*. Modelo MM.

- Celda B2; esta celda dará el valor del máximo error producido entre todos los escenarios estudiados, en las opciones de *"Solver"* esta será la celda objetivo a minimizar, como puede observarse en la Figura 21, además, es también celda de valor variable para las iteraciones (*By changing cells*).

- Matriz [B5:B15]; celdas de valor variable en las iteraciones. Los términos de esta matriz son los pesos resultado dados por *"Solver"* y que compondrán la cartera óptima de inversión dada por el modelo.

- Matriz [J5:J8]; celdas de valor variable en las iteraciones. Darán el valor de las variables binarias $y_s$, definidas anteriormente. En las restricciones, como puede observarse en la Figura 20, se definen estas variables como binarias.

- Matriz [D5:G15]; rendimientos promedio del año de 2013 de los bonos de cada uno de los países de estudio en cada escenario.

- Matriz [K5:K8]; rendimientos de la cartera óptima en cada uno de los escenarios, que como se vio anteriormente corresponden al rendimiento promedio del escenario en cuestión.

- Matriz [M5:M8]; probabilidad de ocurrencia de cada escenario. En este caso de equi-probabilidad, se da un 25% a cada uno de los cuatro escenarios estudiados.

- Matriz [N5:N8]; error de cada uno de los escenarios estudiados para la solución dada por *"Solver"*, que según quedó definido en era, $\varepsilon_s(x) = \frac{rs\ \mathrm{Cs} - \sum_{i=1}^{n} r_i\, x_i}{rs\ \mathrm{Cs}}$

- Matriz [O5:O8]; varianza de la cartera óptima de cada uno de los escenarios.

- Matriz [J17:J20]; valores de los errores ponderados de cada uno de los escenarios estudiados, según se observa en la Figura 20, se introducen como restricción en *"Solver"*, y corresponden a la restricción (1) del modelo.

- Matriz [K17:K19] y Matriz [L17:L19]; valores obtenidos de aplicar las expresiones (2) y (3) respectivamente, y que se corresponden con las restricciones análogas del modelo introducidas como tales según puede observarse en la Figura 20.

- Celda E41; en esta celda se calcula el valor de la varianza de la solución dada por el modelo coordinado. Para el cálculo de su valor, dado por la expresión $\mathrm{L}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_j\, \sigma_{ij}$, se ha utilizado la matriz de covarianzas $\sigma_{ij}$, calculada con los valores de los rendimientos de los bonos en la cartera en el año 2012.

- Matriz [K17:K19]; valores obtenidos para cada escenario de aplicar la expresión (4), y que como puede observarse en la Figura 20, forman, junto con la celda E41, la restricción (5.2.6.1.4.) del modelo.

Una vez establecidos los valores de las celdas tal y como se acaba de definir, e introducidos las opciones de *"Solver"* de acuerdo a la Figura 21, se ejecuta el mismo obteniendo los siguientes resultados:

**Tabla 5.2.6.1.1.** Cartera coordinada del Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 14,009 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,649 |
| ITALIA | 2,061 |
| JAPÓN | 77,387 |
| R. UNIDO | 0,000 |
| PORTUGAL | 1,924 |
| GRECIA | 1,616 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 2,354 |
| C($x$) | 100 |
| $\sigma$ ($x$) | 19,316 |

Comparando la cartera coordinada óptima obtenida por el modelo MM con equi-probabilidad de escenarios con las carteras óptimas obtenidas para cada uno de ellos por separado:

**ESCENARIO 1**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 38,67 | 4,75% | 4,75 |
| $C_s$ Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i$ |
| | 100,00 | 19,32 | 2,03% | 2,03 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 57,24% | 11,45% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 19,33 | 4,39% | 4,39 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,96% | 1,96 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 55,35% | 11,07% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 0,00 | 4,03% | 4,03 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,89% | 1,89 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 53,15% | 10,63% |

**ESCENARIO 4**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 19,31 | 3,67% | 3,67 |
| $C_s$ Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,82% | 1,82 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 50,47% | 10,09% |

**ESCENARIO 5**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 27,82 | 3,33% | 3,33 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_i$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,74% | 1,74 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 47,62% | 9,52% |

**Figura 22.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario.

Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios.

De acuerdo a estos resultados se pueden obtener algunas conclusiones. Por un lado se observa como se cumplen todas las condiciones previstas por el modelo, manteniéndose los riesgos asociados a la cartera coordinada por debajo de los riesgos asociados a cada uno de los escenarios.

La restricción (5.2.6.1.1.) del modelo establece la minimización del error coordinado respecto a cada escenario, en este caso el máximo error coordinado, dado por la expresión:

$P_S\ \varepsilon_s(x) = P_S\ \frac{rs\ Cs - \sum_{i=1}^{n} r_i\ x_i}{rs\ Cs}$ se produce en el escenario 1, tomando un valor del 15,06 %.

El doble objetivo del análisis, trataba de minimizar el riesgo maximizando la rentabilidad, unido a la imposición marcada por la restricción (5.2.6.1.4.) del modelo, esto es:

$$L\ (x) \leq L(x_{s+1})\ y_s + L(x_s)\ (1 - y_s) \qquad \text{para s =1,..., S-1}$$

lleva a que el modelo tome como objetivo un riesgo coordinado que sea como máximo el menor riesgo de cada uno de los escenarios propuestos, en este caso el del escenario 4, dónde toma un valor de $\sigma$ = 19,31. Esto limita el rendimiento máximo obtenido por el modelo, que en el mejor de los casos, correspondería al escenario 1, dónde se obtendría un $r_1$ = 2,03 %, muy lejos de los 4,75 % que se obtienen con la cartera óptima para este escenario.

Otra conclusión importante que se puede extraer de los resultados obtenidos para la cartera óptima coordinada, es que se observa que el $x_i$ correspondiente a Japón se va hasta los 77 puntos. Esto es debido a que en la propia definición del modelo, al establecer como objetivo en el mismo el mínimo riesgo, el peso de Japón prevalece de acuerdo a los datos históricos, lo cual supone una merma importante en el rendimiento obtenido, ya que como es lógico y se ha ido viendo a lo largo de todo el Proyecto, los rendimientos aumentan al mismo tiempo que lo hace el riesgo asociado.

### 5.2.6.2 Distribución asimétrica de probabilidades.

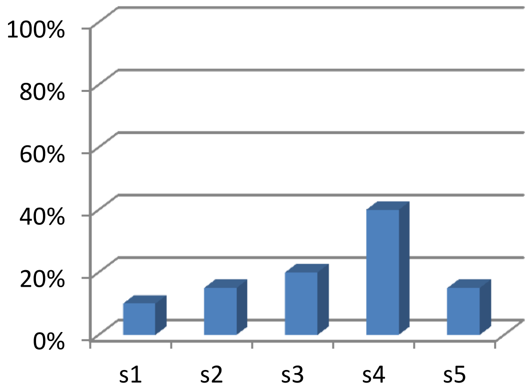



**Figura 23.** Distribución asimétrica de probabilidades

Con objeto ahora de llevar a cabo un análisis de sensibilidad ante distintas probabilidades de ocurrencia de escenarios, se ha analizado la influencia que tienen las probabilidades asignadas a cada escenario en la solución final que proporciona el modelo.

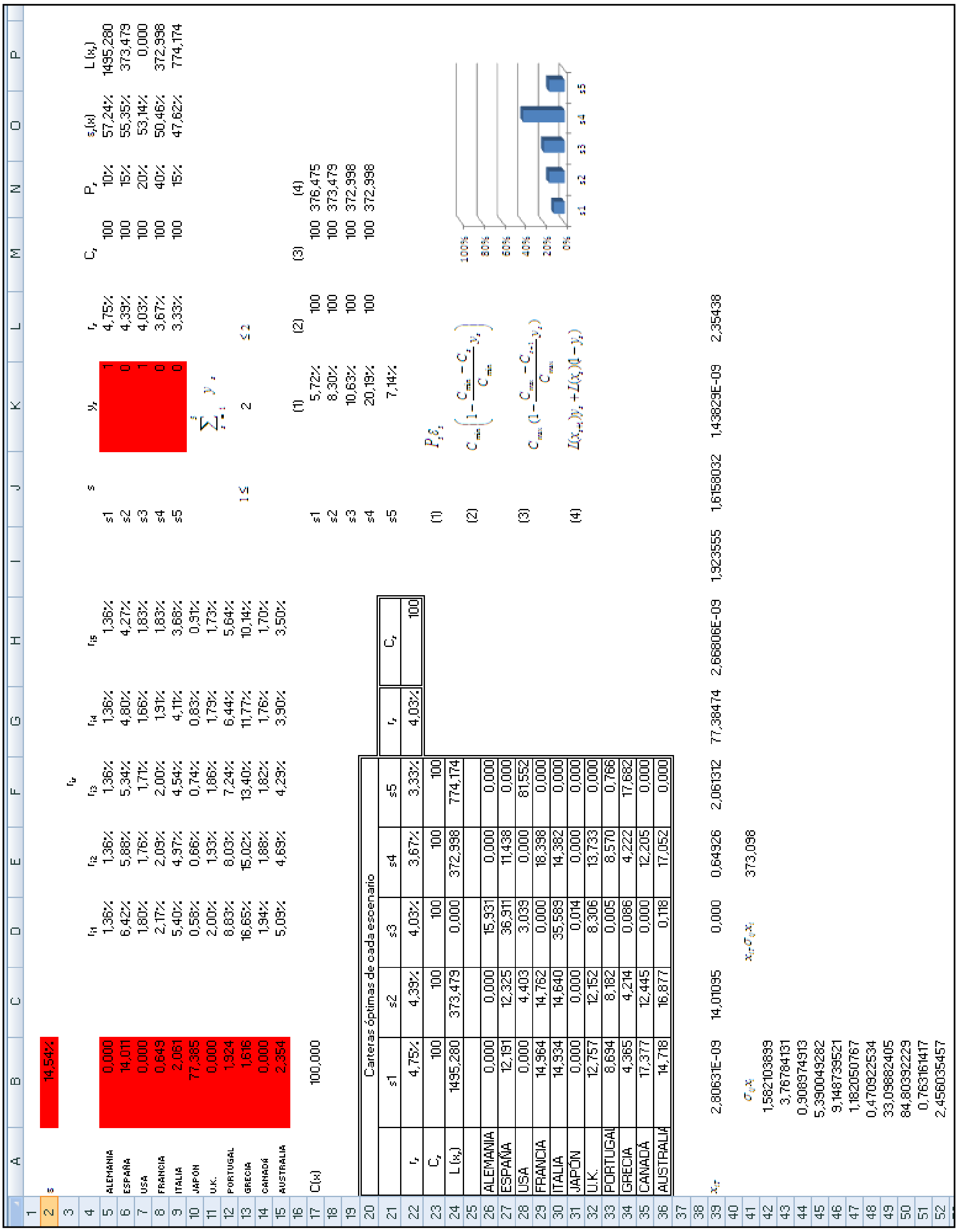
Para ello se considera otra distribución de probabilidades. Se resuelve el modelo MM teniendo en cuenta una distribución asimétrica. Intentando ser objetivos con la realidad actual, se da la siguiente distribución a la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los escenarios: $P_1$ = 10 %, $P_2$ = 15 %, $P_3$ = 20 %, $P_4$ = 40 %, $P_5$ = 15 %.

Lo que se pretende, dando mayor probabilidad a los escenarios centrales, es simular que la situación actual de la economía no va a variar en exceso en los próximos meses, y además, se da una probabilidad ligeramente mayor (40 – 20) a que de producirse esta variación sea en positivo, es decir, situación ligeramente optimista establecida por el escenario s=4.

Se analiza si esto mejora los resultados obtenidos por la cartera óptima en estos escenarios y que influencia tiene sobre el resto de escenarios.

El desarrollo en Excel y la configuración del mismo para la aplicación del complemento *"Solver"* son análogos a los del apartado anterior.

Se adjunta, en la Figura 24, captura de pantalla de la aplicación del modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades:



| s | 14,54% | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $r_{i1}$ | $r_{i2}$ | $r_{i3}$ | $r_{i4}$ | $r_{i5}$ |
| ALEMANIA | 0,000 | 1,36% | 1,36% | 1,36% | 1,36% | 1,36% |
| ESPAÑA | 14,011 | 6,42% | 5,88% | 5,34% | 4,80% | 4,27% |
| USA | 0,000 | 1,80% | 1,76% | 1,71% | 1,66% | 1,83% |
| FRANCIA | 0,649 | 2,17% | 2,09% | 2,00% | 1,91% | 1,83% |
| ITALIA | 2,061 | 5,40% | 4,97% | 4,54% | 4,11% | 3,68% |
| JAPÓN | 77,385 | 0,58% | 0,66% | 0,74% | 0,83% | 0,91% |
| U.K. | 0,000 | 2,00% | 1,93% | 1,86% | 1,79% | 1,73% |
| PORTUGAL | 1,924 | 8,83% | 8,03% | 7,24% | 6,44% | 5,64% |
| GRECIA | 1,616 | 16,65% | 15,02% | 13,40% | 11,77% | 10,14% |
| CANADÁ | 0,000 | 1,94% | 1,88% | 1,82% | 1,76% | 1,70% |
| AUSTRALIA | 2,354 | 5,09% | 4,69% | 4,29% | 3,90% | 3,50% |
| C(x) | 100,000 | | | | | |

| s | $y_s$ | $r_s$ | $C_s$ | $P_s$ | $s_s(x)$ | $L(x_s)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| s1 | 1 | 4,75% | 100 | 10% | 57,24% | 1495,280 |
| s2 | 0 | 4,39% | 100 | 15% | 55,35% | 373,479 |
| s3 | 1 | 4,03% | 100 | 20% | 53,14% | 0,000 |
| s4 | 0 | 3,67% | 100 | 40% | 50,46% | 372,998 |
| s5 | 0 | 3,33% | 100 | 15% | 47,62% | 774,174 |

$$1 \leq \sum_{s=1}^{5} y_s = 2 \leq 2$$

| | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| s1 | 5,72% | 100 | 100 | 376,475 |
| s2 | 8,30% | 100 | 100 | 373,479 |
| s3 | 10,63% | 100 | 100 | 372,998 |
| s4 | 20,19% | 100 | 100 | 372,998 |
| s5 | 7,14% | | | |

(1) $P_s \delta_s$

(2) $C_{min}\left(1-\frac{C_{min}-C_s}{C_{min}}y_s\right)$

(3) $C_{max}\left(1-\frac{C_{max}-C_{s+1}}{C_{max}}y_s\right)$

(4) $L(x_{s+1})y_s + L(x_s)(1-y_s)$



| Carteras óptimas de cada escenario | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | s1 | s2 | s3 | s4 | s5 | $r_s$ | $C_s$ |
| $r_s$ | 4,75% | 4,39% | 4,03% | 3,67% | 3,33% | 4,03% | 100 |
| $C_s$ | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | | |
| $L(x_s)$ | 1495,280 | 373,479 | 0,000 | 372,998 | 774,174 | | |
| ALEMANIA | 0,000 | 0,000 | 15,931 | 0,000 | 0,000 | | |
| ESPAÑA | 12,191 | 12,325 | 36,911 | 11,438 | 0,000 | | |
| USA | 0,000 | 4,403 | 3,039 | 0,000 | 81,552 | | |
| FRANCIA | 14,964 | 14,762 | 0,000 | 18,398 | 0,000 | | |
| ITALIA | 14,934 | 14,640 | 35,589 | 14,382 | 0,000 | | |
| JAPÓN | 0,000 | 0,000 | 0,014 | 0,000 | 0,000 | | |
| U.K. | 12,757 | 12,152 | 8,306 | 13,733 | 0,000 | | |
| PORTUGAL | 8,694 | 8,182 | 0,005 | 8,570 | 0,766 | | |
| GRECIA | 4,365 | 4,214 | 0,086 | 4,222 | 17,682 | | |
| CANADÁ | 17,377 | 12,445 | 0,000 | 12,205 | 0,000 | | |
| AUSTRALIA | 14,718 | 16,877 | 0,118 | 17,052 | 0,000 | | |

$x_{ir}$: 2,80631E-09 | 14,01095 | 0,000 | 0,64926 | 2,061312 | 77,38474 | 2,66806E-09 | 1,923555 | 1,6158032 | 1,43829E-09 | 2,35438

$\sigma_{ij}x_i$ | $x_{ir}\sigma_{ij}x_i$: 373,098

| $\sigma_{ij}x_i$ |
|---|
| 1,582103899 |
| 3,76784131 |
| 0,908974913 |
| 5,390049282 |
| 9,148739521 |
| 1,182050767 |
| 0,470922534 |
| 33,09882405 |
| 84,80392229 |
| 0,763161417 |
| 2,456035457 |

**Figura 24.** Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades.

Con todo ello, la composición de la cartera que proporciona el modelo MM es la que se muestra a continuación:

**Tabla 5.26.2.1.** Cartera coordinada del Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 14,011 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,649 |
| ITALIA | 2,061 |
| JAPÓN | 77,385 |
| R. UNIDO | 0,000 |
| PORTUGAL | 1,924 |
| GRECIA | 1,616 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 2,354 |
| $C(x)$ | 100 |
| $\sigma(x)$ | 19,316 |

Comparando los resultados obtenidos con el modelo MM en estas circustancias de distribución asimétrica de probabilidades con cada uno de los escenarios por separado, se obtiene:

**ESCENARIO 1**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 38,67 | 4,75% | 4,75 |
| $C_z$ Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,32 | 2,03% | 2,03 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 57,24% | 5,72% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 19,33 | 4,39% | 4,39 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,96% | 1,96 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 55,35% | 8,30% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 0,00 | 4,03% | 4,03 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,89% | 1,89 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 53,14% | 10,63% |

**ESCENARIO 4**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 19,31 | 3,67% | 3,67 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,82% | 1,82 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 50,46% | 20,19% |

**ESCENARIO 5**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 27,82 | 3,33% | 3,33 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,32 | 1,74% | 1,74 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 47,62% | 7,14% |

**Figura 25.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario. Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades.

