4 Análisis en el dominio de la frecuencia

4.1 Análisis de Fourier

Hay dos formas de realizar el análisis en frecuencia, una es mediante el analizador FFT y otra es mediante el filtrado digital (que se describe en el apartado 4.6 Analizadores). A continuación se muestra un diagrama de bloques para el análisis FFT. El principio del Análisis de Fourier es que toda función periódica puede representarse mediante una serie de senos y cosenos.

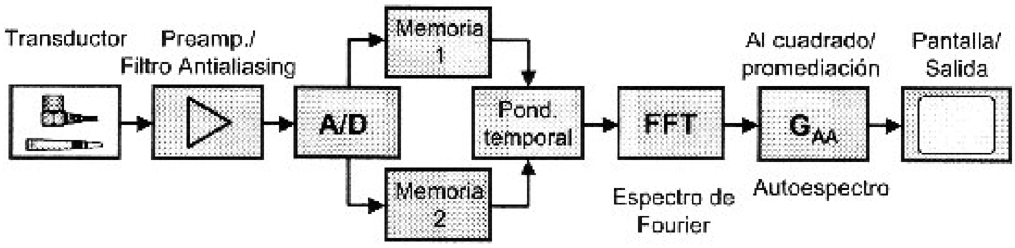

Figura 4.1 Diagrama de bloques para el análisis de Fourier.

La medida de las vibraciones proporciona un nivel de medida lo largo de un rango de frecuencias. Para obtener los componentes individuales de cada frecuencia es necesario realizar un análisis en frecuencia. Para este fin se emplea un filtro que sólo permita pasar aquellas partes de la vibración que están contenidas en un estrecho rango de frecuencias. El ancho de banda del filtro empleado se mueve continuamente a lo largo de todo el rango de interés para obtener los niveles de vibración separados para cada banda de frecuencias.

Si se puede elegir el parámetro para hacer el análisis en frecuencia se debe elegir aquel que tiene un espectro de frecuencia lo más plano posible. Esto se debe a que si el espectro no cumple esto, la contribución de los componentes por debajo de la media se notarán menos. Y en el caso de medidas globales, las pequeñas componentes pasarán desapercibidas. Una ventaja de los acelerómetros es que su salida se puede integrar para obtener las señales de velocidad y desplazamiento.

La señal que manda el transductor pasa por un filtro o banco de filtros y al mismo tiempo se barre el rango de frecuencias de interés, así es posible obtener una medida del nivel de la señal a diferentes frecuencias. El resultado es el espectro en frecuencia. Esto mismo se puede hacer digitalmente mediante la transformada de Fourier.

Una vez se ha elegido la escala de frecuencias, el próximo paso es elegir la forma de los filtros individuales de que se van a usar para el análisis.

Cuanto más estrecho sea el ancho del filtro empleado, más detallada será la información obtenida pero más tiempo requiere el análisis. El ancho del filtro debe ser elegido de manera que los componentes importantes en frecuencia se puedan distinguir entre ellos. Sin embargo, tienen que tener una longitud suficiente para hacer el análisis en un tiempo razonable.

Una vez que se ha elegido el rango de frecuencias, el siguiente paso es elegir la forma de cada uno de los filtros individuales que se van a emplear para hacer el análisis. En los filtros paso-banda ideales sólo se permite el paso de las señales con la frecuencia que indica el filtro, pero esto en realidad no es así. Realmente, las señales fuera de este rango también pasan por el filtro, aunque atenuadas. Hay dos tipos de filtros paso-banda, los que tienen un ancho constante para todo el rango de frecuencias y los que tienen un ancho relativo, que depende de la frecuencia central. En estos la frecuencia central determina el límite inferior y superior. Para los primeros se debe emplear una escala lineal y para los otros una escala logarítmica. Los primeros se usan más para medidas de vibraciones debido a que dichas señales suelen contener armónicos que son más fáciles de identificar en dicha escala. Los otros se suelen emplear para las medidas acústicas, porque dan una buena aproximación de cómo responde el oído humano.

Hay una relación muy importante en el análisis en frecuencia, que se muestra a continuación. En ella B representa el ancho de banda del filtro (determina la resolución en frecuencia) y T el tiempo que se está midiendo o tiempo de registro. A esta relación se le llama a veces Principio de Incertidumbre.

$$B\,T \geq 1 \tag{4.1.1}$$

Para propósitos de diagnóstico el análisis en frecuencia es necesario. Algunas componentes del espectro de frecuencias pueden ser inmediatamente relacionadas con las fuerzas que ejercen ciertas partes de la máquina o movimientos de la propia máquina. Normalmente aparecen armónicos de alguna frecuencia natural, que se caracterizan por ser múltiplo de dicha frecuencia.

El análisis FFT/DFT se hace en bloques de datos que son los registros temporales, es decir, cada cálculo FFT/DFT es una transformación de un registro de tiempo de duración determinada. La señal está así truncada por una ventana temporal.

Hay dos tipos de promediación, una es lineal en la que todos los instantes de tiempo reciben el mismo peso, y la otra es exponencial en la ciertos instantes son considerados más importantes.

A veces interesa hacer el análisis con cierto solapamiento en el filtrado digital, con el fin de que no se pierdan datos y para obtener una ponderación global plana, es decir, que todos los instantes de tiempo reciben la misma importancia.

4.2 FFT

Una tranformada de Fourier es una operación matemática que transforma una señal en el dominio del tiempo a otra en el dominio de la frecuencia y viceversa. En el dominio del tiempo la señal se expresa con respecto al tiempo, y en el dominio de la frecuencia se expresa con respecto a la frecuencia.

Una Transformada de Fourier Discreta (DFT) es el nombre dado a la transformada de Fourier cuando se aplica a una señal digital (discreta) en vez de una analógica (continua). Una Transformada de Fourier Rápida (FFT) es una versión más rápida de la DFT que puede ser aplicada cuando el número de muestras de la señal es una potencia de *2*. Un cálculo de FFT toma aproximadamente $N \cdot log_2(N)$ operaciones, mientras que DFT toma aproximadamente N^2, por lo que FFT es significativamente más rápida. Hay veces en las que resulta interesante emplear el relleno de ceros. Esto significa que se agregarán ceros al principio y/o al final de la secuencia de dominio de tiempo. Esta adición no afecta al espectro de frecuencia de la señal. El relleno de ceros es una buena idea cuando la longitud de la señal no es una potencia de *2*. Si se agregan suficientes ceros, se acelera el cálculo de la FFT, además de incrementar la resolución de la frecuencia de una FFT.

Las funciones FFT son simétricas, lo cual significa que su salida incluye frecuencias negativas que existen puramente como propiedades matemáticas de la Transformada de Fourier. La primera mitad de la salida de FFT contiene frecuencias desde 0 Hz hasta la frecuencia de Nyquist, y la segunda mitad es una imagen con frecuencias negativas.

Una señal periódica y continua en el tiempo con período *T* se puede representar mediante series de Fourier en la forma:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_T t) + b_n sen(n\omega_T t)) \qquad (4.2.1)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\omega_T &= \frac{2\pi}{T} \\
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega_T t)dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)sen(n\omega_T t)dt \\
para \quad & n = 1,2,3...
\end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

En el analizador se calculan los coeficientes a_n y b_n, que son los llamados coeficientes espectrales. Pero se tiene una señal digital discreta, no continua. Debido a esto hay que emplear la Transformada de Fourier Discreta (DFT).

La versión discreta de la transformada de Fourier se obtiene mediante las siguientes expresiones, en las que *N* representa el número de muestras que se toman de la señal analógica.

$$x_k = x(t_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} (a_i \cos(\frac{2it_k\pi}{T}) + b_i sen(\frac{2it_k\pi}{T})) \qquad (4.2.3)$$

donde:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$
$$a_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \cos(\frac{2ik\pi}{N}) \qquad (4.2.4)$$
$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k sen(\frac{2ik\pi}{N})$$

En este caso los coeficientes a calcular son a_i y b_i. Si hay N muestras, el sistema de ecuaciones anterior se puede escribir en forma matricial llamando X al vector de muestras, a al vector de coeficientes a determinar, C a la matriz que contiene los armónicos. Así:

$$X = C\, a \Rightarrow a = C^{-1} X$$

El método utilizado consiste en invertir la matriz C y se conoce como Transformada Rápida de Fourier (FFT).

4.3 *Aliasing*, *leakage* y otros

4.3.1 Ruido

El ruido es una señal aleatoria, generalmente de alta frecuencia pero con un ancho de banda también muy amplio, que se superpone a la señal que se está midiendo. Este ruido distorsiona la señal, y si la relación ruido-señal es muy alta, puede falsear totalmente los datos. El ruido puede ser debido a la red eléctrica, a movimientos de los cables y de las conexiones, a interferencias electromagnéticas producidas por los cables o al equipo que se está usando. Se puede evitar usando filtros.

4.3.2 *Aliasing*

El problema del *aliasing* es inherente al muestreo de una señal cuyo contenido en frecuencia se extiende hasta altas frecuencias. Para poder detectar una frecuencia determinada f es necesario muestrear de forma que se tengan al menos dos puntos por ciclo, es decir, la frecuencia de muestreo f_s debe ser $f_s > 2f$. Fijada una f_s, las frecuencias mayores de $f_s/2$ (frecuencia de Nyquist) aparecerán en la señal muestreada como frecuencias menores de $f_s/2$.