Observando estos resultados, pocas conclusiones diferentes a las del caso anterior pueden destacarse. Siguen efectivamente cumpliéndose todas las restricciones marcadas por el modelo, y en la distribución de la cartera óptima, como en el caso anterior, sigue teniendo muchísimo peso los bonos japoneses (77 %), confirmándose con ello, que independientemente de la probabilidad de a uno u otro escenario, la estabilidad histórica de rentabilidad de los bonos de Japón, unido al objetivo principal del modelo de minimización del riesgo, hacen que siga manteniéndose al frente en la distribución de la cartera óptima coordinada.

Se mantendrá en la cartera coordinada lejos del óptimo de cada escenario, observándose errores coordinados que van desde el 47% del escenario s5 al 57% del escenario s1. En todos los escenarios la rentabilidad obtenida por la cartera coordinada apenas alcanza la mitad de la obtenida por la óptima de cada uno de ellos.

Se aprecia como los porcentajes de concurrencia dados a los distintos escenarios provocan variaciones en los errores ponderados de los mismos, disminuyéndo en los escenarios extremos y aumentando en el escenario s4, considerado en el estudio como el más probable. Comentar que el porcentaje de probabilidad de ocurrencia dado al escenario s3, un 20%, coincide con el contemplado en el caso de equiprobabilidad de escenarios, de ahí que no se produzcan variaciones con respecto a aquél caso en lo que a este escenario se refiere.

#### 5.2.6.3 Comparativa.

Comparando los resultados obtenidos para el modelo MM con igual o distinta distribución de probabilidad de concurrencia de los escenarios puede observarse:

En primer lugar, en cuanto a las carteras óptimas coordinadas dadas por el modelo para cada una de las condiciones de concurrencia de los escenarios, se observa poca variación en la asignación dada por la misma, debido sobre todo a lo comentado en el apartado anterior.

La principal conclusión se obtiene precisamente del hecho de la poca variación entre los resultados obtenidos en uno y otro caso, ya que esto es indicativo de una gran robustez por parte del modelo. Los resultados dados por el mismo como cartera óptima coordinada, no se ven influenciados por la distribución de probabilidad que se de a los distintos escenarios estudiados, lo cual es síntoma de que se está muy cerca de la solución óptima, y que variaciones en las perspectivas de futuro en cuanto a las rentabilidades de los bonos estudiados, no tienen practicamente ninguna influencia en los resultados arrojados por el modelo.

### 5.2.7 Resultados para el modelo MAD.

Continuando con el análisis, se procede ahora a desarrollar el segundo de los modelos coordinado expuestos, el modelo MAD el cuál busca minimizar el error medio, ponderado éste por la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los escenarios, es decir, minimizar el valor de $\varepsilon = \sum_{s=1}^{S} P_S \, |\varepsilon_S|$.

#### 5.2.7.1 Equi-probabilidad de escenarios.

Como en el modelo anterior, se comenzará el desarrollo del mismo con la equi-probabilidad de ocurrencia de los escenarios, P$s$=0,20.

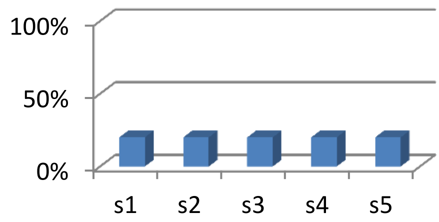



**Figura 26.** Equi-probabilidad de escenarios.

Según quedó expuesto en el apartado 5.1., el modelo MAD queda definido por:

$$\text{Min } \varepsilon = \sum_{s=1}^{S} P_S \, |\varepsilon_S|.$$

s.a.

| | | |
|---|---|---|
| $P_s \, \varepsilon_s(x) \leq \varepsilon$ | s =1,..., S | (5.2.7.1.1.) |
| $Cmin \left[1 - \frac{C_{min} - C_s}{C_{min}} \, y_s\right] \leq C(x)$ | s =1,..., S-1 | (5.2.7.1.2.) |
| $Cmax \left[1 - \frac{C_{max} - C_{s+1}}{C_{max}} \, y_s\right] \geq C(x)$ | s =1,..., S-1 | (5.2.7.1.3.) |
| $L(x) \leq L(xs+1)\, ys + L(x_S)\,(1 - ys)$ | s =1,..., S-1 | (5.2.7.1.4.) |
| $1 \leq \sum_{s=1}^{S-1} y_s \leq 2$ | | (5.2.7.1.5.) |

$\varepsilon, x \geq 0 \qquad y_s \in \{0,1\}$

Como en todos los casos, el modelo se resuelve utilizando el complemento *“Solver”* de Excel. A continuación en la Figura 27, se adjunta captura de pantalla del modelo MAD en el supuesto de equi – probabilidad de escenarios.

**Figura 27.** Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios.

Las opciones configuradas en *"Solver"* son las adjuntadas en la Figura 28.

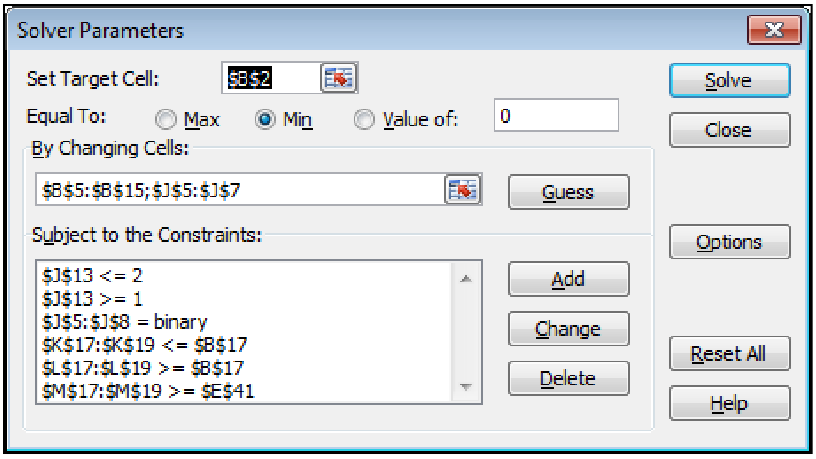



**Figura 28.** Parámetros de *Solver*. Modelo MAD.

Aunque la configuración de *"Solver"* en este caso es muy similar a los casos anteriores, si existen algunas diferencias que se detallan a continuación:

- **Celda B2;** esta celda tiene como valor la suma de los componentes de la matriz *[J17:J20]*, y está establecida en "*Solver*" como celda objetivo a minimizar, es decir, se minimiza el valor del error medio de la cartera, calculado éste como suma de los errores de cada escenario ponderados por la probabilidad de ocurrencia de dicho escenario. Esta celda en este modelo ya no es una celda de valor variable en las iteraciones.

Como ya se describió en el desarrollo del modelo, las restricciones del modelo MAD son las mismas que las desarrolladas para el modelo MM.

Una vez configurado Excel e introducidas las opciones de "*Solver*" tal y como se acaba de explicar, se ejecuta el complemento, obteniéndose los siguientes resultados:

**Tabla 5.2.7.1.1.** Cartera coordinada del Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 11,615 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,649 |
| ITALIA | 2,061 |
| JAPÓN | 79,719 |
| R. UNIDO | 0,000 |
| PORTUGAL | 1,924 |
| GRECIA | 1,677 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 2,354 |
| C(x) | 100 |
| $\sigma$ (x) | 19,313 |

Puede observarse como en la cartera óptima dada por el modelo MAD, se consigue una mayor diversificación de los bonos. Sin embargo los mayores pesos se siguen obteniendo para los mismos valores. Como se ha definido en la descripción del modelo MAD, éste busca minimizar la suma de los errores ponderados de los distintos escenarios. Tras las conclusiones obtenidas en el apartado anterior, se podía ya preveer cómo la distribución de probabilidades que se le da a los distintos escenarios apenas afecta a la cartera coordinada ofrecida por el modelo. En el caso del modelo MAD ahora considerado, esta variación, reflejada en pequeñas variaciones en los pesos asignados a algunos de los bonos, no afecta al grueso en sí de la cartera, que sigue estando copada por los bonos de los mismos países.

Cuando se compara esta cartera coordinada con las óptimas de cada uno de los escenarios propuestos ocurre lo mostrado a continuación:

**ESCENARIO 1**

| | Capital $C_z$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_z$ | Beneficio $r_z C_z$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | 100,00 | 38,67 | 4,75% | 4,75 |

| | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_z$ Cartera coordinada | 100,00 | 19,31 | 1,90% | 1,90 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 59,98% | 12,00% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital $C_z$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_z$ | Beneficio $r_z C_z$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | 100,00 | 19,33 | 4,39% | 4,39 |

| | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera coordinada | 100,00 | 19,31 | 1,84% | 1,84 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 58,00% | 11,60% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_z$ | Beneficio $r_z C_z$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | 100,00 | 0,00 | 4,03% | 4,03 |

| | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera coordinada | 100,00 | 19,31 | 1,78% | 1,78 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 55,69% | 11,14% |

**ESCENARIO 4**

| | Capital $C_z$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_z$ | Beneficio $r_z C_z$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | 100,00 | 19,31 | 3,67% | 3,67 |

| | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera coordinada | 100,00 | 19,31 | 1,73% | 1,73 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 52,88% | 10,58% |

**ESCENARIO 5**

| | Capital $C_z$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_z$ | Beneficio $r_z C_z$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | 100,00 | 27,82 | 3,33% | 3,33 |

| | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
|---|---|---|---|---|
| Cartera coordinada | 100,00 | 19,31 | 1,67% | 1,67 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 49,87% | 9,97% |

**Figura 29.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario. Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios.

De acuerdo a estos datos, se pueden obtener algunas conclusiones. Se observa que con respecto al modelo MM, los rendimientos en todos los escenarios expuestos son menores en este modelo. Así como ejemplo, en el caso del escenario s3, se tiene un rendimiento esperado de la cartera coordinada del modelo MAD del 1,78%, mientras que en este mismo escenario la cartera óptima coordinada ofrecida por el modelo MM era del 1,89%, lo mismo ocurre con los otros escenarios considenardos, así el s1 por ejemplo pasa de un rendimiento del 2.03% de la cartera óptima del modelo MM al 1,90% de la cartera óptima del modelo MAD. A esto hay que unir que si se observan los errores coordinados y se comparan con el modelo MM, se observa como estos aumentan también en todos los casos, pasando por ejemplo del 55.35% del escenario s2 en el modelo MM al 58% en el modelo MAD, o del 50,47% del s4 al 52,88% de este mismo escenario en el modelo MAD.

### 5.2.7.2 Distribución asimétrica de probabilidades.

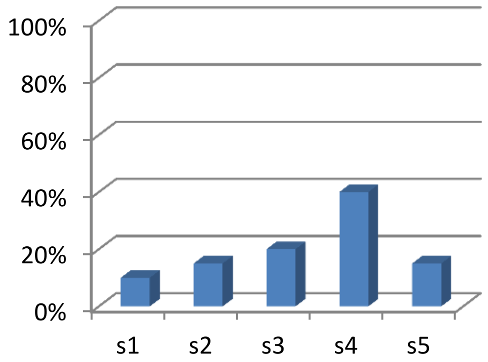



**Figura 30.** Distribución asimétrica de probabilidades.

Del mismo modo a como se hizo en el modelo anterior, a fin de llevar a cabo un análisis de su sensibilidad, se procede al estudio y desarrollo del mismo variando las probabilidades de ocurrencia de los escenarios.

Como ya se justificó anteriormente, se procede a dar una distribución asimétrica con los mismo porcentajes dados en el caso del modelo MM, esto es: $P_1$ = 10 %, $P_2$ = 15 %, $P_3$ = 20 %, $P_4$ = 40 %, $P_5$ = 15 %.

Del mismo modo, se comparan los resultados dados por la cartera óptima coordinada, observando si en ella se mejoran los valores de rendimiento y riesgo en el escenario s=4, al que se le ha dado mayor probabilidad de ocurrencia, y cómo esta redistribución de porcentajes afecta al resto.

El desarrollo en Excel y la configuración del mismo para la aplicación del complemento *“Solver”* son análogos a los del apartado anterior.

En la Figura 31, se representa captura de pantalla que recoge la resolución del modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades:

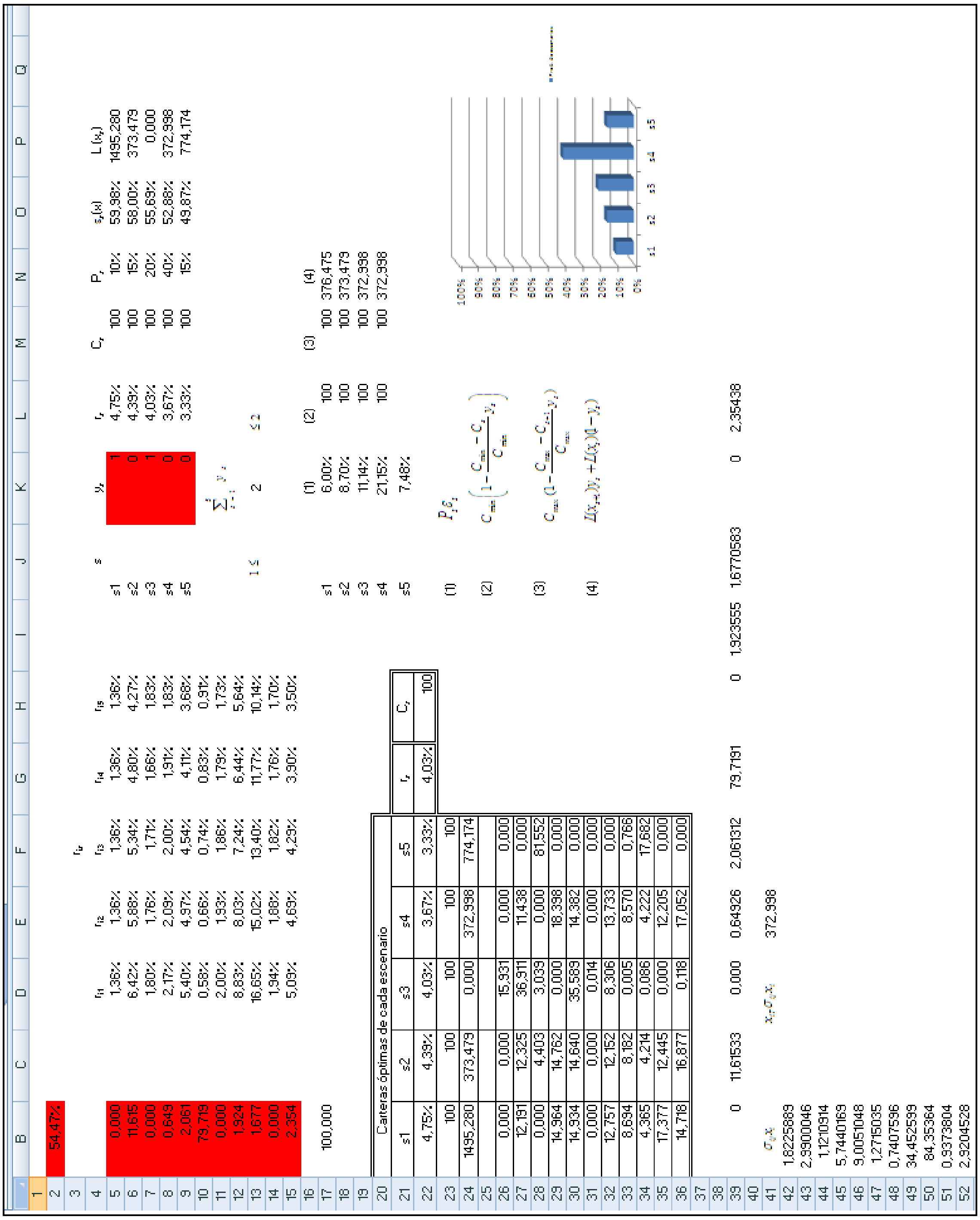


**Figura 31.** Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades.

Aplicado el modelo se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 5.2.7.2.1.** Cartera coordinada del Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 11,615 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,649 |
| ITALIA | 2,061 |
| JAPÓN | 79,719 |
| R. UNIDO | 0,000 |
| PORTUGAL | 1,924 |
| GRECIA | 1,677 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 2,354 |
| C($x$) | 100 |
| $\sigma$ ($x$) | 19,313 |

Lo primero que llama poderosamente la atención es que si en el caso del modelo MM, cuando se comparaban las carteras óptimas ofrecidas por el mismo en los casos de equi-probabilidad de concurrencia de escenarios con la ofrecida para el caso de distribución asimétrica de probabilidades, las variaciones en dichas carteras eran mínimas, y se comentaba entonces que esa escasa variación era debida a la robustez del propio modelo, en este caso, las variaciones no existen, el modelo MAD ofrece una cartera óptima que es independiente de la distribución de probabilidad de concurrencia de cada uno de los escenarios. El modelo, al minimizar la suma de los errores ponderados de los distintos escenarios, es capaz de dar como solución una cartera óptima que lo es para cualquier posibilidad de concurrencia de los distintos escenarios.

Como en todos los casos, se compara los resultados de la cartera coordinada con los obtenidos para cada uno de los escenarios por separado:

**ESCENARIO 1**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 38,67 | 4,75% | 4,75 |
| $C_z$ Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,31 | 1,90% | 1,90 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 59,98% | 6,00% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 19,33 | 4,39% | 4,39 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,31 | 1,84% | 1,84 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 58,00% | 8,70% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 0,00 | 4,03% | 4,03 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,31 | 1,78% | 1,78 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 55,69% | 11,14% |

**ESCENARIO 4**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 19,31 | 3,67% | 3,67 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,31 | 1,73% | 1,73 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 52,88% | 21,15% |

**ESCENARIO 5**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 27,82 | 3,33% | 3,33 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 19,31 | 1,67% | 1,67 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 49,87% | 7,48% |

**Figura 32.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario. Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades.

Debido a lo que se acaba de comentar tras la obtención de la cartera óptima dada por el modelo MAD en el caso de distribución asimétrica de probabilidades, el hecho de que las carteras óptimas en ambos casos sean iguales, y además, lo sea para cualquier otra distribución de probabilidad de ocurrencia que se le de a los escenarios, hace que en esta comparativa, los datos y errores cometidos por el modelo coordinado respecto a los escenarios planteados por separado no varíe. La única variación se aprecia, como es lógico, en los errores coordinados ponderados cometidos por la cartera óptima, y que se ven afectados por la ponderación de los mismos, ahora bien, la suma global de los errores ponderados de los cinco escenarios, como puede apreciarse en las capturas de pantalla dadas por las figuras 27 y 31, se mantiene entre los 55,28% calculado en el caso de distribución asimétrica de probabilidades y los 54,47% del caso de la distribución asimétrica de probabilidades. La diferencia, aunque mínima y de acuerdo a lo comentado, no debería existir, y sólo se explica en el hecho que de acuerdo a las opciones dadas al complemento "*Solver*", la precisión se ha establecido, a fin de conseguir la convergencia del mismo, en 0,1.

Sirven la comparación de los resultados obtenidos por el modelo MAD para los casos de igual o distinta distribución de probabilidad de ocurrencia en los escenarios estudiados para reafirmar, aún más, la robustez del modelo.

### 5.2.8 Comparativa modelos MM y MAD.

Como último punto de este primer enfoque, se desarrolla una comparativa de los modelos MM y MAD entre sí, primero en el caso de equi-probabilidad de escenarios y en segundo lugar para la distribución asimétrica de probabilidades.

Para ello, se definen una serie de conceptos que ayuden en dicha comparativa.

- Rendimiento global; Definido por la expresión $\sum_{s=1}^{5}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is}$ , indica el rendimiento obtenido por la cartera como suma de los rendimientos individuales de cada escenario para la cartera coordinada. Como los cuatro escenario no pueden desarrollarse de forma simultánea, se define:

- Rendimiento medio; Dado por la expresión $\sum_{s=1}^{5}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is} \Big/ 5$ , es el rendimiento medio, definido como el rendimiento global entre el número de escenarios, en este caso 5.

- Error ponderado máximo; $P_s\varepsilon_s(x)\max$ , error máximo de entre los cometidos en cada escenario, teniendo en cuenta la ponderación del mismo.

- Error ponderado mínimo: $P_s\varepsilon_s(x)\min$ , error mínimo de entre los cometidos en cada escenario, teniendo en cuenta la ponderación del mismo.

- Error ponderado global: $\sum_{s=1}^{5} P_s\left|\varepsilon_s(x)\right|$ , error global cometido por el modelo como suma del cometido en cada escenario, teniendo en cuenta la ponderación del mismo.

- Error ponderado medio: $\sum_{s=1}^{5} P_s\left|\varepsilon_s(x)\right| \Big/ 5$ , error medio como resultado del error global dividido entre el número de escenarios, 5.

- Índice de robustez del modelo: Definido por $\Re = 1 - \sum_{s=1}^{5} P_s\left|\varepsilon_s(x)\right| \Big/ 5$ , indicativo de la variación de la solución dada por el modelo respecto al óptimo.

Se procede al cálculo de todos estos coeficientes para ambos modelos, MM y MAD, en ambos casos de distribución de probabilidades de escenarios. En las tablas adjuntas se presentan los resultados obtenidos para todos los casos:

**Tabla 5.2.8.1.** Comparación de los modelos MM y MAD con equi-probabilidad de escenarios.

| | **MODELO MM** | **MODELO MAD** |
|---|---|---|
| | Min $\varepsilon$<br>s.a. $P_s\varepsilon_s(x) \leq \varepsilon$ | Min $\varepsilon = \sum_{s=1}^{S} P_s\lvert\varepsilon_s\rvert$ |
| $C(x)$ | 100,00 | 100,00 |
| $\sigma$ | 19,32 | 19,31 |
| $\sum_{s=1}^{5}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is}$ | 7,55 | 7,14 |
| $\sum_{s=1}^{5}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is} \Big/ 5$ | 1,51 | 1,43 |
| $\dfrac{\sum_{s=1}^{5}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is} \Big/ 5}{C(x)}$ | 1,51 % | 1,43 % |
| $P_s\varepsilon_s(x)\max$ | 11,45 % | 12,00 % |
| $P_s\varepsilon_s(x)\min$ | 9,52 % | 9,97 % |
| $P_s\varepsilon_s(x)\max - P_s\varepsilon_s(x)\min$ | 1,92 % | 2,02 % |
| $\sum_{s=1}^{5} P_s\varepsilon_s(x)$ | 52,76 % | 55,28 % |
| $\sum_{s=1}^{5} P_s\lvert\varepsilon_s(x)\rvert$ | 52,76 % | 55,28 % |
| $\sum_{s=1}^{5} P_s\lvert\varepsilon_s(x)\rvert \Big/ 5$ | 10,55 % | 11,06 % |
| $\Re = 1 - \sum_{s=1}^{5} P_s\lvert\varepsilon_s(x)\rvert \Big/ 5$ | 89,45 % | 88,94 % |

Comparando entre sí los dos modelos considerados, se pueden obtener varias conclusiones. En cuanto al riesgo asumido en la supuesta inversión en las carteras óptimas dadas por uno y otro, éste es prácticamente el mismo, 19,32 del modelo MM frente a 19,31 del modelo MAD, con lo que ambas carteras, de acuerdo a este parámetro son igual de aconsejables. Las diferencias empiezan a producirse en el resto de coeficientes. Así, en los rendimientos, tanto el el rendimiento global de la cartera óptima, obtenido como suma de los rendimientos de la inversión de esta cartera en cada escenario por separado, como en el rendimiento medio, es ligeramente superior en el caso de la cartera del modelo MM, 7,55 del global y 1,51 del medio frente al 7,14 y 1,43 respectivamente obtenidos para la cartera del modelo MAD. En cuanto a los errores, se observa que tanto el máximo error ponderado, como el mínimo cometido por la cartera del modelo MAD, es superior a los respectivos del modelo MM, siendo tanto el error ponderado global, 52,76% del MM frente al 55,28% del modelo MAD, como el error ponderado medio, 10,55% del modelo MM frente al 11,06% del modelo MAD, superiores en la cartera óptima dada por el modelo MAD frente a la del modelo MM. De acuerdo a estos aspectos comentados, la cartera óptima ofrecida por el modelo MM presenta mejores características que la dada por el modelo MAD, en este caso de equiprobabilidad de escenarios, lo cual se resume en el valor del coeficiente del índice de robustez del modelo, el cual toma un valor del 89,45% del modelo MM frente al 88,94% del modelo MAD.

El índice de robustez del modelo considerado está basado en la variación del beneficio esperado del proyecto de inversión respecto al óptimo de cada escenario. El índice de robustez expresa, por tanto, lo cerca que está cada uno de los dos modelos del modelo ideal. Un modelo coordinado ideal, cuya cartera coordinada tuviera un beneficio esperado en cada escenario igual al beneficio esperado de la cartera óptima de cada uno de ellos, tendría un índice de robustez igual a 1 (100%), ya que todos sus errores coordinados serían cero.

**Tabla 5.2.8.2.** Comparación de los modelos MM y MAD con distribución asimétrica de probabilidades

| | MODELO MM | MODELO MAD |
|---|---|---|
| | Min $\varepsilon$<br>s.a. $P_s \varepsilon_s(x) \leq \varepsilon$ | Min $\varepsilon = \sum_{s=1}^{S} P_s \lvert \varepsilon_s \rvert$ |
| $C(x)$ | 100,00 | 100,00 |
| $\sigma$ | 19,32 | 19,31 |
| $\sum_{s=1}^{5} \sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ | 7,55 | 7,14 |
| $\sum_{s=1}^{5} \sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is} \Big/ 5$ | 1,51 | 1,43 |
| $\dfrac{\sum_{s=1}^{5} \sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is} \Big/ 5}{C(x)}$ | 1,51 % | 1,43 % |
| $P_s \varepsilon_s(x) \max$ | 20,19 % | 21,15 % |
| $P_s \varepsilon_s(x) \min$ | 5,72 % | 6,00 % |
| $P_s \varepsilon_s(x) \max - P_s \varepsilon_s(x) \min$ | 14,46 % | 15,15 % |
| $\sum_{s=1}^{5} P_s \varepsilon_s(x)$ | 51,98 % | 54,47 % |
| $\sum_{s=1}^{5} P_s \lvert \varepsilon_s(x) \rvert$ | 51,98 % | 54,47 % |
| $\sum_{s=1}^{5} P_s \lvert \varepsilon_s(x) \rvert \Big/ 5$ | 10,40 % | 10,89 % |
| $\Re = 1 - \sum_{s=1}^{5} P_s \lvert \varepsilon_s(x) \rvert \Big/ 5$ | 89,60 % | 89,11 % |

Analizando la tabla anterior 5.2.8.2., se constata lo que anteriormente se ha comentado en este capítulo, la cartera óptima dada por el modelo MAD no se ve afectada por la distribución de probabilidades de concurrencia dada a cada uno de los cinco escenarios considerados. Así, todos los coeficientes calculados, rendimientos globales y medios, así como los errores ponderados, tanto globales como medios, son los mismos que en el caso de equi-probabilidad de escenarios. Para el modelo MM, los errores ponderados cometidos, tanto globales como medios, son ligeramente inferiores en el caso de la distribución asimétrica de probabilidades, teniendo en cuenta que en ella, el porcentaje que más se ha aumentado es el dado al escenario 4, indica que con ello se ha producido un desplazamiento de la solución dado por el modelo acercándose al óptimo, lo cual se constata en el valor del índice de robustez del modelo MM en este caso que es del 89,60% frente al 89,45% que se obtenía en el caso de equi-probabilidad de escenarios.

## 5.3 Enfoque 2: Evolución por zonas.

De acuerdo a lo comentado anteriormente, se comienza a desarrollar este segundo enfoque planteando una distribución de los países que componen la cartera de inversión en las siguientes tres zonas geográficas diferentes:

- Europa Norte/Centro: Alemania, Francia, Reino Unido.
- Europa Sur: España, Italia, Portugal, Grecia.
- Resto Mundo: USA., Japón, Canadá, Australia.

Una vez creadas estas tres zonas, se procede a calcular la evolución teórica que se produciría en la rentabilidad de sus bonos a largo plazo durante el año 2012, si se produjera un aumento de la prima de un 40%, de un 30% o de un 20% partiendo de los datos históricos las primas de riesgos, a 1 de Enero de 2012, recogidos en la tabla 5.3.1. eran las siguientes:

**Tabla 5.3.1.** Primas de riesgo. Enero 2012.

| | ALE | ESP | EEUU | FRA | ITA | JAP | R.U. | POR | GRE | CAN | AUS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **PRIMA** | 0 | 349,5 | -1 | 113 | 480 | -99,6 | 13 | 1107 | 1913 | -5 | 293,4 |

Bajo estas premisas, se procede a generar una progresión de los intereses durante 2012 de forma que la prima de riesgo a finales de dicho año sufra la evolución descrita para cada una de las zonas definidas:

1. Zona Europa Norte/Centro:

Condición 1.1.: Aumento prima 40%.

**Tabla 5.3.2.** Condición 1.1. Aumento prima 40%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ALE | 0 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 0,00 |
| FRA | 113 | 3,18 | 3,22 | 3,25 | 3,29 | 3,33 | 3,37 | 3,40 | 3,44 | 3,48 | 3,52 | 3,55 | 3,59 | 158,2 |
| R.U. | 13 | 2,14 | 2,15 | 2,15 | 2,16 | 2,16 | 2,17 | 2,17 | 2,17 | 2,18 | 2,18 | 2,19 | 2,19 | 18,20 |

Condición 1.2.: Aumento prima 30%.

**Tabla 5.3.3.** Condición 1.2. Aumento prima 30%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ALE | 0 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 0,00 |
| FRA | 113 | 3,17 | 3,20 | 3,22 | 3,25 | 3,28 | 3,31 | 3,34 | 3,37 | 3,39 | 3,42 | 3,45 | 3,48 | 146,9 |
| R.U. | 13 | 2,14 | 2,15 | 2,15 | 2,15 | 2,16 | 2,16 | 2,16 | 2,17 | 2,17 | 2,17 | 2,18 | 2,18 | 16,90 |

Condición 1.3.: Aumento prima 20%.

**Tabla 5.3.4.** Condición 1.3. Aumento prima 20%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ALE | 0 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 2,01 | 0,00 |
| FRA | 113 | 3,16 | 3,18 | 3,20 | 3,22 | 3,23 | 3,25 | 3,27 | 3,29 | 3,31 | 3,33 | 3,35 | 3,37 | 135,6 |
| R.U. | 13 | 2,14 | 2,14 | 2,15 | 2,15 | 2,15 | 2,15 | 2,16 | 2,16 | 2,16 | 2,16 | 2,16 | 2,17 | 15,60 |

2. Zona Europa Sur:

Condición 2.1.: Aumento prima 40%.

**Tabla 5.3.5.** Condición 2.1. Aumento prima 40%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ESP | 349,5 | 5,62 | 5,74 | 5,85 | 5,97 | 6,09 | 6,20 | 6,32 | 6,44 | 6,55 | 6,67 | 6,79 | 6,90 | 489,3 |
| ITA | 480,0 | 6,97 | 7,13 | 7,29 | 7,45 | 7,61 | 7,77 | 7,93 | 8,09 | 8,25 | 8,41 | 8,57 | 8,73 | 672,0 |
| POR | 1107,0 | 13,45 | 13,82 | 14,19 | 14,56 | 14,93 | 15,29 | 15,66 | 16,03 | 16,40 | 16,77 | 17,14 | 17,51 | 1549,8 |
| GRE | 1913,0 | 21,78 | 22,42 | 23,05 | 23,69 | 24,33 | 24,97 | 25,60 | 26,24 | 26,88 | 27,52 | 28,15 | 28,79 | 2678,2 |

Condición 2.2.: Aumento prima 30%.

**Tabla 5.3.6.** Condición 2.2. Aumento prima 30%

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ESP | 349,5 | 5,59 | 5,68 | 5,77 | 5,85 | 5,94 | 6,03 | 6,12 | 6,20 | 6,29 | 6,38 | 6,47 | 6,55 | 454,3 |
| ITA | 480,0 | 6,93 | 7,05 | 7,17 | 7,29 | 7,41 | 7,53 | 7,65 | 7,77 | 7,89 | 8,01 | 8,13 | 8,25 | 624,0 |
| POR | 1107,0 | 13,36 | 13,63 | 13,91 | 14,19 | 14,46 | 14,74 | 15,02 | 15,29 | 15,57 | 15,85 | 16,12 | 16,40 | 1439,1 |
| GRE | 1913,0 | 21,62 | 22,10 | 22,57 | 23,05 | 23,53 | 24,01 | 24,49 | 24,97 | 25,44 | 25,92 | 26,40 | 26,88 | 2486,9 |

Condición 2.3.: Aumento prima 20%.