Este problema resulta de la discretización de una señal continua. Con este proceso, la existencia de frecuencias muy altas puede ser mal interpretada si la velocidad de muestreo no es lo suficientemente elevada.

Para evitar el *aliasing* se emplea un filtro de paso-bajo. Pero los filtros no son perfectos, por lo que las medidas de frecuencia próximas a la de Nyquist se deben rechazar. En las figuras que aparecen a continuación se muestran dos ejemplos de las distorsiones que produce el *aliasing* sobre los espectros.

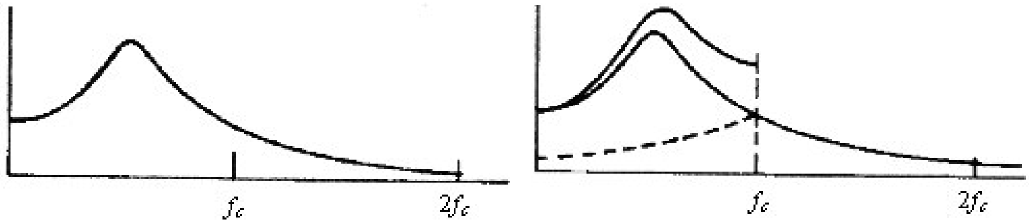

Figura 4.2 Distorsión producida por el *aliasing* en una señal con frecuencias superiores a la de Nyquist.

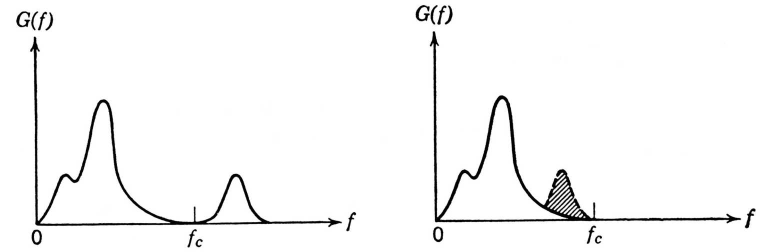

Figura 4.3 Comparación entre un autoespectro real y el mismo con *aliasing.*

Es ocasionado por el muestreo en el tiempo. Se soluciona empleando un filtro *anti-aliasing* (f_c) y una frecuencia de muestreo de $f_s > 2f_c$. El filtro *anti-aliasing* lo que hace es eliminar las componentes de alta frecuencia de las señales analógicas medidas.

4.3.3 *Leakage*

Es ocasionado por la limitación temporal de la medida. La señal analógica se muestrea con un número finito de puntos, *N*, y esta es la razón de que aparezca este problema llamado *leakage*. Se debe a que la Transformada de Fourier Discreta asume que la señal es periódica en la longitud de muestreo. Se puede evitar mediante el empleo de funciones ventana, que multiplican a la señal original (se estudian en el apartado 4.5) o bien aumentando la resolución en frecuencia.

Puede producir un error significativo cuando la respuesta tiene resonancias muy estrechas comparadas con la resolución empleada para las frecuencias, apareciendo en el análisis más anchas y menos puntiagudas.

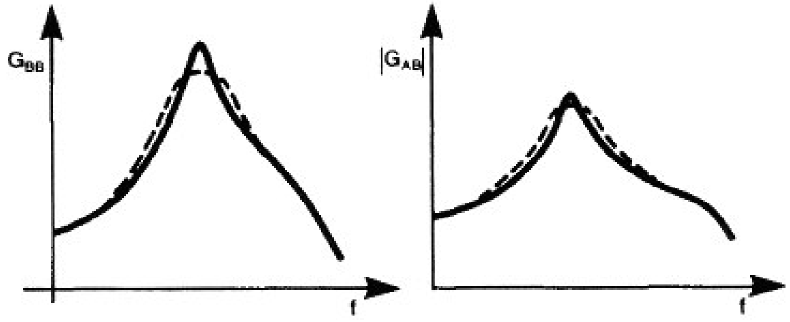

Figura 4.4 Función distorsionada por el *leakage.*

4.3.4 Efecto *Picket Fence*

Es ocasionado por el muestreo en frecuencia y se produce por la repetición periódica. Se soluciona mediante el empleo de la ventana apropiada y aumentando la resolución en frecuencia.

Siempre que se hace un análisis con filtros para ciertas frecuencias discretas, el espectro se mide para aquellas frecuencias centrales de los filtros con una resolución dada por el ancho de banda de los filtros. El efecto de medir sólo el espectro para frecuencias discretas se conoce como Efecto *Picket Fence*. Se obtienen errores tanto en la amplitud como en las frecuencias del espectro a las que se producen.

4.4 Filtros

Un filtro es un instrumento que transmite una señal de manera que su salida es el resultado de hacer la convolución de la señal de entrada con la función de respuesta a un impulso unitario (*h(t)*) del filtro. En el dominio de la frecuencia se corresponde con una multiplicación (compleja) del espectro de frecuencia de la señal y la función de respuesta en frecuencia del filtro. Los filtros se caracterizan por su respuesta a un impulso unitario en el dominio del tiempo, y por su repuesta en frecuencia en el dominio de la frecuencia. Ambas caracterizaciones contienen la misma información, relacionadas por medio de la Transformada de Fourier.

Los filtros se emplean para atenuar partes no deseadas de las señales en el dominio de la frecuencia. Se suelen emplear con señales procedentes de acelerómetros y con transductores de presión y fuerza, con el fin de eliminar la distorsión que se produce a altas frecuencias. Sin embargo, si no se eligen adecuadamente pueden producir una distorsión adicional.

Un filtro tiene la propiedad de eliminar ciertas frecuencias de una señal y dejar pasar las demás sin alterarlas. El funcionamiento de los filtros en realidad es más complicado y hay más aspectos a tener en cuenta. Existen varios tipos de filtros según las frecuencias que deja pasar:

- El filtro paso-bajo elimina las frecuencias por encima de cierto valor.

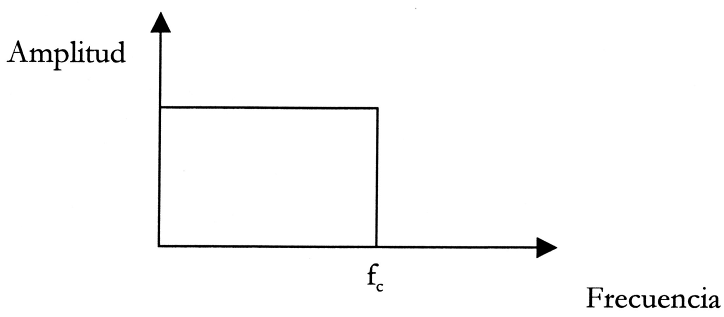

Figura 4.5 Filtro paso-bajo.

- El filtro paso-alto elimina las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte.

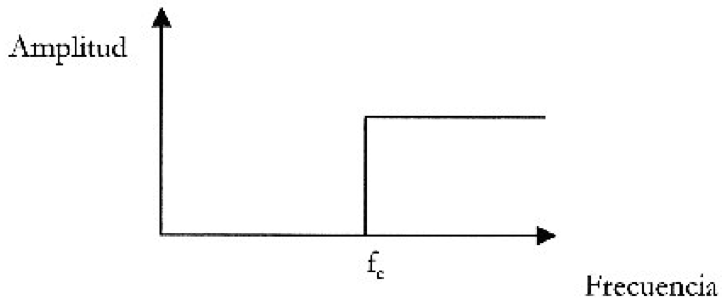

Figura 4.6 Filtro paso-alto.

- El filtro paso-banda deja pasar sólo una banda definida por dos frecuencias. Permitirá pasar todas las componentes de la señal a lo largo de su banda de frecuencias permitidas, y atenuará completamente todas las demás componentes a otras frecuencias.

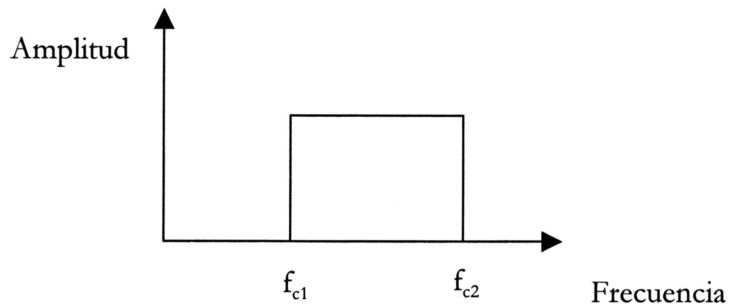

Figura 4.7 Filtro paso-banda.

- El filtro rechazo de banda elimina las frecuencias que se encuentran entre dos valores.

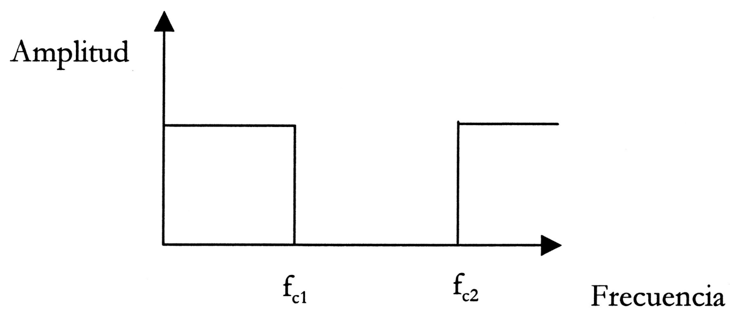

Figura 4.8 Filtro rechazo de banda.