**Tabla 5.3.7.** Condición 2.3. Aumento prima 20%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ESP | 349,5 | 5,56 | 5,62 | 5,68 | 5,74 | 5,80 | 5,85 | 5,91 | 5,97 | 6,03 | 6,09 | 6,15 | 6,20 | 419,4 |
| ITA | 480,0 | 6,89 | 6,97 | 7,05 | 7,13 | 7,21 | 7,29 | 7,37 | 7,45 | 7,53 | 7,61 | 7,69 | 7,77 | 576,0 |
| POR | 1107,0 | 13,26 | 13,45 | 13,63 | 13,82 | 14,00 | 14,19 | 14,37 | 14,56 | 14,74 | 14,93 | 15,11 | 15,29 | 1328,4 |
| GRE | 1913,0 | 21,46 | 21,78 | 22,10 | 22,42 | 22,73 | 23,05 | 23,37 | 23,69 | 24,01 | 24,33 | 24,65 | 24,97 | 2295,6 |

## 3. Zona Resto Mundo:

### Condición 3.1.: Aumento prima 40%.

**Tabla 5.3.8.** Condición 3.1. Aumento prima 40%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EEUU | -1,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | -0,60 |
| JAP | -99,60 | 1,05 | 1,08 | 1,11 | 1,15 | 1,18 | 1,21 | 1,25 | 1,28 | 1,31 | 1,35 | 1,38 | 1,41 | -59,76 |
| CAN | -5,00 | 1,96 | 1,96 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,98 | 1,98 | 1,98 | 1,98 | -3,00 |
| AUS | 293,4 | 5,04 | 5,14 | 5,24 | 5,34 | 5,43 | 5,53 | 5,63 | 5,73 | 5,82 | 5,92 | 6,02 | 6,12 | 410,7 |

### Condición 3.2.: Aumento prima 30%.

**Tabla 5.3.9.** Condición 3.2. Aumento prima 30%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EEUU | -1,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,01 | -0,50 |
| JAP | -99,60 | 1,06 | 1,10 | 1,14 | 1,18 | 1,22 | 1,26 | 1,30 | 1,35 | 1,39 | 1,43 | 1,47 | 1,51 | -49,80 |
| CAN | -5,00 | 1,96 | 1,96 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,98 | 1,98 | 1,98 | 1,98 | 1,99 | -2,50 |
| AUS | 293,4 | 5,07 | 5,19 | 5,31 | 5,43 | 5,56 | 5,68 | 5,80 | 5,92 | 6,04 | 6,17 | 6,29 | 6,41 | 440,1 |

### Condición 3.3.: Aumento prima 20%.

**Tabla 5.3.10.** Condición 3.3. Aumento prima 20%.

| | PRIMA Dic'11 | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 | PRIMA Dic'12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EEUU | -1,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | -0,70 |
| JAP | -99,60 | 1,04 | 1,06 | 1,09 | 1,11 | 1,14 | 1,16 | 1,19 | 1,21 | 1,24 | 1,26 | 1,29 | 1,31 | -69,72 |
| CAN | -5,00 | 1,96 | 1,96 | 1,96 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,97 | 1,98 | -3,50 |
| AUS | 293,4 | 5,02 | 5,09 | 5,16 | 5,24 | 5,31 | 5,38 | 5,46 | 5,53 | 5,60 | 5,68 | 5,75 | 5,82 | 381,42 |

A partir de aquí, se procede a la generación de hasta tres escenarios posibles. Como se comentó en el apartado 5.1, una vez establecidas las rentabilidades del año 2012 de los bonos a 10 años de cada país de acuerdo a las distintas condiciones de evolución de la prima, se procede a generar los escenarios como suma de distintas combinaciones de ambas.

### 5.3.1 Escenario es=1.

Se construye este escenario con la combinación:

Condición 1.1 + Condición 2.2. + Condición 3.3.

De acuerdo a esta combinación, la evolución de rentabilidades de los países de la cartera a lo largo de 2012 sería la siguiente:

**Tabla 5.3.1.1.** Rentabilidades escenario es=1.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 |
| **ESP** | 5,592 | 5,680 | 5,767 | 5,855 | 5,942 | 6,029 | 6,117 | 6,204 | 6,291 | 6,379 | 6,466 | 6,554 |
| **EEUU** | 2,000 | 2,000 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,002 | 2,002 | 2,002 | 2,002 |
| **FRA** | 3,178 | 3,215 | 3,253 | 3,291 | 3,328 | 3,366 | 3,404 | 3,441 | 3,479 | 3,517 | 3,554 | 3,592 |
| **ITA** | 6,930 | 7,050 | 7,170 | 7,290 | 7,410 | 7,530 | 7,650 | 7,770 | 7,890 | 8,010 | 8,130 | 8,250 |
| **JAP** | 1,031 | 1,047 | 1,064 | 1,080 | 1,097 | 1,114 | 1,130 | 1,147 | 1,163 | 1,180 | 1,197 | 1,213 |
| **R.U.** | 2,144 | 2,149 | 2,153 | 2,157 | 2,162 | 2,166 | 2,170 | 2,175 | 2,179 | 2,183 | 2,188 | 2,192 |
| **POR** | 13,357 | 13,634 | 13,910 | 14,187 | 14,464 | 14,741 | 15,017 | 15,294 | 15,571 | 15,848 | 16,124 | 16,401 |
| **GRE** | 21,618 | 22,097 | 22,575 | 23,053 | 23,531 | 24,010 | 24,488 | 24,966 | 25,444 | 25,923 | 26,401 | 26,879 |
| **CAN** | 1,961 | 1,962 | 1,963 | 1,963 | 1,964 | 1,965 | 1,966 | 1,967 | 1,968 | 1,968 | 1,969 | 1,970 |
| **AUS** | 4,993 | 5,042 | 5,091 | 5,140 | 5,189 | 5,237 | 5,286 | 5,335 | 5,384 | 5,433 | 5,482 | 5,531 |

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,099*** | 0,000 | 0,039 | 0,125 | 0,017 | 0,005 | 0,288 | 0,498 | 0,001 | 0,051 |
| 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,039 | 0,000 | ***0,018*** | 0,054 | 0,007 | 0,002 | 0,124 | 0,215 | 0,000 | 0,022 |
| 0,000 | 0,125 | 0,000 | 0,054 | ***0,187*** | 0,024 | 0,006 | 0,396 | 0,684 | 0,001 | 0,070 |
| 0,000 | 0,017 | 0,000 | 0,007 | 0,024 | ***0,004*** | 0,001 | 0,055 | 0,095 | 0,000 | 0,010 |
| 0,000 | 0,005 | 0,000 | 0,002 | 0,006 | 0,001 | ***0,000*** | 0,014 | 0,025 | 0,000 | 0,003 |
| 0,000 | 0,288 | 0,001 | 0,124 | 0,396 | 0,055 | 0,014 | ***0,996*** | 1,577 | 0,003 | 0,161 |
| 0,000 | 0,498 | 0,001 | 0,215 | 0,684 | 0,095 | 0,025 | 1,577 | ***2,973*** | 0,005 | 0,279 |
| 0,000 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,003 | 0,005 | ***0,000*** | 0,000 |
| 0,000 | 0,051 | 0,000 | 0,022 | 0,070 | 0,010 | 0,003 | 0,161 | 0,279 | 0,000 | ***0,031*** |

M.C. 12. Matriz de covarianzas. Escenario es=1.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 2,010 |
| ESPAÑA | 6,073 |
| EEUU | 2,001 |
| FRANCIA | 3,385 |
| ITALIA | 7,590 |
| JAPÓN | 1,122 |
| R. UNIDO | 2,168 |
| PORTUGAL | 14,879 |
| GRECIA | 24,249 |
| CANADÁ | 1,965 |
| AUSTRALIA | 5,262 |

Rend. mínimo: 1.122, correspondiente a bonos de Japón.

Rend. máximo: 24.249, correspondiente a bonos de Grecia.

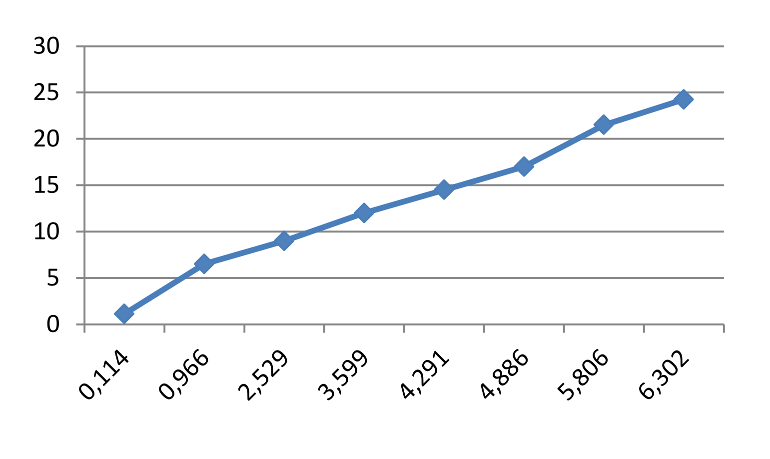
Promedio rentabilidades
Escenario es=1.

Resolviendo el modelo expuesto en (5.2.1.) para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (1.122\ , 24.249)$, se obtiene la frontera eficiente del escenario es=1.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 1.122 | 0.114 |
| 6.500 | 0.966 |
| 9.000 | 2.529 |
| 12.000 | 3.599 |
| 14.500 | 4.291 |
| 17.000 | 4.886 |
| 21.500 | 5.806 |
| 24.249 | 6.302 |

**Frontera eficiente para es=1**




Del conjunto de carteras eficientes para el escenario es=1, representadas en la figura anterior, se toma como cartera óptima del escenario aquella cuyo rendimiento esperado es igual a la media de los rendimientos esperados de todos los bonos en ese escenario, en este caso, el rendimiento medio de los bonos en el escenario es=1 y su riesgo asociado, resolviendo el modelo para este $\overline{r_1}$ son:

$$\overline{r_1} = \frac{\sum_{t=1}^{11} R_{i1}}{11} = 6.428 \qquad \sigma_1 = 0.881$$

Todos estos datos junto con la cartera óptima correspondiente a este escenario se recogen al final del capítulo en la Tabla 5.3.3.2.

### 5.3.2 Escenario es=2.

Se construye este escenario con la combinación:

Condición 1.3 + Condición 2.3. + Condición 3.1.

De acuerdo a esta combinación, la evolución de rentabilidades de los países de la cartera a lo largo de 2012 sería la siguiente:

**Tabla 5.3.2.1.** Rentabilidades escenario es=2.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 |
| **ESP** | 5,563 | 5,622 | 5,680 | 5,738 | 5,796 | 5,855 | 5,913 | 5,971 | 6,029 | 6,088 | 6,146 | 6,204 |
| **EEUU** | 2,000 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,002 | 2,002 | 2,002 | 2,003 | 2,003 | 2,003 | 2,004 | 2,004 |
| **FRA** | 3,159 | 3,178 | 3,197 | 3,215 | 3,234 | 3,253 | 3,272 | 3,291 | 3,310 | 3,328 | 3,347 | 3,366 |
| **ITA** | 6,890 | 6,970 | 7,050 | 7,130 | 7,210 | 7,290 | 7,370 | 7,450 | 7,530 | 7,610 | 7,690 | 7,770 |
| **JAP** | 1,047 | 1,080 | 1,114 | 1,147 | 1,180 | 1,213 | 1,246 | 1,280 | 1,313 | 1,346 | 1,379 | 1,412 |
| **R.U.** | 2,142 | 2,144 | 2,147 | 2,149 | 2,151 | 2,153 | 2,155 | 2,157 | 2,160 | 2,162 | 2,164 | 2,166 |
| **POR** | 13,265 | 13,449 | 13,634 | 13,818 | 14,003 | 14,187 | 14,372 | 14,556 | 14,741 | 14,925 | 15,110 | 15,294 |
| **GRE** | 21,459 | 21,778 | 22,097 | 22,415 | 22,734 | 23,053 | 23,372 | 23,691 | 24,010 | 24,328 | 24,647 | 24,966 |
| **CAN** | 1,962 | 1,963 | 1,965 | 1,967 | 1,968 | 1,970 | 1,972 | 1,973 | 1,975 | 1,977 | 1,978 | 1,980 |
| **AUS** | 5,042 | 5,140 | 5,237 | 5,335 | 5,433 | 5,531 | 5,629 | 5,726 | 5,824 | 5,922 | 6,020 | 6,118 |

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a sus rendimientos sería:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,044*** | 0,000 | 0,013 | 0,056 | 0,023 | 0,002 | 0,128 | 0,221 | 0,001 | 0,068 |
| 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,013 | 0,000 | ***0,005*** | 0,018 | 0,007 | 0,000 | 0,041 | 0,072 | 0,000 | 0,022 |
| 0,000 | 0,056 | 0,000 | 0,018 | ***0,083*** | 0,032 | 0,002 | 0,176 | 0,304 | 0,002 | 0,093 |
| 0,000 | 0,023 | 0,000 | 0,007 | 0,032 | ***0,014*** | 0,001 | 0,073 | 0,126 | 0,001 | 0,039 |
| 0,000 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,002 | 0,001 | ***0,000*** | 0,005 | 0,008 | 0,000 | 0,003 |
| 0,000 | 0,128 | 0,001 | 0,041 | 0,176 | 0,073 | 0,005 | ***0,443*** | 0,701 | 0,004 | 0,215 |
| 0,000 | 0,221 | 0,001 | 0,072 | 0,304 | 0,126 | 0,008 | 0,701 | ***1,322*** | 0,006 | 0,372 |
| 0,000 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | 0,004 | 0,006 | ***0,000*** | 0,002 |
| 0,000 | 0,068 | 0,000 | 0,022 | 0,093 | 0,039 | 0,003 | 0,215 | 0,372 | 0,002 | ***0,124*** |

M.C. 13. Matriz de covarianzas. Escenario es=2.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 2,010 |
| ESPAÑA | 5,884 |
| EEUU | 2,002 |
| FRANCIA | 3,262 |
| ITALIA | 7,330 |
| JAPÓN | 1,230 |
| R. UNIDO | 2,154 |
| PORTUGAL | 14,279 |
| GRECIA | 23,212 |
| CANADÁ | 1,971 |
| AUSTRALIA | 5,580 |

Rend. mínimo: 1.230, correspondiente a bonos de Japón.

Rend. máximo: 23.212, correspondiente a bonos de Grecia.

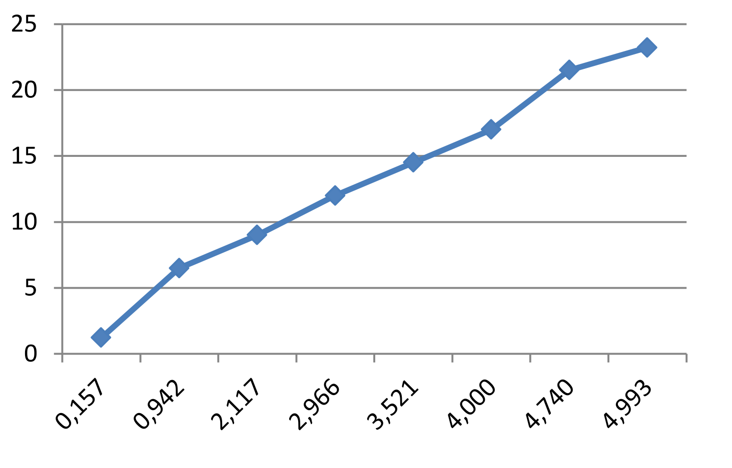
Promedio rentabilidades
Escenario es=2.

Resolviendo el modelo expuesto en (5.2.1.) para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (1.230 , 23.212)$, se obtiene la frontera eficiente del escenario es=2.

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 1.230 | 0.157 |
| 6.500 | 0.942 |
| 9.000 | 2.117 |
| 12.000 | 2.966 |
| 14.500 | 3.521 |
| 17.000 | 4.000 |
| 21.500 | 4.740 |
| 23.212 | 4.993 |

**Frontera eficiente para es=2**




Del conjunto de carteras eficientes para el escenario es=2, representadas en la figura anterior, se toma como cartera óptima del escenario aquella cuyo rendimiento esperado es igual a la media de los rendimientos esperados de todos los bonos en ese escenario, en este caso, el rendimiento medio de los bonos en el escenario es=2 y su riesgo asociado, resolviendo el modelo para este $\overline{r_2}$ son:

$$\overline{r_2} = \frac{\sum_{t=1}^{11} R_{i2}}{11} = 6.265 \qquad \sigma_2 = 0.741$$

Todos estos datos junto con la cartera óptima correspondiente a este escenario se recogen al final del capítulo en la tabla 5.3.3.2.

### 5.3.3 Escenario es=3.

Se construye este escenario con la combinación:

Condición 1.2. + Condición 2.1. + Condición 3.2.

De acuerdo a esta combinación, la evolución de rentabilidades de los países de la cartera a lo largo de 2012 sería la siguiente:

**Tabla 5.3.3.1.** Rentabilidades escenario es=3.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 | 2,010 |
| **ESP** | 5,622 | 5,738 | 5,855 | 5,971 | 6,088 | 6,204 | 6,321 | 6,437 | 6,554 | 6,670 | 6,787 | 6,903 |
| **EEUU** | 2,000 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,001 | 2,002 | 2,002 | 2,002 | 2,002 | 2,003 | 2,003 | 2,003 |
| **FRA** | 3,168 | 3,197 | 3,225 | 3,253 | 3,281 | 3,310 | 3,338 | 3,366 | 3,394 | 3,423 | 3,451 | 3,479 |
| **ITA** | 6,970 | 7,130 | 7,290 | 7,450 | 7,610 | 7,770 | 7,930 | 8,090 | 8,250 | 8,410 | 8,570 | 8,730 |
| **JAP** | 1,039 | 1,064 | 1,089 | 1,114 | 1,139 | 1,163 | 1,188 | 1,213 | 1,238 | 1,263 | 1,288 | 1,313 |
| **R.U.** | 2,143 | 2,147 | 2,150 | 2,153 | 2,156 | 2,160 | 2,163 | 2,166 | 2,169 | 2,173 | 2,176 | 2,179 |
| **POR** | 13,449 | 13,818 | 14,187 | 14,556 | 14,925 | 15,294 | 15,663 | 16,032 | 16,401 | 16,770 | 17,139 | 17,508 |
| **GRE** | 21,778 | 22,415 | 23,053 | 23,691 | 24,328 | 24,966 | 25,604 | 26,241 | 26,879 | 27,517 | 28,154 | 28,792 |
| **CAN** | 1,961 | 1,963 | 1,964 | 1,965 | 1,966 | 1,968 | 1,969 | 1,970 | 1,971 | 1,973 | 1,974 | 1,975 |
| **AUS** | 5,017 | 5,091 | 5,164 | 5,237 | 5,311 | 5,384 | 5,457 | 5,531 | 5,604 | 5,677 | 5,751 | 5,824 |

La matriz de covarianzas para este escenario de acuerdo a los rendimientos del mismo es:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | ***0,176*** | 0,000 | 0,039 | 0,222 | 0,035 | 0,005 | 0,512 | 0,885 | 0,002 | 0,102 |
| 0,000 | 0,000 | ***0,000*** | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,002 | 0,000 | 0,000 |
| 0,000 | 0,039 | 0,000 | ***0,010*** | 0,054 | 0,008 | 0,001 | 0,124 | 0,215 | 0,000 | 0,025 |
| 0,000 | 0,222 | 0,000 | 0,054 | ***0,333*** | 0,047 | 0,006 | 0,704 | 1,216 | 0,002 | 0,140 |
| 0,000 | 0,035 | 0,000 | 0,008 | 0,047 | ***0,008*** | 0,001 | 0,109 | 0,189 | 0,000 | 0,022 |
| 0,000 | 0,005 | 0,000 | 0,001 | 0,006 | 0,001 | ***0,000*** | 0,014 | 0,025 | 0,000 | 0,003 |
| 0,000 | 0,512 | 0,001 | 0,124 | 0,704 | 0,109 | 0,014 | ***1,770*** | 2,804 | 0,005 | 0,323 |
| 0,000 | 0,885 | 0,002 | 0,215 | 1,216 | 0,189 | 0,025 | 2,804 | ***5,286*** | 0,009 | 0,557 |
| 0,000 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,005 | 0,009 | ***0,000*** | 0,001 |
| 0,000 | 0,102 | 0,000 | 0,025 | 0,140 | 0,022 | 0,003 | 0,323 | 0,557 | 0,001 | ***0,070*** |

M.C. 14. Matriz de covarianzas. Escenario es=3.

Los rendimientos medios de este escenario son:

| BONO | $\overline{R}_i$ |
|---|---|
| ALEMANIA | 2,010 |
| ESPAÑA | 6,262 |
| EEUU | 2,002 |
| FRANCIA | 3,324 |
| ITALIA | 7,850 |
| JAPÓN | 1,176 |
| R. UNIDO | 2,161 |
| PORTUGAL | 15,479 |
| GRECIA | 25,285 |
| CANADÁ | 1,968 |
| AUSTRALIA | 5,421 |

Rend. mínimo: 1.176, correspondiente a bonos de Japón.

Rend. máximo: 25.285, correspondiente a bonos de Grecia.

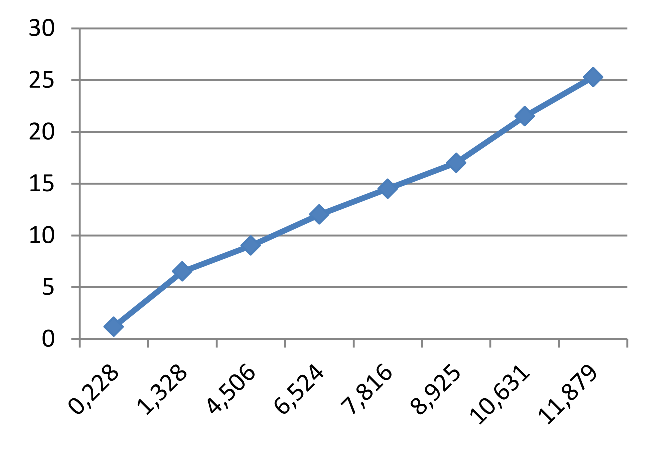
Promedio rentabilidades
Escenario es=3.

Resolviendo el modelo expuesto en (5.2.1.) para distintos valores de rentabilidad en el intervalo $r_s \in (1.176 , 25.285)$, se obtiene la frontera eficiente del escenario es=3

**Tabla de valores**

| $r_s$ | $\sigma_p$ |
|---|---|
| 1.176 | 0.228 |
| 6.500 | 1.328 |
| 9.000 | 4.506 |
| 12.000 | 6.524 |
| 14.500 | 7.816 |
| 17.000 | 8.925 |
| 21.500 | 10.631 |
| 25.285 | 11.879 |

**Frontera eficiente para es=3**




Del conjunto de carteras eficientes para el escenario $s_1$, representadas en la figura anterior, se toma como cartera óptima del escenario aquella cuyo rendimiento esperado es igual a la media de los rendimientos esperados de todos los bonos en ese escenario, en este caso, el rendimiento medio de los bonos en el escenario es=3 y su riesgo asociado, resolviendo el modelo para este $\overline{r_3}$ son:

$$\overline{r_3} = \frac{\sum_{t=1}^{11} R_{i3}}{11} = 6.631 \qquad \sigma_3 = 1.654$$

Todos estos datos junto con la cartera óptima correspondiente a este escenario se recogen al final del capítulo en la tabla 5.3.3.2.

Como resumen, se recoge en la siguiente tabla los valores obtenidos para el rendimiento óptimo $r_S$, el capital a invertir $C_S$, el riesgo asociado $\sigma$ ($x_s$), la varianza correspondiente $L_S$ y la composición de la cartera óptima [$x_i$], para cada uno de los S_escenarios:

**Tabla 5.3.3.2.** Carteras óptimas de cada escenario.

| | es=1 | es=2 | es=3 |
|---|---|---|---|
| $r_S$ | 6.428 % | 6.265 % | 6.631 % |
| $C_S$ | 100 | 100 | 100 |
| $\sigma$ ($x_s$) | 0,881 | 0.741 | 1.654 |
| $L_S$ | 0,776 | 0.549 | 2.735 |
| ALEMANIA | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| ESPAÑA | 98,046 | 97,799 | 98,062 |
| EEUU | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| FRANCIA | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| ITALIA | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| JAPÓN | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| R. UNIDO | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| PORTUGAL | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| GRECIA | 1,954 | 2,201 | 1,938 |
| CANADÁ | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| AUSTRALIA | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

A partir de la tabla anterior, se observa como los únicos países que forman parte de la cartera óptima sea cual sea el escenario considerado, corresponden a países de la zona que se ha denominado Europa Sur. Esta zona estaba constituída por cuatro países, de los cuales sólo dos, España y Grecia aparecen como integrantes de las carteras óptimas confeccionadas por el modelo. De ellos, se observa como el mayor porcentaje, en cualquiera de los tres escenarios, corresponde a España, lo cual puede indicar que el modelo, en su tarea minimizar la función objetivo, no justifica una inversión mayor en bonos griegos, con el aumento de riesgo que ello supone, por la rentabilidad revertida a cambio.

En cuanto a la rentabilidad se observa que para los tres escenarios es muy similar, siendo algo menor en el caso del escenario es=2, con un valor 6,265. Estos valores, como por otro lado el lógico, corresponden practicamente en su totalidad a la influencia de larentabilidad de los bonos españoles que acaparan, en cualquiera de los tres escenarios, practicamente el 90% de la cartera.

Si se observa los valores de riesgo dados por el modelo, llama la atención qu el valor de ést.e para el caso del escenario es=3 es el doble, 1,654 frente a 0,741 y 0,881, de los otros dos escenarios. Habría que tener por tanto muy en cuenta que, si la evolución de los intereses, evoluciona hacia valores similares a los contemplados por este escenario, el riesgo aumenta de forma considerable, para valores similares de rentabilidad

### 5.3.4 Aplicación de los modelos MM y MAD.

Tal y como se hizo en el apartado anterior, se procede a incorporar toda la información obtenida en el desarrollo de los tres escenarios a los modelos MM y MAD.

Se desarrolla el estudio que sigue a continuación, de forma análoga a lo ya realizado en los capítulos anteriores, para el caso de equi-probabilidad de escenarios, como para distribución asimétrica de probabilidad de los mismos, tomando en este caso una distribución de los mismos de $P_1$=20%, $P_2$=30% y $P_3$=50%.

A tener en cuenta que ahora, los datos históricos a la hora de aplicar los modelos MM y MAD, son los correspondientes a 2011. Así, los datos históricos de las rentabilidades de los bonos en ese año son:

**Tabla 5.3.4.1** Rendimiento bonos. Año 2011

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 3,050 | 3,230 | 3,240 | 3,360 | 3,130 | 2,980 | 2,790 | 2,270 | 1,870 | 2,040 | 1,940 | 2,010 |
| **ESP** | 5,379 | 5,258 | 5,249 | 5,329 | 5,322 | 5,480 | 5,825 | 5,252 | 5,200 | 5,251 | 6,192 | 5,505 |
| **EEUU** | 3,410 | 3,590 | 3,440 | 3,470 | 3,190 | 3,000 | 3,030 | 2,320 | 1,980 | 2,140 | 2,020 | 2,000 |
| **FRA** | 3,440 | 3,600 | 3,600 | 3,690 | 3,500 | 3,440 | 3,400 | 2,990 | 2,650 | 2,990 | 3,420 | 3,140 |
| **ITA** | 4,730 | 4,740 | 4,800 | 4,750 | 4,740 | 4,820 | 5,490 | 5,280 | 5,530 | 5,770 | 6,820 | 6,810 |
| **JAP** | 1,216 | 1,293 | 1,256 | 1,270 | 1,148 | 1,136 | 1,118 | 1,030 | 1,011 | 1,011 | 0,993 | 1,014 |
| **R.U.** | 3,630 | 3,810 | 3,670 | 3,680 | 3,400 | 3,270 | 3,150 | 2,570 | 2,410 | 2,510 | 2,250 | 2,140 |
| **POR** | 6,950 | 7,340 | 7,800 | 9,190 | 9,630 | 10,860 | 12,150 | 10,930 | 11,340 | 11,720 | 11,890 | 13,080 |
| **GRE** | 11,730 | 11,400 | 12,440 | 13,860 | 15,940 | 16,690 | 16,150 | 15,900 | 17,780 | 18,040 | 17,920 | 21,140 |
| **CAN** | 3,310 | 3,320 | 3,290 | 3,270 | 3,080 | 3,090 | 2,880 | 2,490 | 2,190 | 2,380 | 2,150 | 1,960 |
| **AUS** | 5,861 | 5,970 | 5,804 | 5,889 | 5,684 | 5,560 | 5,595 | 5,371 | 5,066 | 5,303 | 5,106 | 4,944 |

Y la correspondiente matriz de covarianzas:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,340*** | -0,043 | 0,344 | 0,139 | -0,346 | 0,057 | 0,325 | -0,835 | -1,250 | 0,268 | 0,178 |
| -0,043 | ***0,086*** | -0,046 | 0,018 | 0,126 | -0,010 | -0,056 | 0,241 | 0,257 | -0,044 | -0,030 |
| 0,344 | -0,046 | ***0,426*** | 0,152 | -0,386 | 0,065 | 0,370 | -1,001 | -1,514 | 0,303 | 0,204 |
| 0,139 | 0,018 | 0,152 | ***0,097*** | -0,095 | 0,025 | 0,136 | -0,330 | -0,505 | 0,112 | 0,076 |
| -0,346 | 0,126 | -0,386 | -0,095 | ***0,600*** | -0,063 | -0,389 | 1,120 | 1,660 | -0,329 | -0,215 |
| 0,057 | -0,010 | 0,065 | 0,025 | -0,063 | ***0,013*** | 0,062 | -0,181 | -0,265 | 0,050 | 0,034 |
| 0,325 | -0,056 | 0,370 | 0,136 | -0,389 | 0,062 | ***0,389*** | -0,993 | -1,485 | 0,292 | 0,196 |
| -0,835 | 0,241 | -1,001 | -0,330 | 1,120 | -0,181 | -0,993 | ***4,124*** | 5,146 | -0,806 | -0,556 |
| -1,250 | 0,257 | -1,514 | -0,505 | 1,660 | -0,265 | -1,485 | 5,146 | ***8,531*** | -1,221 | -0,859 |
| 0,268 | -0,044 | 0,303 | 0,112 | -0,329 | 0,050 | 0,292 | -0,806 | -1,221 | ***0,266*** | 0,162 |
| 0,178 | -0,030 | 0,204 | 0,076 | -0,215 | 0,034 | 0,196 | -0,556 | -0,859 | 0,162 | ***0,074*** |

M.C. 15. Matriz de covarianzas. Datos 2011.

De forma resumida se analizan los resultados obtenidos.