Existe una gran diversidad de tipos de filtros analógicos que utilizan distintas funciones de transferencia, y cada uno de ellos se puede construir con distintos grados de complejidad. Esto provoca que varíen de uno a otro sus características.

Los filtros se caracterizan en el dominio de la frecuencia por cuatro parámetros: frecuencia central, ancho de banda, rizado y selectividad.

La frecuencia central f_0 de un filtro se define como el valor medio geométrico o aritmético de los valores inferior f_i y superior f_u de los límites de frecuencia del filtro. La media geométrica, que se muestra en la expresión 4.4.1, se usa para los filtros con un ancho de banda con porcentaje constante, y la aritmética, en la 4.4.2, para filtros con un ancho de banda constante. Las frecuencias centrales para los análisis de FFT/DFT se determinan mediante la elección del rango de frecuencias y el número de líneas o filtros en el análisis.

$$f_0 = \sqrt{f_u f_i} \quad (4.4.1)$$

$$f_0 = \frac{f_u + f_i}{2} \quad (4.4.2)$$

El ancho de banda de un filtro da información sobre su habilidad para separar componentes de amplitudes similares, y así determina la resolución del análisis.

La selectividad de un filtro indica la capacidad que tiene para separar componentes de frecuencias próximas pero con niveles diferentes. El parámetro básico para la selectividad es el factor de forma, que se define como la relación entre el ancho de banda del filtro a una atenuación de 60 dB y el correspondiente a 3 dB.

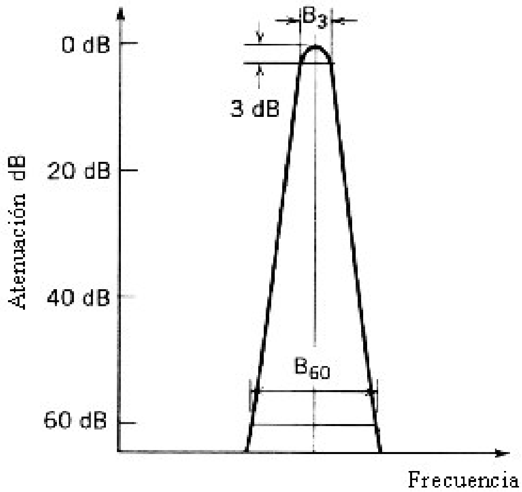

Figura 4.9 Representación de los parámetros que definen el factor de forma de un filtro.

$$Factor\ de\ forma = \frac{B_{60}}{B_3} \quad (4.4.3)$$

La cantidad de rizado en la banda que permite pasar el filtro caracteriza la incertidumbre con la que una señal puede ser determinada.

Los filtros reales se desvían de los ideales en varios aspectos. El ancho de banda real de un filtro se puede obtener mediante el ancho de banda efectivo de ruido o usando el ancho de banda de 3 dB. El llamado ancho de banda efectivo de ruido de un filtro se define como el ancho de un filtro ideal que transmitiría la misma energía sometido a una fuente de ruido blanco. El ruido blanco se caracteriza por excitar todas las frecuencias con la misma energía, por lo que su espectro en frecuencias será plano y extendido a todas las frecuencias. El ancho de banda de 3 dB del filtro se obtiene de los puntos en los que el nivel se encuentra 3 dB por debajo del nivel de referencia de la amplitud. En la mayoría de los filtros la diferencia entre ambos anchos de banda es muy pequeña.

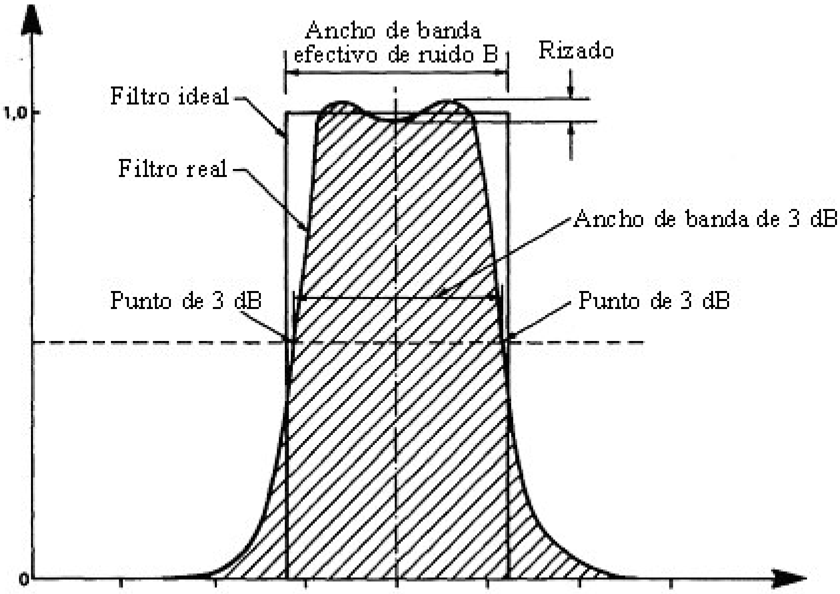

Figura 4.10 Comparación entre el filtro real y el ideal.

En general, conviene saber que la utilización de filtros afecta a la señal de la siguiente manera:
- se produce un retraso en la señal proporcional al orden del filtro usado.
- se produce un desfase entre las frecuencias de la señal.
- se tiene un transitorio al inicio, con una duración proporcional al orden del filtro empleado. Todos los filtros poseen un tiempo de respuesta durante el cual su salida difiere de la original, debido a las características intrínsecas del filtro.
- como no existen filtros ideales, al filtrar una señal no se garantiza la eliminación total de las frecuencias superiores a la frecuencia de corte.
- hay que decidir cual de los efectos de un filtro es prioritario, ya que aquellos que tienen mejor comportamiento en cierta característica se comportan peor ante otra.

Para eliminar el efecto de *aliasing* se emplea un filtro paso-bajo con una frecuencia de corte menor o igual a la frecuencia de Nyquist. Un filtro digital no se puede emplear como *anti-aliasing* porque se aplica después del muestreo y los problemas de *aliasing* surgen precisamente en el muestreo. Para eliminar el ruido se escoge un filtro paso-bajo con una frecuencia de corte tal que haga desaparecer el ruido. Si se dan los dos fenómenos juntos, se elegirá un filtro con la menor frecuencia de corte.

4.5 Ventanas

Hay distintos tipos de ventanas según la aplicación que se vaya a desarrollar. Así, se puede encontrar la ventana Rectangular, la *Hanning*, la Transitoria, etc. Son funciones que se aplican a la señal muestreada para poder analizarla. Cada una de las ventanas enfatizará sobre partes de la señal de cierta manera, obteniéndose así diferentes espectros como resultado.

Las ventanas se emplean para que las señales muestreadas cumplan mejor los requisitos de periodicidad de la Transformada de Fourier, además de minimizar la potencial distorsión que pueden producir los efectos del *leakage*.

En general las ventanas producen una reducción de la precisión de la amplitud del pico medido de la función, y aparecerá como si hubiera un amortiguamiento mayor del que realmente hay en la estructura.

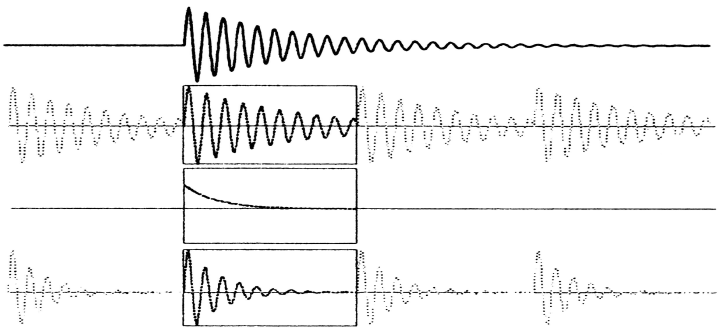

Figura 4.11 Representación de la señal muestreada, su repetición periódica y una ventana exponencial, junto con el resultado de aplicar esta ventana a la repetición periódica de la señal muestreada.

A continuación se describen varios tipos de ventanas. En todas ellas se utiliza *W(t)* como función de ponderación, *T* como duración del registro y *t* como variable temporal.

4.5.1 Rectangular o Uniforme

Se caracteriza porque no realiza ningún tipo de ponderación en el tiempo que dura el registro. Su función de ponderación es la siguiente:

$$\begin{aligned} W(t) &= 1 \,,, \, 0 \leq t < T \\ W(t) &= 0 \,,, \, \textit{en otro caso} \end{aligned} \qquad (4.5.1)$$

que tiene la siguiente forma:

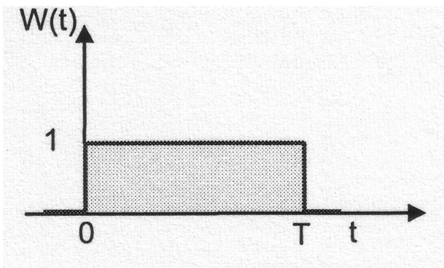

Figura 4.12 Función de ponderación de una ventana Rectangular o Uniforme.

Se emplea para analizar transitorios de duración menor que el tiempo de registro *T*. Debido a su forma, todas las partes de la señal dentro del rango de frecuencias del filtro reciben el mismo valor que se mide, ya que no se hace ningún tipo de ponderación. En el dominio de la frecuencia el ancho de banda de la señal es mayor que el de los filtros, ya que la señal es menor que *T*, y por tanto las características de los filtros no tendrán influencia en los espectros calculados de la señal transitoria.