### 5.3.4.1 Resultados modelo MM.

*Equi-probabilidad de escenarios.* De acuerdo a la Figura 33 y resuelto el modelo dando un 33% de probabilidad de ocurrencia a cada uno de los tres escenarios, los resultados obtenidos son los siguientes:

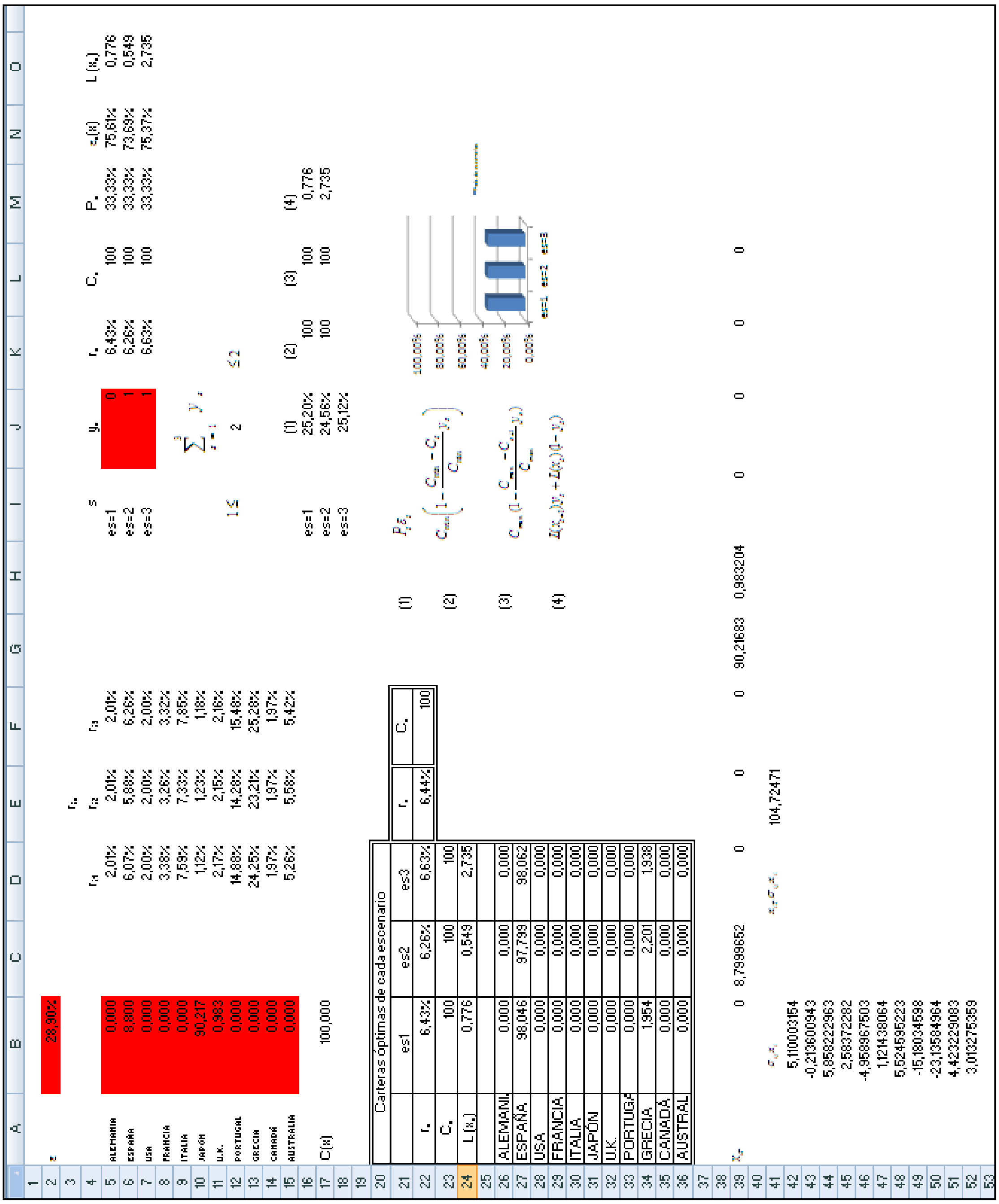


**Figura 33.** Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios.

**Tabla 5.3.4.1.1.** Cartera coordinada del Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 8,800 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,000 |
| ITALIA | 0,000 |
| JAPÓN | 90,217 |
| R. UNIDO | 0,983 |
| PORTUGAL | 0,000 |
| GRECIA | 0,000 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 0,000 |
| C(x) | 100 |
| $\sigma$ (x) | 10,234 |

Se observa de forma ya de forma inmediata, que la distribuciíon de esta cartera óptima dada por el modelo MM, es completamente diferente a la que se ha obtenido en la ejecución del modelo de optimización para cada escenario por separado. La inversión en bonos griegos ha desaparecido, pasando el papel predominante que tenían los bonos españoles en el caso anterior a los bonos japoneses, quedando la inversión en deuda española como segundo valor en importancia de la cartera. Se observa la inclusión de un tercer país, Reino Unido, aunque de un modo muy testimonial, con un 0,983%.

Comparando la cartera coordinada óptima obtenida por el modelo MM con equi-probabilidad de escenarios con las obtenidas para cada uno de ellos por separado:

| ESCENARIO 1 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | Capital $C_s$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_s$ | Beneficio $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 0,88 | 6,43% | 6,43 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ |
| | 100,00 | 10,23 | 1,57% | 1,57 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 75,61% | 25,20% |

| ESCENARIO 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | Capital $C_s$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_s$ | Beneficio $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 0,74 | 6,26% | 6,26 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ |
| | 100,00 | 10,23 | 1,65% | 1,65 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 73,69% | 24,56% |

| ESCENARIO 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | Capital $C_s$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $r_s$ | Beneficio $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 1,65 | 6,63% | 6,63 |
| Cartera coordinada | Capital $C(x)$ | Riesgo $\sigma$ | Rendimiento $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}}{C(x)}$ | Beneficio $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ |
| | 100,00 | 10,23 | 1,63% | 1,63 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 75,37% | 25,12% |

**Figura 34.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario.
Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios.

Como cabía preveer, de acuerdo a la diferencia que a simple vista ya se observó entre las carteras óptimas dadas por el modelo coordinado y las obtenidas para los distintos escenarios, se obtienen diferencias muy importantes en cuanto a los rendimientos en uno y otro caso, lo que dispara el valor de los errores coordinados. Así por ejemplo en el escenario es=3, el rendimiento esperado al invertir la cartera dada por el modelo coordinado, estaría en torno al 1,63%, frente al 6,63% que ofrecía la cartera óptima de este escenario estudiado por separado. Esto eleva el error coordinado a un 75,37%. Diferencias similares se dan también en los otros dos escenarios, donde los errores coordinados sondel 75,61% del escenario es=1 o del 73,69% del escenario es=2.

*Distribución asimétrica de probabilidades.* Como se ha comentado, se da una probabilidad de ocurrencia de $P_1$=20%, $P_2$=30% y $P_3$=50%. En la Figura 34 se adjunta captura de pantalla del modelo en Excel y resumen de los resultados obtenidos.

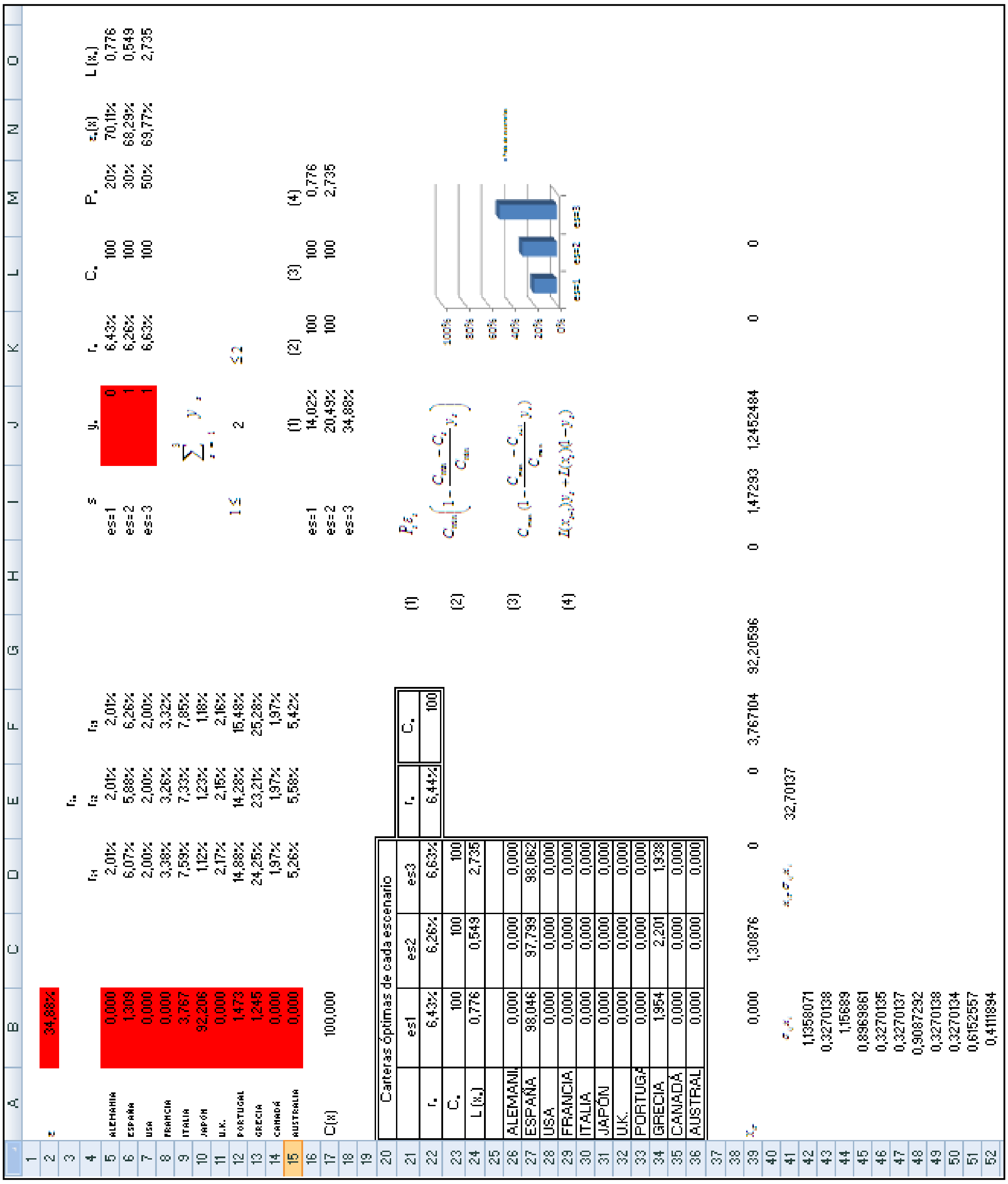


**Figura 34.** Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades.

**Tabla 5.3.4.1.2.** Cartera coordinada del Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 1,309 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,000 |
| ITALIA | 3,767 |
| JAPÓN | 92,206 |
| R. UNIDO | 0,000 |
| PORTUGAL | 1,473 |
| GRECIA | 1,245 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 0,000 |
| C(x) | 100 |
| σ (x) | 5,719 |

En el estudio del modelo MM, con distribución asimétrica de probabilidades de acuerdo a lo ya comentado, se observa en la cartera óptima coordinada, una mayor variabilidad en los bonos considerados. Se obtiene una cartera óptima más diversificada, logrando como primera consecuencia de ello, que el riesgo de la misma se ha reducido a la mitad, pasando de los 10,23 puntos que daba el modelo MM con equiprobabilidad de escenarios a los 5,719, de este caso.

Aparecen en este caso representados todos los países de la zona denominada Europa Sur, lo que a buen seguro, que son los que dentro de la cartera, se encuentra en peor situación, con intereses a pagar por sus bonos más altos, lo que, como se verá enseguida, supondrá un aumento en la rentabilidad esperada de esta cartera.

Sigue manteniéndose como valor principal de la cartera, y como viene ocurriendo durante casi todos los casos contemplados en este Proyecto, los bonos japoneneses, debido a la extraordinaria estabilidad histórica de sus rendimientos.

Comparando la cartera coordinada óptima obtenida por el modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades con las carteras óptimas obtenidas para cada uno de ellos por separado:

**ESCENARIO 1**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 0,88 | 6,43% | 6,43 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 5,72 | 1,92% | 1,92 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 70,11% | 14,02% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 0,74 | 6,26% | 6,26 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 5,72 | 1,99% | 1,99 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 68,29% | 20,49% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_z$ | $\sigma$ | $r_z$ | $r_z C_z$ |
| | 100,00 | 1,65 | 6,63% | 6,63 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{iz} x_{iz}$ |
| | 100,00 | 5,72 | 2,00% | 2,00 |

| Error coordinado $\varepsilon_z$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 69,77% | 34,88% |

**Figura 35.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario.

Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades.

Como ya se había adelantado, se observa un aumento importante, en torno a un 20% en la rentabilidad obtenida por la cartera coordinada frente al caso de equiprobabilidad de escenarios, alcanzándose el 2% en el caso del escenario es=3. Sin embargo, se sigue lejos de los rendimientos dados por las carteras dadas por los modelos en el estudio de los escenarios por separado, que se sitúan en todos los casos por encima del 6%. Si se ha conseguido en este caso, una reducción importante del riesgo asociado a la cartera coordinada, reduciéndose éste practicamente a la mitad, tomando un valor de 5,72%.

Lo comentado trae como consecuencia una ligera disminución de los errores coordinados, que van del 68,29% del escenario es=2 al 70,11% del escenario es=1.

### 5.3.4.2 Resultados modelo MAD.

*Equi-probabilidad de escenarios.* Se ha resuelto dando un 33% de probabilidad de ocurrencia a cada uno de los tres escenarios, los resultados obtenidos son los siguientes: En la Figura 36 se adjunta captura de pantalla del modelo.

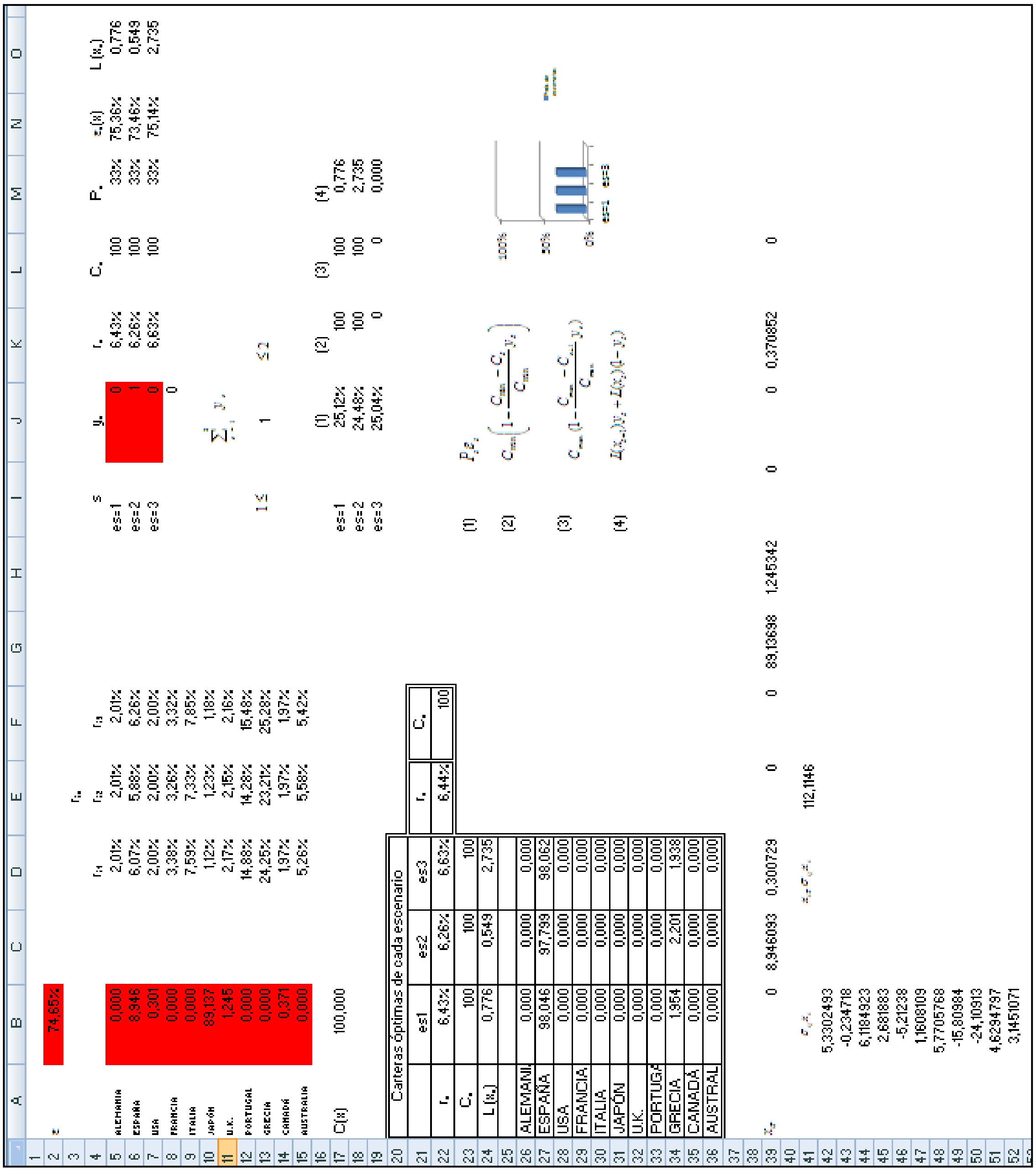


**Figura 36.** Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios.

**Tabla 5.3.4.2.1.** Cartera coordinada del Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 8,946 |
| EEUU | 0,301 |
| FRANCIA | 0,000 |
| ITALIA | 0,000 |
| JAPÓN | 89,137 |
| R. UNIDO | 1,245 |
| PORTUGAL | 0,000 |
| GRECIA | 0,000 |
| CANADÁ | 0,371 |
| AUSTRALIA | 0,000 |
| C(x) | 100 |
| $\sigma$ (x) | 10,588 |

Si se observan los valores dados por el modelo para la cartera óptima, se obtienen comparándolos con el modelo MM, que la distribución es practicamente idéntica, apareciendo no obstante, de forma residual, unos pequeños porcentajes de inversión en bonos de Estados Unidos, un 0,301% y de Canadá, un 0,371%.

Comparando la cartera coordinada óptima obtenida por el modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios con las carteras óptimas obtenidas para cada uno de ellos por separado:

**ESCENARIO 1**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 0,88 | 6,43% | 6,43 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ |
| | 100,00 | 10,59 | 1,58% | 1,58 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 75,36% | 25,12% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 0,74 | 6,26% | 6,26 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ |
| | 100,00 | 10,59 | 1,66% | 1,66 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 73,46% | 24,48% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_s$ | $\sigma$ | $r_s$ | $r_s C_s$ |
| | 100,00 | 1,65 | 6,63% | 6,63 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{is} x_{is}$ |
| | 100,00 | 10,59 | 1,65% | 1,65 |

| Error coordinado $\varepsilon_s$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 75,14% | 25,04% |

**Figura 37.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario.
Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios.