En general, sólo se debe emplear en aquellos casos en los que no sea necesario realizar un filtrado para eliminar el *leakage*. Esta ventana se usa para medida de transitorios excepto en los casos especiales en los que se emplea la ventana Exponencial. Sólo se puede emplear para el análisis de señales sinusoidales cuando sus frecuencias coincida exactamente con las frecuencias centrales de los filtros.

No se debe emplear para señales periódicas. Sin embargo hay ciertas señales periódicas (señales pseudoaleatorias) en las que esta ventana proporciona resultados excelentes. Dichas señales se caracterizan por ser periódicas con la longitud de su período ajustado a la longitud del registro T del análisis. Todas las componentes de la señal coincidirán por tanto con las frecuencias centrales de los filtros y el análisis estará libre de *leakage*.

En cambio, no se debe emplear para el análisis de señales deterministas por dos razones:
- tiene una selectividad baja.
- tiene un rizado relativamente elevado.

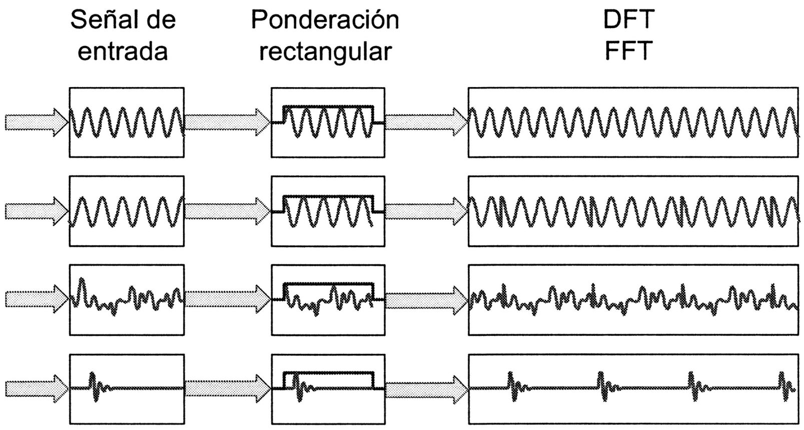

Figura 4.13 Ejemplos del funcionamiento de la ventana Rectangular sobre diferentes señales.

4.5.2 *Hanning*

Se caracteriza porque realiza una ponderación que da menor importancia a los datos tomados al principio y al final del muestreo. Su función de ponderación se puede expresar con la siguiente fórmula:

$$W(t) = 1 - \cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) = 2sen^2\left(\frac{t\pi}{T}\right),, 0 \le t < T$$
$$W(t) = 0,, \textit{en otro caso} \tag{4.5.2}$$

Esta ventana es la suma de una ventana rectangular y otra con igual amplitud y forma de coseno. También puede ser descrita como un período de una función seno al cuadrado. En ocasiones también se define como una función coseno al cuadrado si la ventana comienza para un valor de $t = -\frac{T}{2}$. Tiene la siguiente forma:

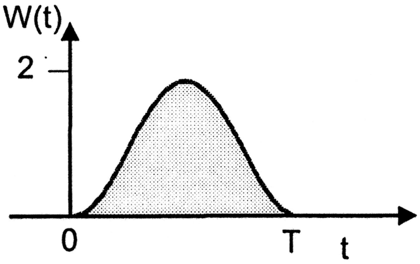

Figura 4.14 Función de ponderación
de una ventana *Hanning*.

Es una ventana de uso general y fácil de implementar. Presenta una mejor selectividad, mejora el rizado de la señal y el *leakage*, y se debe emplear en la mayoría de los casos en los que se quieran analizar señales continuas. En general, esta ventana es recomendable para los análisis de señales periódicas. Es la mejor ventana para realizar análisis de sistemas en los que la excitación sea una señal aleatoria. Se emplea para ciertos casos especiales de señales transitorias, en las que hay varios pulsos que disminuyen rápidamente dentro del período *T* de la ventana. Para otros casos de señales transitorias hay que tener mucho cuidado.

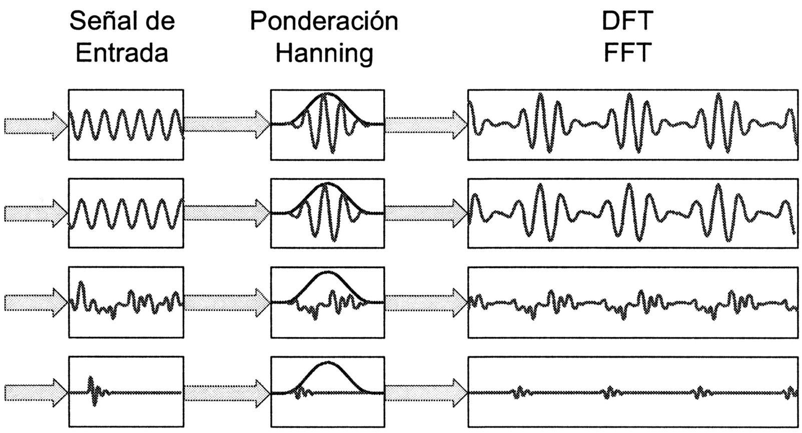

Figura 4.15 Ejemplos del funcionamiento de la ventana *Hanning* sobre diferentes señales.

4.5.3 *Kaiser-Bessel*

Su función de ponderación es la siguiente:

$$W(t) = 1 - 1.24\cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) + 0.244\cos\left(\frac{4t\pi}{T}\right) - 0.00305\cos\left(\frac{6t\pi}{T}\right),, 0 \le t < T \tag{4.5.3}$$

$$W(t) = 0 \,,, \textit{en otro caso}$$

Tiene una excelente selectividad, por lo que su principal uso consiste en la separación de componentes en frecuencia que se encuentran muy próximas y que tienen niveles diferentes.

Se debe emplear para señales periódicas que requieren una selectividad en frecuencia buena. No debe usarse para señales transitorias. Proporciona una buena resolución en frecuencia para señales aleatorias pero no se debe emplear con carácter general, ya que su velocidad es mucho menor que la de ventana *Hanning*.

Para el análisis de señales periódicas esta ventana probablemente sea la mejor elección. Los inconvenientes respecto a la ventana *Hanning* son que es más lenta, es decir, se tarda más tiempo en realizar el análisis, y que si se emplea con una excitación aleatoria puede producir un *leakage* mucho mayor en las resonancias y anti-resonancias de la señal.

4.5.4 *Flat Top*

Su función de ponderación tiene la siguiente expresión:

$$W(t) = 1 - 1.93\cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) + 1.29\cos\left(\frac{4t\pi}{T}\right) - 0.388\cos\left(\frac{6t\pi}{T}\right) + \\ + 0.0322\cos\left(\frac{8t\pi}{T}\right),, 0 \le t < T \qquad (4.5.4) \\ W(t) = 0 ,, \textit{en otro caso}$$

Presenta un factor de rizado y un error en la medida de amplitudes en frecuencia despreciables. No tiene una selectividad tan buena como la ventana anterior. Esta ventana se ha diseñado para propósitos de calibración principalmente, aunque para la mayoría de las aplicaciones es preferible usar la ventana *Hanning*.

Es excelente para determinar amplitudes pero muy mala para obtener cierta resolución en frecuencia con señales periódicas. Sí es efectiva en la medida de amplitudes cuando las componentes en frecuencia de la señal están separadas varias líneas (al menos cinco o seis). No se recomienda su uso para señales aleatorias ni transitorias.

4.5.5 Transitoria

Es la que se debe emplear para la medida de transitorios de señales, como puede ser el caso de los impactos. Esta ventana toma las medidas sin ponderar mientras dura el contacto y cae a cero al terminar el registro. Esta ventana suele tener un comienzo suave. Se usa para el análisis de transitorios cortos o para ciertas partes de una señal que se quieran analizar más en detalle.

Esta ventana es similar a la Rectangular tanto en su uso como en su comportamiento, aunque es más corta que la longitud del registro *T*. Si se elige esta ventana se puede definir tanto el comienzo como la duración de la misma según la necesidad de cada caso concreto. El registro tomado fuera de la ventana se asignará como cero.

4.5.6 Exponencial

La función de ponderación de la ventana Exponencial se define con la siguiente expresión:

$$W(t) = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \ ,, t_0 \le t < T \quad y \quad 0 \le \tau < T$$
$$W(t) = 0 \ ,, \textit{en otro caso} \tag{4.5.5}$$

donde τ es la constante de tiempo e indica la longitud de la ventana, y t_0 indica su desplazamiento.

El uso principal de esta ventana es en el análisis de transitorios de mayor duración que el registro medido *T*. Las señales que presentan una disminución exponencial de la amplitud se deben ponderar con esta ventana. Este es el caso habitual de la respuesta de estructuras poco amortiguadas cuando se excitan mediante un impacto. Si la señal no está suficientemente atenuada (menos de 40 dB) al final del registro, el truncamiento de la señal producirá cierta cantidad de *leakage*, dando como resultado un espectro con un mayor rizado. Aplicando la ventana Exponencial a este caso se fuerza a que la amplitud se atenúe lo suficiente al final del registro y así se puede predecir la cantidad de *leakage* que se produce, y compensarlo mediante la siguiente expresión en el dominio de la frecuencia:

$$\Delta f_{3dB\ se\tilde{n}al} = \Delta f_{3dB\ medida} - \Delta f_{3dB\ ventana}$$

4.5.7 Comparaciones entre ventanas

En la siguiente tabla se pueden comparar los valores de amplitudes máxima y mínima, así como la duración efectiva para las ventanas Rectangular, *Hanning*, *Flat Top* y *Kaiser-Bessel*. La duración efectiva se puede interpretar como una medida de la energía de la función de ponderación.