Se observa como los riesgos de la cartera coordinada se vuelven a disparar hasta un valor de 10,59 puntos, mientras que los rendimientos obtenidos por la cartera coordinada, son en el mejor de los casos, el 1,66% del escenario es=2, muy lejos de los rendimientos obtenidos por las carteras óptimas de cada escenario por separados, todos ellos por encima del 6%. Esto conlleva a errores coordinados elevados, en torno al 75% en cada uno de los casos. En la comparativa que se efectúa algo más adelante entre los modelos en sí, cual es la influencia de estos errores en el índice de robustez del modelo.

*Distribución asimétrica de probabilidades.* En la Figura 38 se observa captura de pantalla del modelo configurado en Excel.

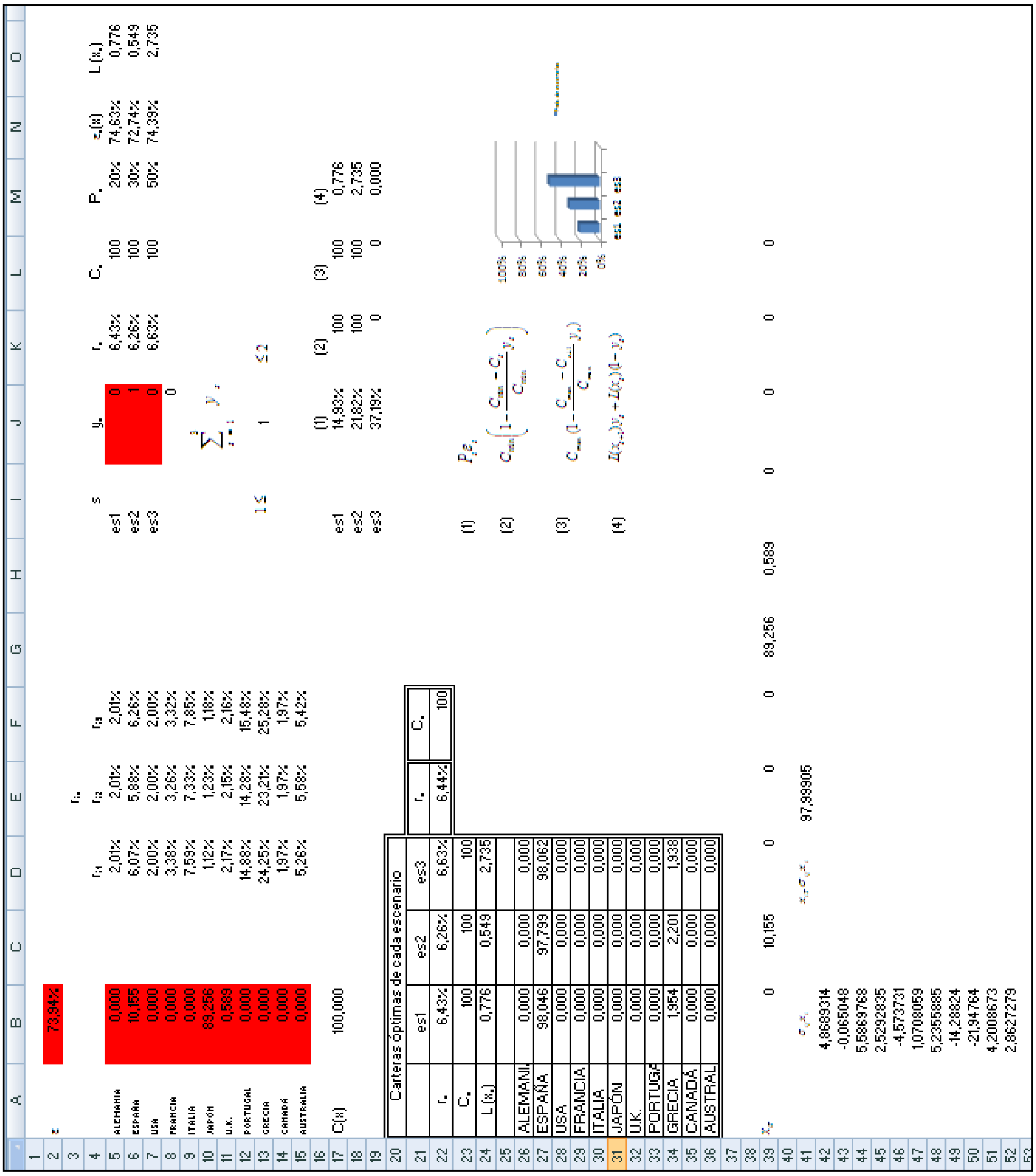


Figura 38. **Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades.**

Dando una probabilidad de ocurrencia de $P_1$=20%, $P_2$=30% y $P_3$=50%. Se ha resuelto el modelo y en la tabla 5.3.4.2.1 se muestra un resumen de los resultados obtenidos.

**Tabla 5.3.4.2.2.** Cartera coordinada del Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades.

| | |
|---|---|
| ALEMANIA | 0,000 |
| ESPAÑA | 10,155 |
| EEUU | 0,000 |
| FRANCIA | 0,000 |
| ITALIA | 0,000 |
| JAPÓN | 89,256 |
| R. UNIDO | 0,589 |
| PORTUGAL | 0,000 |
| GRECIA | 0,000 |
| CANADÁ | 0,000 |
| AUSTRALIA | 0,000 |
| C(x) | 100 |
| $\sigma$ (x) | 9,899 |

Siguen apareciendo en la cartera óptima, en con porcentajes mut similares, los mismos países. Ha desaparecido Canadá y disminuído ligeramente la proporción de inversión en bonos del Reino Unido, aumentando algo los porcentajes en los otros dos países que conforman la cartera. En la comparación con los escenarios, se verá que influencia puede tener esta rediustribución en la rentabilidad esperada por la cartera. Se observa como el riesgo se vuelve a elevar en torno a los 10 puntos, por lo que, a falta de realizar la comparación entre modelos, parece que la cartera coordinada proporcionada por el modelo MAD ofrece peores resultados que la obtenida a través del modelo MM, con riesgos más elevados y rentabilidades muy alejadas de los óptimos de cada escenario, punto este común a ambos modelos. Cabe esperar bajos índices de robustez para ambos casos.

Comparando la cartera coordinada óptima obtenida por el modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades con las carteras óptimas obtenidas para cada uno de ellos por separado:

**ESCENARIO 1**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_x$ | $\sigma$ | $r_x$ | $r_x C_x$ |
| | 100,00 | 0,88 | 6,43% | 6,43 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{ii} x_{ii}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{ii} x_{ii}$ |
| | 100,00 | 9,90 | 1,63% | 1,63 |

| Error coordinado $\varepsilon_x$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 74,63% | 14,93% |

**ESCENARIO 2**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_x$ | $\sigma$ | $r_x$ | $r_x C_x$ |
| | 100,00 | 0,74 | 6,26% | 6,26 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{ii} x_{ii}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{ii} x_{ii}$ |
| | 100,00 | 9,90 | 1,71% | 1,71 |

| Error coordinado $\varepsilon_x$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 72,74% | 21,82% |

**ESCENARIO 3**

| | Capital | Riesgo | Rendimiento | Beneficio |
|---|---|---|---|---|
| Cartera óptima | $C_x$ | $\sigma$ | $r_x$ | $r_x C_x$ |
| | 100,00 | 1,65 | 6,63% | 6,63 |
| Cartera coordinada | $C(x)$ | $\sigma$ | $\frac{\sum_{i=1}^{11} r_{ii} x_{ii}}{C(x)}$ | $\sum_{i=1}^{11} r_{ii} x_{ii}$ |
| | 100,00 | 9,90 | 1,70% | 1,70 |

| Error coordinado $\varepsilon_x$ | Error coordinado ponderado |
|---|---|
| 74,39% | 37,19% |

**Figura 39.** Comparativa cartera óptima coordinada / Cartera óptima por escenario.
Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades.

Como ya se venía adelantando, se observa que el aumento del riesgo hasta los 10 puntos, teniendo en cuenta los valores que del mismo se obtuvieron en las carteras óptimas de los tres escenarios, el peor de los casos es el escenario es=3 y era del 1,65, no se ve recompensado con un aumento sustancial del nivel de rentabilidad esperada de la cartera coordinada, sino que éste se mantiene en niveles bajos, siendo el mayor valor el obtenido en el escenario es=2 con un 1,71%.

En las carteras óptimas de los escenarios estudiados por separado, el mayor peso en la inversión lo tenían los bonos españoles, con rentabilidades históricas por encima del 6% en el período considerado, mientras que el hecho de que la cartera coordinada, el mayor peso sea para los bonos de Japón, provoca esta importante merma en el rendimiento de la cartera correspondiente.

Como se hizo con anterioridad, se procede a la comparativa de ambos modelos entre sí . En la siguiente tabla 5.3.4.2.2. se muestra resumen de los resultados .

**Tabla 5.3.4.2.2.** Comparación de los modelos MM y MAD con equi-probabilidad de escenarios.

| | **MODELO MM** | **MODELO MAD** |
|---|---|---|
| | Min $\varepsilon$<br>s.a. $P_s\varepsilon_s(x) \le \varepsilon$ | Min $\varepsilon = \sum_{s=1}^{S} P_s\lvert\varepsilon_s\rvert$ |
| $C(x)$ | 100,00 | 100,00 |
| $\sigma$ | 5,72 | 10,59 |
| $\sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is}$ | 5,91 | 4,89 |
| $\sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is} \Big/ 3$ | 1,97 | 1,63 |
| $\dfrac{\sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{11} r_{is}x_{is} \Big/ 3}{C(x)}$ | 1,97% | 1,63% |
| $P_s\varepsilon_s(x)\max$ | 23,37% | 25,12% |
| $P_s\varepsilon_s(x)\min$ | 22,76% | 24,48% |
| $P_s\varepsilon_s(x)\max - P_s\varepsilon_s(x)\min$ | 0,61% | 0,63% |
| $\sum_{s=1}^{3} P_s\varepsilon_s(x)$ | 69,38% | 74,65% |
| $\sum_{s=1}^{3} P_s\lvert\varepsilon_s(x)\rvert$ | 69,38% | 74,65% |
| $\sum_{s=1}^{3} P_s\lvert\varepsilon_s(x)\rvert \Big/ 3$ | 23,13% | 24,88% |
| $\Re = 1 - \sum_{s=1}^{3} P_s\lvert\varepsilon_s(x)\rvert \Big/ 3$ | 76,87% | 75,12% |

Si se observan con detenimiento estos datos, lo primero que llama la atención, como ya se ha comentado, es el nivel de riesgo que se asume en el caso de la cartera coordinada ofrecida por el modelo MAD, en torno a los 10 puntos, frente a los 5 puntos que da la cartera coordinada del modelo MM.

Esta diferencia en los niveles de riesgo entre uno y otro modelo podría estar justificada con niveles de rendimiento aceptables, pero el caso es justo al contrario, y mientras que de invertir de acuerdo a la cartera dada por el modelo MM, la rentabilidad obtenida global obtenida sería de 5,91, en rendimiento para cartera coordinada dada por el modelo MAD no alcanza ni el 5%, quedándose en un 4,89%.

La diferencia entre los errores ponderados máximo y mínimo de ambos modelos es muy pequeña, siendo de 0,61 para el modelo MM y 0,63 para el modelo MAD, por lo que el error ponderado está bastante acotado. Pero el hecho de esta acotación no hace que dicho valor sea bajo, si no todo lo contrario, siendo el valor del error ponderado global del 69,38% para el modelo MM y todavía mayor para el modelo MAD, alcanzando el 74,65%.

Este hecho tiene que tener, necesariamente, una clara influencia en el índice de robustez de ambos modelos, y así es, ya que como puede observarse, éste toma un valor del 76,87% para el modelo MM y del 75,12 para el modelo MAD. Como ya se comentó con anterioridad, el modelo ideal sería aquél que presentara un índice de robustez del 100%, ya que en ese caso, todos sus errores coordinados serían cero.

### 5.3.5 Comparativa del enfoque 2 con datos reales 2012.

Se ha desarrollado el enfoque 2, que se ha denominado evolución por zonas, con los datos históricos de que se disponía a finales de 2011. Esto permitió plantear una serie de hipotéticos escenarios para el año 2012, sobre los cuales se ha trabajado y desarrollado toda la teoría, evaluando las fronteras eficientes de cada uno de los tres escenarios propuestos, modelizado el estudio mediante los métodos MM y MAD, tanto para equi-probabilidad de ocurrencia de escenarios como para una distribución asimétrica de probabilidades, obteniendo distintas carteras óptimas en cada uno de esos casos.

Al disponer de las rentabilidades reales de los bonos de los países que componen la cartera en el año 2012, se procede a partir de aquí a evaluar las rentabilidades y riesgos asociados a una inversión que se realizara con las carteras dadas por los modelos MM y MAD en cada una de las opciones estudiadas, pero teniendo en cuenta las rentabilidades reales de los bonos en 2012.

Las rentabilidades reales de los distintos bonos de los países objeto de estudio en este Proyecto han sido para el año 2012 las siguientes:

**Tabla 5.3.5.1.** Rentabilidades bonos a 10 años. Año 2012.

| | Ene 2012 | Feb 2012 | Mar 2012 | Abr 2012 | May 2012 | Jun 2012 | Jul 2012 | Ago 2012 | Sep 2012 | Oct 2012 | Nov 2012 | Dic 2012 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALE** | 1,870 | 1,890 | 1,880 | 1,720 | 1,470 | 1,430 | 1,320 | 1,420 | 1,540 | 1,520 | 1,390 | 1,360 |
| **ESP** | 5,399 | 5,111 | 5,170 | 5,790 | 6,126 | 6,589 | 6,795 | 6,581 | 5,920 | 5,647 | 5,690 | 5,340 |
| **EEUU** | 1,960 | 1,960 | 2,170 | 2,050 | 1,810 | 1,610 | 1,510 | 1,680 | 1,710 | 1,730 | 1,650 | 1,710 |
| **FRA** | 3,180 | 3,020 | 2,960 | 2,990 | 2,760 | 2,570 | 2,280 | 2,110 | 2,240 | 2,180 | 2,140 | 2,000 |
| **ITA** | 6,560 | 5,560 | 4,960 | 5,510 | 5,750 | 5,920 | 6,010 | 5,820 | 5,230 | 4,960 | 4,860 | 4,540 |
| **JAP** | 0,980 | 0,968 | 1,012 | 0,953 | 0,859 | 0,841 | 0,778 | 0,809 | 0,806 | 0,776 | 0,743 | 0,745 |
| **R.U.** | 2,050 | 2,130 | 2,260 | 2,140 | 1,880 | 1,680 | 1,560 | 1,570 | 1,780 | 1,820 | 1,800 | 1,860 |
| **POR** | 13,850 | 12,810 | 13,010 | 12,010 | 11,590 | 10,560 | 10,490 | 9,890 | 8,620 | 8,170 | 8,320 | 7,235 |
| **GRE** | 25,910 | 29,240 | 19,070 | 21,480 | 26,900 | 27,820 | 25,820 | 24,340 | 20,910 | 17,960 | 17,200 | 13,395 |
| **CAN** | 2,040 | 1,980 | 2,120 | 2,100 | 1,790 | 1,720 | 1,600 | 1,800 | 1,750 | 1,780 | 1,720 | 1,820 |
| **AUS** | 4,853 | 4,970 | 5,091 | 4,831 | 4,329 | 4,060 | 3,919 | 4,173 | 4,182 | 4,107 | 4,105 | 4,293 |

De acuerdo a lo cual, las rentabilidades promedio para el año 2012 serían:

**Tabla 5.3.5.2.** Rentabilidades promedio. Año 2012.

| | PROMEDIO |
|---|---|
| ALEMANIA | 0.016 |
| ESPAÑA | 0,058 |
| EEUU | 0,018 |
| FRANCIA | 0,025 |
| ITALIA | 0,055 |
| JAPÓN | 0,009 |
| R. UNIDO | 0,019 |
| PORTUGAL | 0,105 |
| GRECIA | 0,225 |
| CANADÁ | 0,019 |
| AUSTRALIA | 0,044 |

Teniendo en cuenta las carteras óptimas dadas por los modelos MM y MAD, y de acuerdo a la expresión $\mathrm{R}_p = \sum_{i=1}^{11} w_i \text{ x } \overline{\mathrm{R}}_i$, se pueden calcular las rentabilidades reales en cada caso. (5.3.5.1)

Si se calcula la matriz de covarianzas de los datos reales de 2012, se obtiene:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***0,046*** | -0,077 | 0,035 | 0,072 | 0,022 | 0,018 | 0,039 | 0,331 | 0,234 | 0,029 | 0,075 |
| -0,077 | ***0,327*** | -0,073 | -0,087 | 0,135 | -0,023 | -0,099 | -0,231 | 0,984 | -0,060 | -0,156 |
| 0,035 | -0,073 | ***0,039*** | 0,061 | -0,003 | 0,016 | 0,039 | 0,270 | 0,002 | 0,029 | 0,071 |
| 0,072 | -0,087 | 0,061 | ***0,181*** | 0,111 | 0,036 | 0,068 | 0,794 | 1,012 | 0,050 | 0,133 |
| 0,022 | 0,135 | -0,003 | 0,111 | ***0,337*** | 0,019 | -0,019 | 0,730 | 2,208 | 0,003 | 0,015 |
| 0,018 | -0,023 | 0,016 | 0,036 | 0,019 | ***0,009*** | 0,016 | 0,178 | 0,182 | 0,013 | 0,034 |
| 0,039 | -0,099 | 0,039 | 0,068 | -0,019 | 0,016 | ***0,051*** | 0,270 | -0,080 | 0,032 | 0,079 |
| 0,331 | -0,231 | 0,270 | 0,794 | 0,730 | 0,178 | 0,270 | ***4,641*** | 6,304 | 0,224 | 0,612 |
| 0,234 | 0,984 | 0,002 | 1,012 | 2,208 | 0,182 | -0,080 | 6,304 | ***24,187*** | -0,008 | 0,221 |
| 0,029 | -0,060 | 0,029 | 0,050 | 0,003 | 0,013 | 0,032 | 0,224 | -0,008 | ***0,028*** | 0,060 |
| 0,075 | -0,156 | 0,071 | 0,133 | 0,015 | 0,034 | 0,079 | 0,612 | 0,221 | 0,060 | ***0,166*** |

M.C. 16. Matriz de covarianzas 10 años. Datos 2012.