	Amplitud máxima	Amplitud mínima	Duración efectiva
Rectangular	1	1	1·T
Hanning	2	0	0.375·T
Kaiser-Bessel	2.48	0	0.291·T
Flat Top	4.64	-0.33	0.175·T

Tabla 4.1 Comparación de los valores de duración efectiva y ampitudes máxima y mínima para las ventanas Rectangular, *Hanning*, *Kaiser-Besel* y *Flat Top.*

En la Figura 4.16 se muestra una comparación gráfica de estas cuatro ventanas.

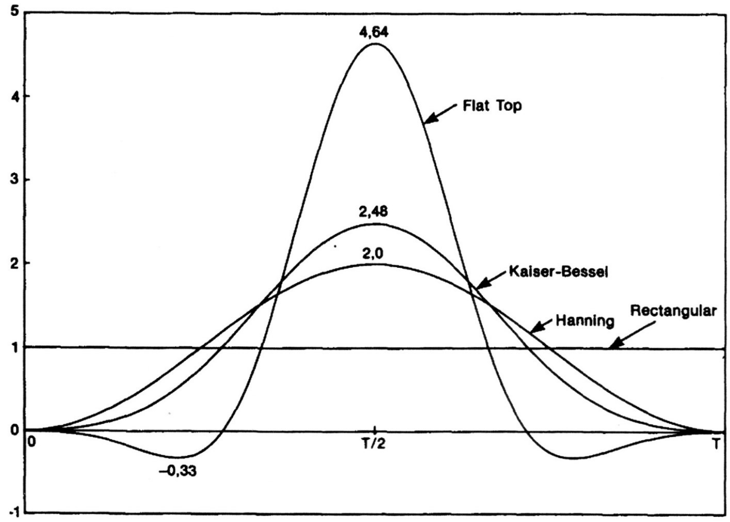

Figura 4.16 Representación conjunta de las ventanas Rectangular, *Hanning*, *Kaiser-Besel* y *Flat Top.*

Existen ventanas diferentes para usos diferentes y hay que elegirlas cuidadosamente para disminuir los errores. *Hanning* y Uniforme son las más habituales.

4.6 Analizadores

Las señales analógicas de entrada se filtran, se muestrean y se digitalizan para obtener una serie de registros digitales. La relación de muestreo y la longitud de los registros determinan el rango de frecuencias y la resolución del análisis.

Cuando la señal de respuesta ha sido acondicionada se conduce a un analizador para su procesado. Hay dos tipos de analizadores: analógicos y digitales. Los analógicos prácticamente están en desuso puesto que los digitales tienen mayores rendimientos y versatilidad, además cada vez se usan más los sistemas de adquisición de datos por medio de ordenadores. También suponen una reducción significativa del coste. Debido a esto, el trabajo aquí desarrollado se centra en los analizadores digitales.

Los analizadores digitales utilizan muchos procesos básicos. En primer lugar, el analizador muestrea una señal de duración T segundos usando un convertidor analógico/digital que muestrea con una relación constante. Es evidente que la señal digital reproducirá mejor a la analógica cuanto menor sea la relación de muestreo, aunque al reducir esta se incrementan los costes computacionales. Lo segundo es suponer que la señal tomada es periódica de período T. Así se pueden calcular los componentes de la serie de Fourier. En tercer lugar, los analizadores manipulan dichos componentes para producir diferentes tipos de representaciones del análisis en frecuencia.

4.6.1 El proceso de muestreo temporal

El proceso realizado por un analizador se basa en los conceptos de las series de Fourier revisados en apartados anteriores. En la Figura 4.17 se muestra el proceso de obtención de una señal analógica a partir de su correspondiente señal digital.

La FFT calcula las componentes complejas de la serie de Fourier usando N puntos que se supone que representan la evolución temporal de la señal, cuyo período es T. El proceso de cálculo de la FFT requiere que N sea un múltiplo de 2.

El proceso de muestreo se define en términos de una ventana que controla la longitud de la muestra y una función de muestreo que controla el momento en el que se toma cada muestra de la señal analógica. La ventana que se elige determina las características del filtro del analizador, que se puede cambiar en función de si se quiere dar más importancia a unos puntos que a otros de la señal muestreada.

La función de muestreo está formada por un conjunto de pulsos de área unidad, con una duración τ y separados entre sí t_s segundos. La duración de cada pulso τ es muy pequeña en comparación con el tiempo que transcurre entre cada pulso t_s. Por tanto, la frecuencia de muestreo se puede definir como:

$$f_s = \frac{1}{t_s} \tag{4.6.1}$$

La elección de la frecuencia de muestreo es un punto crítico para tratar el *aliasing*. Hay que tener mucho cuidado y hacer el muestreo con una frecuencia suficiente para evitar este problema.

La señal digital obtenida está relacionada con la ventana empleada, la función de muestreo y la señal original, de la siguiente forma:

$$f(t) = w(t)s(t)x(t) \tag{4.6.2}$$

El proceso de muestreo genera una señal que es producto de la señal original, de la ventana empleada y de la función de muestreo. Esta multiplicación en el dominio del tiempo es equivalente a una convolución en el dominio de la frecuencia. Este proceso básico conduce a errores de *aliasing* y al concepto de *leakage*, debido a que se intenta expresar todas las frecuencias en término sólo de unos pocos componentes de la serie de Fourier. Los errores por *aliasing* pueden ser controlados en principio usando filtros *anti-aliasing* electrónicos en la señal antes de ser muestreada por el analizador. Hay que tener en cuenta que los filtros *anti-aliasing* pueden alterar significativamente la señal que está siendo analizada. Una importante consecuencia de la integral de convolución es el hecho de que la ventana empleada controla las características del filtro digital.

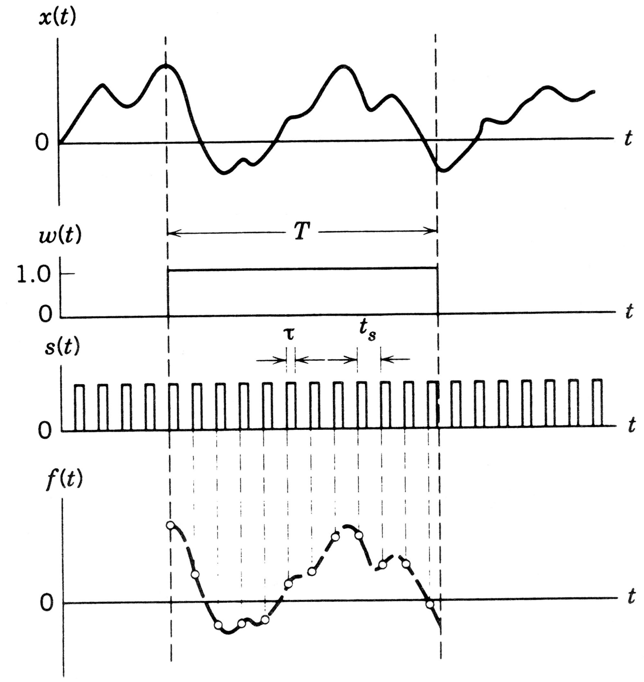

Figura 4.17 Proceso de obtención de la señal digital *f(t)* a partir de la analógica *x(t)*, mediante el uso de la ventana *w(t)* y la función de muestreo *s(t)*.

donde la señal original o analógica se representa por *x(t)*, la ventana por *w(t)*, el período de muestreo por *T*, la función de muestreo por *s(t)*, la señal digital por *f(t)*, el tiempo entre los pulsos de muestreo por t_s y la duración de cada pulso de muestreo τ.

4.6.2 Operaciones del analizador digital

El funcionamiento se describe a continuación. El primer elemento por el que pasa la señal es un atenuador, que se usa para ajustar el nivel de la señal en su conjunto, para que sea compatible con el rango de voltaje del convertidor analógico/digital que es el segundo elemento. Es deseable que dicho convertidor esté funcionando cerca de su máximo nivel, si bien no debe sobrepasarlo. Muchos de los convertidores poseen una indicación para advertir de esta última situación. La salida del convertidor es la señal *y(t)*, que es diferente de la *x(t)* debido al filtro *anti-aliasing* y a la ganancia del atenuador. Se suele introducir un pequeño nivel de ruido aleatorio con el fin de reducir u ocultar el ruido debido al funcionamiento del convertidor. A continuación el convertidor muestrea la señal para producir series de números que son adquiridos a la frecuencia de muestreo del convertidor. Estos números se almacenan en la memoria hasta que ésta se complete.

Cuando la memoria está llena, los números se multiplican por la ventana y se almacenan en la memoria de análisis como *f(t)*. Los calculadores de espectros digitales procesan la señal que está almacenada en la memoria de análisis, usando un programa para generar las componentes de la serie de Fourier, y luego guardan los espectros calculados en la memoria de espectros promediados. Por último sólo queda representar dichos espectros. Los analizadores sólo representan el lado de las frecuencias positivas de los espectros.

En la Figura 4.18 se muestra un esquema del filtrado digital que se ha descrito.

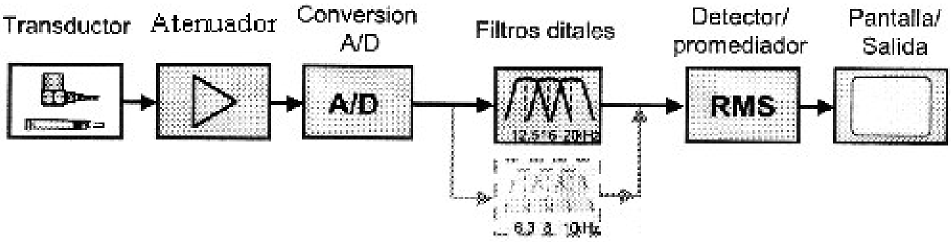

Figura 4.18 Diagrama de bloques para el análisis mediante filtrado digital.

4.6.3 Análisis con solapamiento y zoom

El solapamiento de señales se emplea con el fin de reducir el tiempo de análisis. La idea de solapar las ventanas se muestra en la Figura 4.19. En dicha figura la ventana de referencia se extiende de 0 a *T*, y van comenzando otras cada *rT* segundos. *r* se define como el factor de cambio, y la cantidad de solapamiento de la ventana es *OL* (*'overlap'*). Esta última cantidad se suele medir en tanto por ciento, aunque se define como sigue:

$$OL = (1 - r) \tag{4.6.3}$$

Dependiendo del tipo de ventana y del énfasis que se le quiera dar a cada parte de la señal, hay que emplear un cierto solapamiento u otro. Se suelen emplear cantidades de solapamiento entre 2/3 y 3/4.

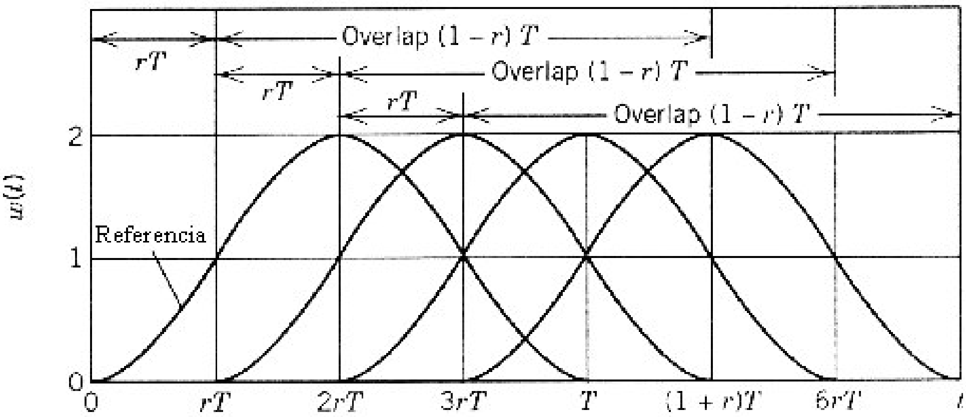

Figura 4.19 Definición de los parámetros para el análisis con solapamiento.

Se puede solapar cualquier tipo de ventanas, pero la *Hanning* es ideal para este propósito.

Es necesario hacer un zoom, es decir, aumentar la resolución en frecuencia del analizador en los siguientes casos:
· señales que contienen muchas componentes en un rango de frecuencias relativamente estrecho.
· señales que presentan dos o más picos de resonancia relativamente próximos.
· señales que poseen muchos armónicos de una o más frecuencias fundamentales.

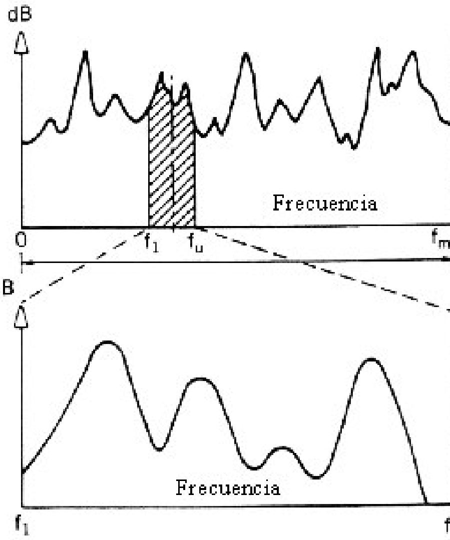

Figura 4.20 Ejemplo de zoom en el análisis.

4.7 Análisis FFT de dos canales

El principal objetivo en este tipo de medidas es obtener las relaciones entre las entradas y las salidas. Un análisis FFT de dos canales, uno para la entrada y otro para la salida del sistema, permite calcular una función que describe el comportamiento dinámico del sistema, suponiendo que este sea lineal. Esta función caracteriza el sistema independientemente de las señales y se puede usar para predecir la respuesta del sistema conociendo la entrada, o calcular la entrada que producirá una respuesta dada. La validez de estos resultados depende de la calidad del modelo. Una aplicación esencial de este análisis de dos canales es medir la validez del modelo lineal, para lo cual se emplea una función llamada función de coherencia. La función que describe el sistema en el dominio de la frecuencia se llama función de respuesta en frecuencia (FRF). Esta función representa el mejor ajuste en el sentido de mínimos cuadrados del sistema analizado.

Se obtienen medidas simultáneas en la entrada y en la salida. Se miden los autoespectros de entrada y salida, y el espectro cruzado entre la entrada y la salida. A partir de estas medidas básicas se pueden calcular muchas otras funciones.

A continuación se muestran las funciones empleadas en el análisis de sistemas, así como las definiciones de sus parámetros.

· *a(t), b(t)*: representan las señales en el dominio temporal, son funciones que describen la entrada o la salida del sistema.

· *A(f), B(f)*: son los espectros en frecuencia y se obtienen mediante la Transformada de Fourier de las señales temporales.

· $G_{AA}(f)$, $G_{BB}(f)$: son las densidades espectrales positivas, que sólo se definen para frecuencias positivas. Se definen como la promediación temporal de la magnitud cuadrática del espectro en frecuencia. Es la forma más habitual de observar los espectros. La función que se emplea para frecuencias positivas y negativas es $S_{AA}(f)$, y su expresión matemática es la siguiente:

$$S_{AA}(f) = E\left[A(f) \cdot A^*(f)\right] \qquad (4.7.1)$$

Normalmente se suele usar el autoespectro de frecuencias positivas:

$$G_{AA}(f) = \begin{cases} 2S_{AA}(f)\ para\ f > 0 \\ S_{AA}(f)\ para\ f = 0 \\ 0\ para\ f < 0 \end{cases} \qquad (4.7.2)$$

En la Figura 4.21 se representa un ejemplo de autoespectros.

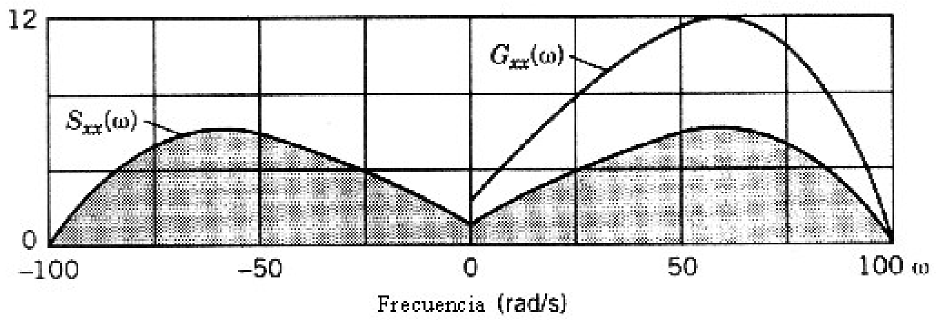

Figura 4.21 Representación de los autoespectros G_{xx} y S_{xx}.

· <u>$G_{AB}(f)$</u>: representa la densidad espectral cruzada positiva, que sólo se define para frecuencias positivas y su expresión es:

$$G_{AB}(f) = \overline{A^*(f) \cdot B(f)} \qquad (4.7.3)$$

Tiene varios usos:
- se emplea para calcular otras funciones.
- su fase es la diferencia de fase entre las dos señales.
- en acústica se emplea para calcular la intensidad.
- su amplitud no es un dato significativo.
- el efecto del ruido se reduce mediante promediación.

La función para frecuencias positivas y negativas es $S_{AB}(f)$, y su expresión matemática es:

$$S_{AA}(f) = E\left[A(f) \cdot A^*(f)\right] \qquad (4.7.4)$$

Y al igual que en el caso anterior se suele usar el espectro cruzado de frecuencias positivas:

$$G_{AB}(f) = \begin{cases} 2S_{AB}(f)\ para\ f > 0 \\ S_{AB}(f)\ para\ f = 0 \\ 0\ para\ f < 0 \end{cases} \qquad (4.7.5)$$

· $\underline{\gamma^2(f)}$: es la coherencia y expresa el grado de relación lineal entre las señales de entrada y de salida, es decir, entre *A(f)* y *B(f)*. Es un coeficiente análogo al coeficiente de correlación empleado en estadística. Se define como:

$$\gamma^2(f) = \frac{|G_{AB}(f)|^2}{G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f)} \,,, 0 \le \gamma^2(f) \le 1 \qquad (4.7.6)$$

Su utilidad se encuentra en que:
- mide el grado de linealidad entre dos señales.
- comprobación de la existencia de ruido.
- función base para calcular otras funciones.
- mide la validez de las FRFs.
- puede indicar *leakage* o resolución insuficiente.