Determinada la matriz de covarianzas, y de acuerdo a la expresión:

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} w_i \, w_j \, \sigma_{ij},$$

se pueden determinar los riesgos reales asociados a cada cartera. (5.3.5.2.).

Tomando los datos de las tablas Tabla 5.3.4.1.1. Cartera coordinada del Modelo MM con equi-probabilidad de escenarios, Tabla 5.3.4.1.2. Cartera coordinada del Modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades, Tabla 5.3.4.2.1. Cartera coordinada del Modelo MAD con equi-probabilidad de escenarios y Tabla 5.3.4.2.2. Cartera coordinada del Modelo MAD con distribución asimétrica de probabilidades, y utilizando las expresiones (5.3.5.1) y (5.3.5.2.), se obtienen los siguientes resultados:

**Tabla 5.3.5.3.** Comparativa resultados modelos MM y MAD / Riesgo y rentabilidad reales.

| | MODELO MM | | MODELO MAD | |
|---|---|---|---|---|
| | $=P_i$ | $<>P_i$ | $=P_i$ | $<>P_i$ |
| ALEMANIA | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ESPAÑA | 8,800 | 1,309 | 8,946 | 10,155 |
| EEUU | 0 | 0 | 0,301 | 0 |
| FRANCIA | 0 | 0 | 0 | 0 |
| ITALIA | 0 | 3.767 | 0 | 0 |
| JAPÓN | 90,217 | 92,206 | 89,137 | 89,256 |
| R. UNIDO | 0,983 | 0 | 1,245 | 0,589 |
| PORTUGAL | 0 | 1,473 | 0 | 0 |
| GRECIA | 0 | 1,245 | 0 | 0 |
| CANADÁ | 0 | 0 | 0,371 | 0 |
| AUSTRALIA | 0 | 0 | 0 | 0 |
| RIESGO | 10,234 | 5,719 | 10,588 | 9,899 |
| RENTABILIDAD | 1,62 | 1,54 | 1,63 | 1,68 |
| RIESGO REAL | 8,15 | 8,23 | 8,16 | 8,20 |
| RENT. REAL | 1,31 | 1,22 | 1,32 | 1,37 |

Una vez desarrollados los modelos MM y MAD sobre los datos de rentabilidad real del año 2012, en los resultados obtenidos de la aplicación se observa que los valores de riesgo de la inversión y de rentabilidad de la misma para cada una de las carteras óptimas coordinadas, dadas por los modelos para los tres escenarios estudiados, son muy similares a las que se hubieran obtenido de llevar a cabo la inversión, y de acuerdo a la rentabilidad real de los bonos. Es también escasa la variación obtenida tanto en las carteras óptimas, como los resultados de $\boldsymbol{\sigma_p}$ y de $\mathbf{R}_{\boldsymbol{p}}$ para las distintas opciones estudiadas.

# 6 Conclusiones.

Se planteaba como objetivo, al comienzo de este Proyecto, el estudio del riesgo y la rentabilidad de una inversión a realizar en bonos soberanos emitidos por los países para financiar su deuda. Dada la coyuntura económica y financiera que actualmente se está produciendo a nivel mundial, se planteaba el estudio de la inversión a realizar en 2012, utilizando para la previsión los datos históricos de los que se disponen hasta esa fecha, y a partir de Enero de 2007, donde se estima, que de forma aproximada, se inicio la actual crisis.

Se comenzó el desarrollo de este estudio valorando el riesgo en la inversión mediante la teoría de Markowitz, según la cual, se cuantifica dicho riesgo mediante la varianza de los datos de que se dispone. Se trata de un estudio multicriterio con dos términos a tener en cuenta, el riesgo, el cual se quiere minimizar, y la rentabilidad, que se pretende máxima en la inversión. Para su desarrollo se plantearon dos opciones, por un lado ambos términos formaban parte de la misma función, en la cual se introdujeron dos parámetros, $\alpha$ y $\beta$, que daban más o menos peso a cada uno de ellos. Esto permitió desarrollar el modelo y obtener una cartera óptima, la cual ofrecía una rentabilidad esperada y un riesgo asociado. Para comprobar su fiabilidad, se calculó el riesgo y rentabilidad de dichas carteras con los datos reales de rendimiento de los bonos en el año 2012, verificándose con ello como la estimación dada por el modelo no discrepaba en exceso, salvo en casos puntuales sobre todo en el corto plazo, con los resultados reales. Así, se obtuvieron, en el caso de $\alpha$=0,5; $\beta$=0,5, para la cartera óptima una rentabilidad estimada por el modelo de 2,24%, mientras que la real hubiera sido de 2,17%, o un riesgo esta misma cartera previsto de 14,77 frente a uno real de 25,26.

En su momento se indicó, que la estabilidad de los datos históricos de Japón, hacían su varianza muy baja, por lo que al aplicar la teoría de Markowitz, la cartera óptima daba a estos bonos un mayor peso, mucho mayor que el dado a cualquiera del resto de países, y afectando además a la diversificación de la cartera, que prácticamente no existe. Así, a excepción del caso de $\alpha$=0; $\beta$=1, donde la consideración del riesgo en la función objetivo es nula, y en el que la cartera óptima está compuesta en un 100% de bonos griegos en el medio y largo plazo y australianos en el corto plazo, para el resto de valores de $\alpha$ y $\beta$ considerados, el porcentaje de bonos japoneses está por encima del 79% en todas las carteras

Una segunda opción de estudio consistió en considerar un solo criterio a través de la optimización únicamente de la rentabilidad manteniendo el riesgo acotado. Se resolvió el modelo para varios valores máximos de riesgo, obteniendo con ello varias carteras óptimas que maximizaban la rentabilidad para cada uno de esos niveles. Se desarrolló gráficamente la evolución experimentada por las carteras óptimas, gráficas, que como ya se expuso, correspondían a la frontera eficiente, que representa, para cada nivel de riesgo, las carteras que ofrecen la máxima rentabilidad. Se observa, que en niveles de riesgo bajo, de un $\sigma$=14,77 en el largo plazo, la cartera óptima está conformada por un 82,5% de bonos japoneses, un 3,68% de griegos y un 13,87% australianos, que nos da una rentabilidad del 2,21%. Según aumenta el nivel de riesgo aumenta el porcentaje de bonos australianos presentes en la cartera óptima, disminuyendo los de Japón y Grecia, siendo, para un $\sigma$=20, un 29,49% de bonos japoneses, un 1,92% de bonos griegos y un 52,57% de bonos de Australia, apareciendo además un 16,02% de bonos italianos, y ofreciendo una rentabilidad estimada del 4,31%. Esta tendencia, cambia a partir de un $\sigma$=30, produciéndose la subida del porcentaje de bonos griegos en la cartera óptima, disminuyendo el resto hasta alcanzarse un 100% de los mismos para un riesgo máximo del $\sigma$=460, cartera en la cual la rentabilidad estimada es del 7,86%.

Se inicia posteriormente el estudio de la robustez del modelo, con la determinación de lo que se ha definido como índice de robustez, índice que indica lo cerca que el modelo está del óptimo, siendo el modelo ideal aquél con un índice de robustez igual a 1, indicativo de que los errores coordinados respecto a todos los escenarios son cero.

Se utilizan dos modelos coordinados en el estudio de la robustez, el que se ha denominado modelo MM, que minimiza el máximo error cometido en el escenario más desfavorable, y el modelo MAD, que minimiza el error medio ponderado por la probabilidad de ocurrencia del escenario. En ambos modelos se desarrolla el estudio teniendo en cuenta dos posibilidades en el desarrollo de los escenarios posibles.

Una primera posibilidad se ejecuta estimando las rentabilidades de los bonos en cada escenario como las necesarias para que al final del período considerado la prima de riesgo de cada país sea la que se haya establecido como objetivo. Se desarrollan ambos modelos obteniéndose para cada uno de ellos dos carteras óptimas, una para una situación en la que se le da la misma probabilidad de ocurrencia a cada escenario, y una segunda, donde las probabilidades son diferentes en cada uno, dándole más peso a uno de ellos y observando cómo esto influye en el resto.

Observando los resultados, se concluye como el hecho de provocar aumentos o disminuciones en bloque en las rentabilidades de los países en la generación de los escenarios, ocasiona que el grueso de las carteras óptimas ofrecidas por los mismos no varíe en exceso, manteniéndose una influencia máxima de los bonos japoneses en cualquiera de los supuestos estudiados. Así, en el caso del modelo MM, las carteras óptimas coordinadas para todos los casos, establecen un 77% de bonos japoneses y en torno a un 14% de bonos españoles, apareciendo pequeños porcentajes por debajo del 2% de países como Italia, Portugal, Grecia o Australia. En el caso del modelo MAD, las carteras coordinadas obtenidas aumentan ligeramente el porcentaje de los bonos de Japón hasta un 79%, en detrimento de los españoles que caen al 11%. El resto de valores permanecen prácticamente sin variación. Las rentabilidades esperadas varían en ambos modelos entre el 1,7% de los escenarios más favorables, de menor rentabilidad, hasta el 2,02% de los más pesimistas. El índice de robustez se mantiene en todos los casos en torno al 89%.

A fin de intentar evitar esta situación, se desarrolla a continuación un segundo enfoque, en el que se realiza una distribución de los países objeto de estudio en tres zonas geográficas, estimando, para el desarrollo de los escenarios, de forma diferente la evolución de los intereses en cada uno de estas zonas. Se generan tres escenarios, obteniendo carteras muy similares en cada uno de ellos, estando constituidas por países de lo que se ha denominado zona Europa-Sur, circunstancia explicable por el hecho de que se han considerado en los escenarios situaciones en las que esta zona se ha mantenido en los niveles altos de rentabilidad que ya tenía, mientras que el resto de zonas han evolucionado a peor, aumentando el riesgo de invertir en ellas y primando para el modelo la inversión en países del Sur de Europa. Esto provoca que las rentabilidades en los tres escenarios estudiados se muevan entre el 6,23% del escenario es=2 y el 6,63% del es=3, con valores de riesgo en torno a 1 punto, y estando constituidas las carteras en cada uno de ellos por bonos exclusivamente de España y Grecia, con porcentajes en torno al 98% de bonos del primero y un 2% en bonos del segundo, no apareciendo el resto de países en ninguna de las carteras generadas en los escenarios propuestos.

Se prosigue con el análisis desarrollando, como antes, los modelos MM y MAD para los casos de equiprobabilidad de escenarios y distribución asimétrica de los mismos. Se produce, a tenor de los resultados obtenidos, de nuevo un vuelco en las carteras coordinadas de estos modelos, primando de nuevo, en un porcentaje muy superior al resto, los bonos japoneses, y completando la cartera con pequeños porcentajes de otros países sobre todo del Centro y Sur de Europa. Así, los bonos de Japón se mueven entre el 90% de la cartera óptima coordinada dada por el modelo MM y el 89,14% dado por la cartera coordinada del modelo MAD, ambos en situación de equiprobabilidad de escenarios. Además de los japoneses desatacan los bonos españoles con porcentajes entre el 8 y el 10%. El resto de países aparecen con pequeños porcentajes que, a excepción de Italia, que aporta un 3,7% en la cartera coordinada del modelo MM con distribución asimétrica de probabilidades, no superan el 1,5%. Destacar, en las conclusiones del desarrollo de ambos modelos coordinados, la merma que se produce en la rentabilidad esperada de las carteras óptimas dadas por ellos respecto a la que se obtendría al estudiar cada escenario por separado. Varía entre el 1,5% y el 2% del caso más pesimista, muy lejos de los valores esperados en los escenarios estudiados por separado, que estaban en torno al 6%, lo cual provoca un aumento del error coordinado y un empeoramiento, por tanto, del índice de robustez de los modelos al realizar la generación de escenarios del modo comentado, cayendo a valores en torno al 76%.

Del global de los estudios realizados a lo largo de todo el Proyecto, se puede concluir, que la inversión en bonos soberanos, dadas las actuales circunstancias económicas a nivel mundial, no está justificada dentro de lo que se podrían considerar niveles de riesgo aceptables. Hay valores obtenidos, en algunos de los casos estudiados, de carteras cuyo rendimiento estimado en el largo plazo no llega al 2%, incluyendo en ellas países como Grecia, con una calificación de CCC en las Agencias de Calificación.

Por último, como posible línea de trabajo futura, habría que hacer mención a una opción, que no ha sido objeto de estudio al exceder los objetivos planteados en este Proyecto. A través de ésta se crearían los escenarios fundamentales de cada país, analizados de manera independiente, según la evolución prevista de su economía. Esta metodología tendría que utilizarse a la hora de realizar un estudio profesional para la evaluación del riesgo de una determinada inversión. Para ello, previamente al establecimiento de los escenarios, habría que analizar en profundidad la economía de cada país, para conocer de forma exhaustiva sus condiciones económicas, su evolución y las tendencias previstas para el futuro.

## 7. Referencias.


- Canós, Martínez y Mocholi (2009). *Cálculo de escenarios para la mediana robusta cuando la demanda es incierta*. Universidad de Valencia.

- Cruz Blanco, Rafael (2007), *Análisis y modelado de la gestión del riesgo*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

- Cruz Blanco, Rafael y Cortés Achedad, Pablo (2010). Composición de carteras de inversión en títulos de renta fija utilizando modelos de optimización robusta por escenarios. *Dirección y Organización*. 68-85.

- León, T. y otros (2003). *Gestión de carteras con metodologías Fuzzy*. 27º Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Valencia.

- Lozano, Carmen (2010). *Optimización robusta de carteras de inversión mediante Spead2*. Proyecto Fin de Carrera. Universidad Carlos III de Madrid

- Meneu, Robert (2002). Formación de carteras de renta fija con escenarios sobre los tipos de interés. *Revista española de financiación y contabilidad.* 31, 1151-1177.

- Ochoa García, Sandra (2008). *El modelo de Markowitz en la teoría de portafolios de inversión.* Tesis doctoral. Instituto Politécnico Nacional de México

- Puerta, Andrés y Laniado, Henry (2010). Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios. Un análisis de la ponderación inversa al riesgo (PIR). *Lecturas de Economía.* 73, 243-273.

- Salas, Héctor (2003). La teoría de la cartera y algunas consideraciones epistemológicas acerca de la teorización en las áreas económico-administrativas. *Contaduría y Administración.*

- Varios (1999). *Actas de la reunión. VII Jornadas de la Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa*. ASEPUMA..

- Varios autores (1996). *Aplicaciones económicas de la optimización robusta.*. ASEPUMA.

- Villalba Vilá, Daniel (1998). Un modelo de selección de cartera con escenarios y función de riesgo. *Revista española de financiación y contabilidad.* 27, 613-637.

http://www.bankofcanada.ca/

http://www.bankofgreece.gr/Pages/en/default.aspx

http://www.bcb.gov.br/pt-br/paginas/default.aspx

http://www.rba.gov.au/

http://www.bde.es/bde/es/

http://www.bloomberg.com/

http://www.bportugal.pt/pt-PT/Paginas/inicio.aspx

http://www.datosmacro.com/

http://www.datosmacro.com/ratings/¿pais?

http://www.ecb.int/ecb/html/index.es.html

http://www.forexpros.es/