La coherencia sólo proporciona información útil cuando $G_{AB}(f)$, $G_{AA}(f)$ y $G_{BB}(f)$ han sido promediados a lo largo de varios registros. Para un sólo registro (sin promediación alguna) se obtiene el valor unidad para esta función.

Causas de una baja coherencia:
- ruido en la señal medida a la salida.
- ruido en la señal medida a la entrada.
- otras entradas no correlacionadas con la señal medida a la entrada.
- sistemas variantes en el tiempo.
- no linealidades en el sistema.
- *leakage*.
- retrasos en las señales no compensados en el análisis.

· <u>*H(f)*</u>: es la llamada función de respuesta en frecuencia o función de transferencia y se define como la relación entre la salida y la entrada:

$$H(f) = \frac{B(f)}{A(f)} \qquad (4.7.7)$$

Proporciona una descripción completa de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Es una relación compleja entre la entrada y la salida como una función de la frecuencia, debido a que posee una magnitud $|H(f)|$ y una fase $\phi(f) = \angle H(f)$.

La interpretación física de la FRF es que una fuerza de entrada sinusoidal con una frecuencia *f* producirá una salida sinusoidal con la misma frecuencia. La amplitud de la salida será la de la entrada multiplicada por $|H(f)|$, y el desfase entre la entrada y la salida será de $\angle H(f)$.

Para que un sistema pueda ser descrito en términos de su FRF es necesario que cumpla una serie de suposiciones:
· el sistema debe ser físicamente realizable.
· las propiedades del sistema deben ser invariantes con el tiempo.
· el sistema debe ser estable, es decir, sólo puede responder con una cantidad limitada de energía cuando se excita con otra cantidad finita de energía a la entrada.

· el sistema debe ser lineal.

Las resonancias en el rango de frecuencias de funcionamiento de la estructura pueden ser considerados como debilidades o faltas de rigidez de la estructura. La severidad de una resonancia depende de la magnitud de la FRF entre el punto donde las fuerzas actúan en la estructura y el punto donde se observa la resonancia.

Para obtener la FRF de una estructura basta, desde el punto de vista teórico, con excitar la estructura con una fuerza conocida y medir la respuesta. De la relación entre ambas se obtendría la FRF correspondiente. Pero en la práctica esto no es tan sencillo debido a la aparición de varios problemas:
· "ruido" mecánico en la estructura, como puede ser el comportamiento no lineal de la misma.
· ruido eléctrico en la instrumentación.
· resolución con la que se realiza el análisis limitada.

Para minimizar estos problemas hay que distinguir si hay ruido a la salida, a la entrada o en ambas partes. Se dice que hay ruido a la salida cuando la señal de excitación se puede medir sin errores pero aparecen más excitaciones externas que no se conocen y que también provocan cierta respuesta sobre el sistema. En cambio, cuando se conoce perfectamente la respuesta de la estructura y hay alguna fuente de ruido sobre la excitación, se dice que hay ruido a la entrada.

Se pueden emplear dos estimadores diferentes de la FRF que son:

· <u>$H_1(f)$</u>: es un estimador de *H(f)* y se define:

$$H_1(f) = \frac{G_{AB}(f)}{G_{AA}(f)} \tag{4.7.8}$$

Es la función a elegir cuando el sistema puede tener ruido a la salida.

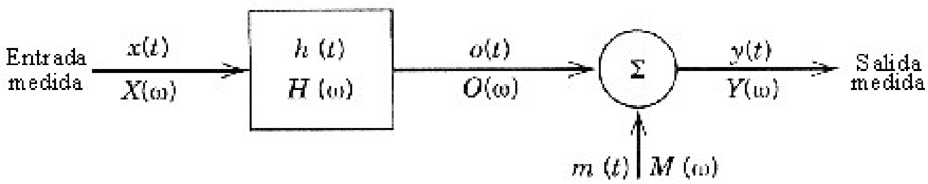

Figura 4.22 Modelo lineal con señal de ruido *m(t)* a la salida.

· <u>$H_2(f)$</u>: es un estimador de *H(f)* y su expresión es:

$$H_2(f) = \frac{G_{BB}(f)}{G_{BA}(f)} \tag{4.7.9}$$

Función a elegir cuando el sistema puede tener ruido a la entrada.

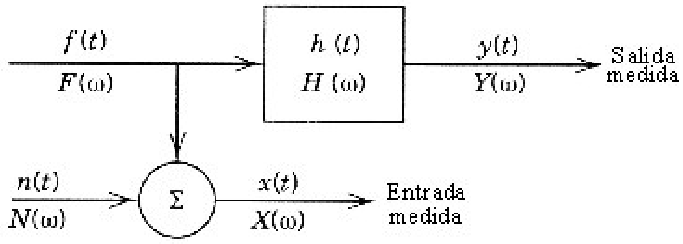

Figura 4.23 Modelo lineal con señal de ruido *n(t)* a la entrada.

Para sistemas con altas resonancias y profundas anti-resonancias, ninguno de los dos estimadores cubrirá el rango de frecuencias completo sin introducir ningún error. Para excitaciones aleatorias y resonancias H_2 es mejor ya que anula el ruido a la entrada y es menos sensible al *leakage*. Para las anti-resonancias es mejor emplear H_1 puesto que el principal problema es el ruido a la salida. Y en los impactos y excitaciones pseudoaleatorias, los dos estimadores se comportarán de manera similar en las resonancias, pero es recomendable el uso de H_1 por su mejor comportamiento con las anti-resonancias. Para sistemas con ruido a la entrada y a la salida, H_1 y H_2 sirven para acotar el valor real de H:

$$H_1 \le H \le H_2 \tag{4.7.10}$$

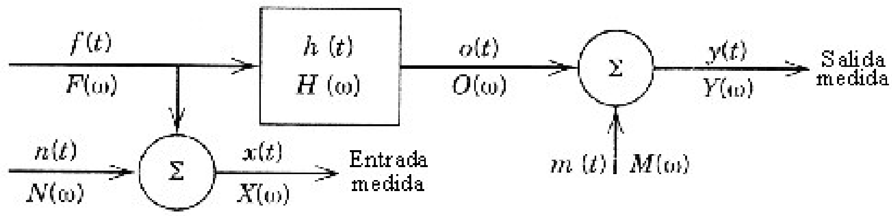

Figura 4.24 Modelo lineal con señal de ruido a la entrada *n(t)* y a la salida *m(t).*

4.8 Programa en *Labview*

Se ha desarrollado un programa en *Labview* en el que se calculan los espectros de aceleración, velocidad y desplazamientos de una señal proporcionada por un generador de ondas. Dicho programa consta de varios módulos: generador de ondas, dominio del tiempo, dominio de la frecuencia y dominio del tiempo a partir de la antitransformada de Fourier.

Primero se van a describir las partes del diagrama y luego se van a ilustrar los resultados que muestra el programa con un ejemplo sencillo.

- <u>Generador de ondas</u>

Es la parte del programa que proporciona la señal que se va a analizar. Permite elegir diferentes funciones: onda senoidal, escalón, rampa y triángulo. Se puede variar la frecuencia, la fase y la amplitud de la señal seleccionada, así como la relación de muestreo y el número de puntos que se quieren representar.

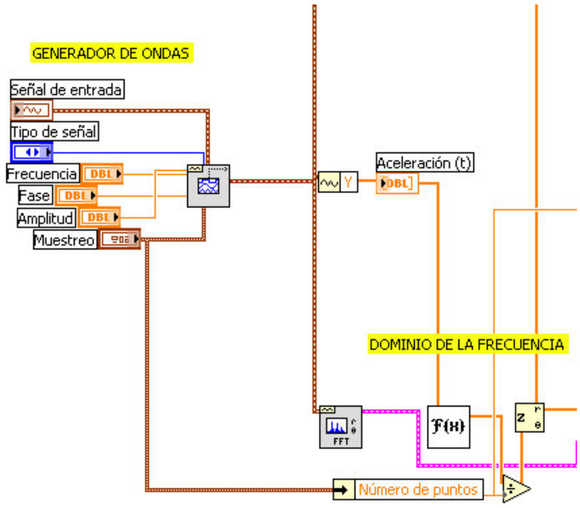

Figura 4.25 Generador de ondas del programa en *Labview*.

- <u>Dominio del tiempo</u>

En este bloque se lleva a cabo el cálculo de los desplazamientos y las velocidades a partir de las señales de aceleración. En este proceso se resta la media de las señales a integrar para evitar ciertas constantes que distorsionan la señal. Esto podría realizarse también mediante un filtro de paso alto.

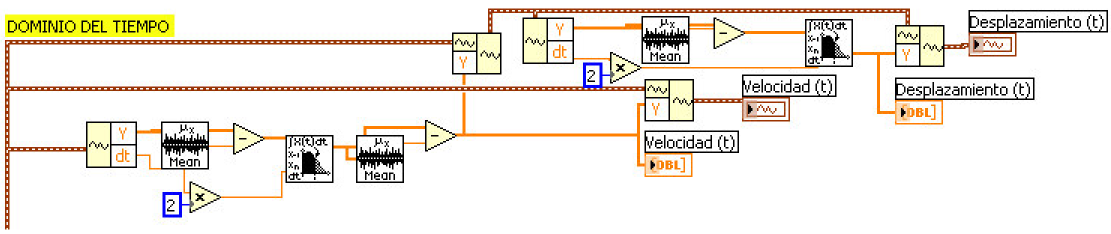

Figura 4.26 Bloque del dominio del tiempo del programa en *Labview*.

- <u>Dominio de la frecuencia</u>

Este es el bloque más importante. En él se realiza primero la FFT de la señal proporcionada por el generador de ondas para obtener el espectro de aceleraciones. A partir de este espectro se obtienen el de velocidades y de desplazamientos. Se permite elegir el número de puntos que se quieren obtener en el cálculo de los espectros. Además se incluye una función que permite diezmar las señales de entrada.

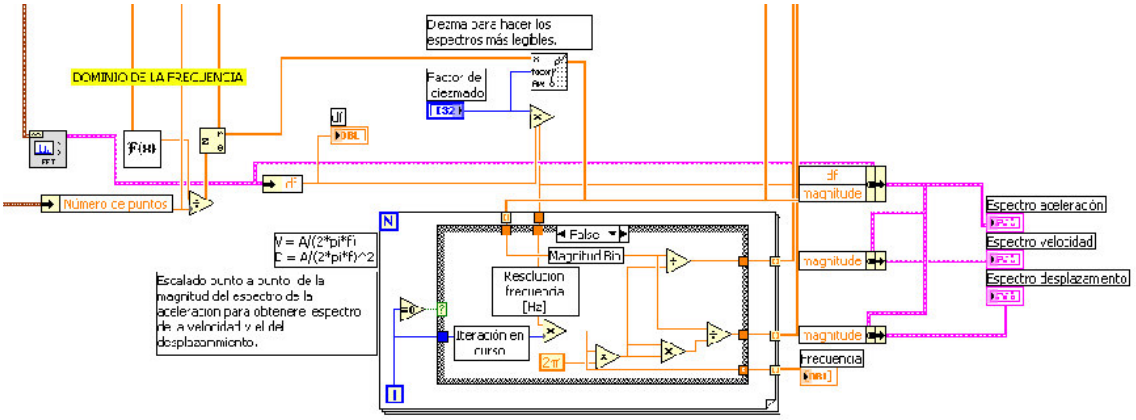

Figura 4.27 Bloque del dominio de la frecuencia del programa en *Labview*.

- <u>Dominio del tiempo a partir de la antitransformada de Fourier</u>

Este bloque se hace tan solo como comprobación y es totalmente prescindible. Se toman las señales del dominio de la frecuencia y se hace la antitransformada para comparar estos resultados con los obtenidos del dominio del tiempo.

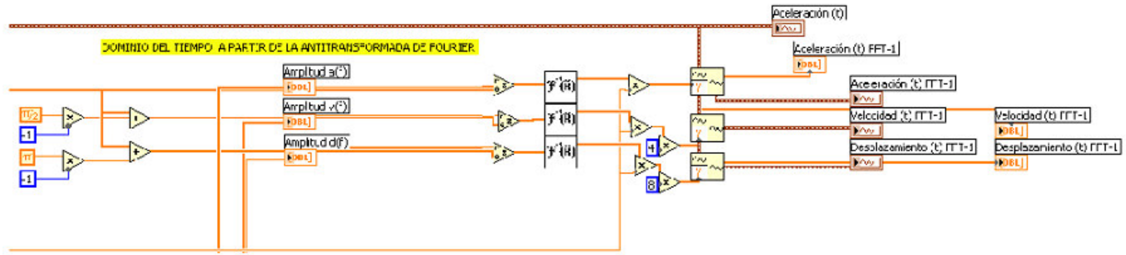

Figura 4.28 Bloque del dominio del tiempo a partir de la antitransformada de Fourier del programa en *Labview*.

- <u>Ejemplo</u>

Se ha elegido una señal senoidal de frecuencia 10 Hz, amplitud 1, origen de fase en cero y una relación de muestreo de 1 kHz. En la siguiente figura se muestra la señal de entrada junto con las aceleraciones, velocidades y desplazamientos calculados.

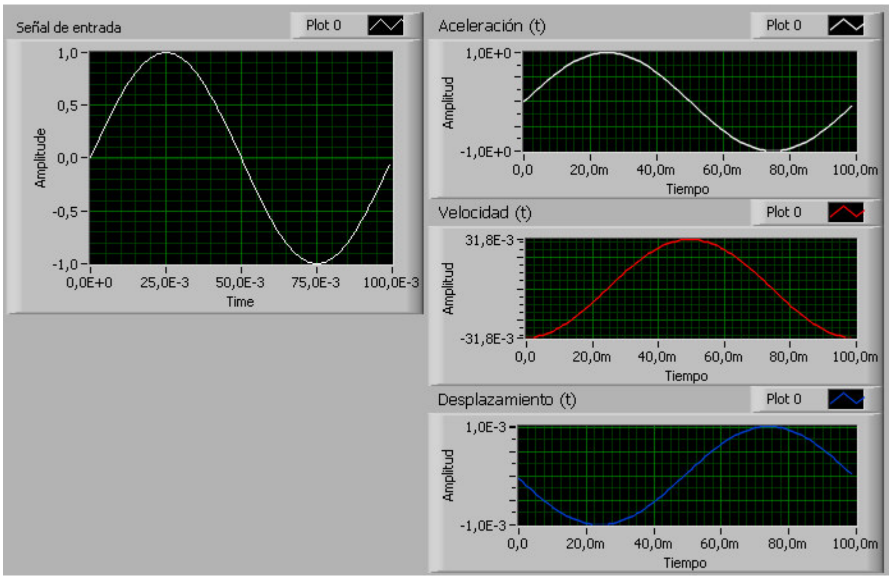

Figura 4.29 Señal de entrada elegida para el ejemplo de *Labview* y sus aceleraciones, velocidades y desplazamientos calculados.

El programa muestra también las gráficas de las señales temporales obtenidas a partir del bloque de la antitransformada del dominio de la frecuencia, que son las curvas que se muestran a la derecha.

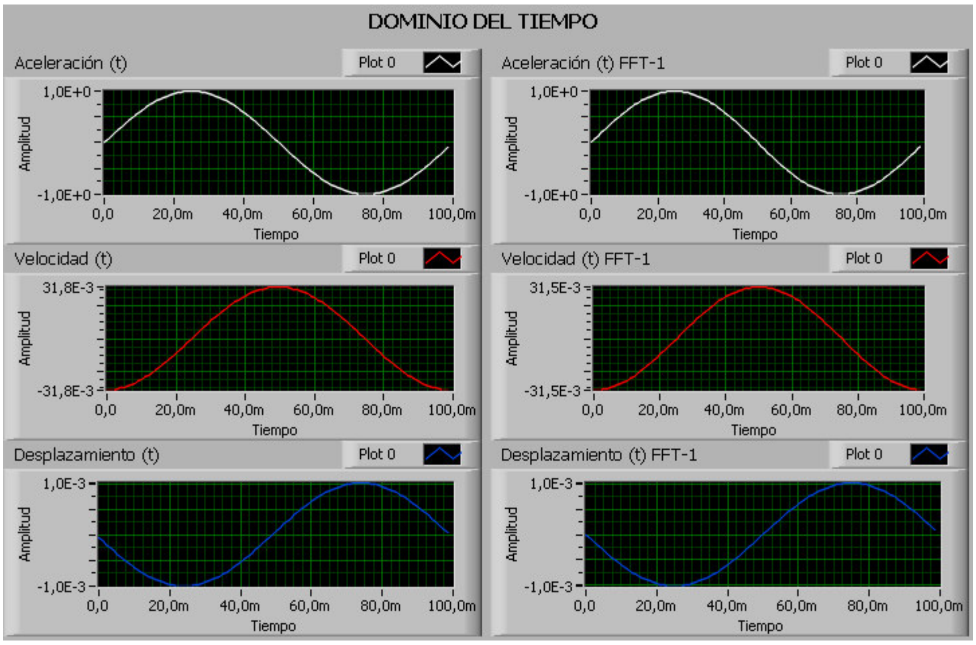

Figura 4.30 Señales temporales calculadas por integración y mediante la antitransformada a partir de los valores en el dominio de la frecuencia.

La última representación gráfica que muestra como resultado son los espectros de aceleraciones, velocidades y desplazamientos, que se muestran a continuación.

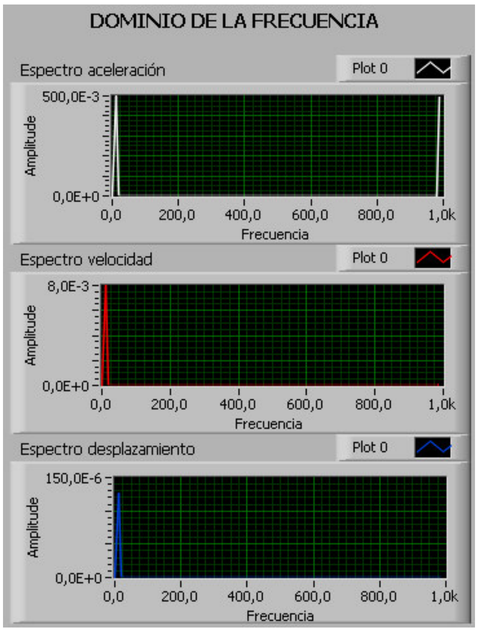

Figura 4.31 Espectros de aceleraciones, velocidades y desplazamientos calculados.

Se puede ver que los tres espectros presentan un único pico para la frecuencia de la señal de entrada.

Finalmente el programa proporciona en forma de columnas todos los valores numéricos de aceleraciones, velocidades y desplazamientos tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.