

6 Análisis modal operacional

6.1 Descripción. Comparación con el análisis modal tradicional

En el análisis modal tradicional los parámetros modales se obtienen de las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs), que relacionan la salida (respuesta) con la entrada (excitación). Para este tipo de análisis es necesario conocer la entrada y la salida del sistema.

El análisis modal operacional se basa en la medida de la respuesta de la estructura usando sólo el ambiente y las fuerzas de servicio que actúan sobre la misma. Se usa para obtener una descripción modal de la estructura bajo sus condiciones de operación. En vez de cargar la estructura artificialmente y tratar la excitación ambiental como una fuente de ruido no deseado, la excitación natural se usa como fuente de excitación. Como estas fuerzas de entrada al sistema no se miden, no se tendrá una medida de las FRFs del sistema. La ventaja de emplear una excitación artificial es que hay muchos más procedimientos para identificar los parámetros y características de los sistemas, con mayor precisión en la identificación de ciertos parámetros como los coeficientes de amortiguamiento.

Sólo mide la respuesta de la estructura debido a las excitaciones ambientales y luego se analizan para obtener casi la misma información que se puede obtener con el análisis modal tradicional, ya que las masas modales no se pueden obtener sin el conocimiento de las fuerzas de entrada.

Para ensayos con excitación ambiental se supone que las fuerzas desconocidas se aplican simultáneamente. Además se supone que la fuerza de entrada es un ruido blanco, es decir, no es una función de la frecuencia y tiene un espectro con un valor medio constante para cada frecuencia.

Para pequeñas estructuras que se pueden ensayar en el laboratorio o para grandes estructuras que pueden ser excitadas artificialmente sin problemas significativos, se prefiere el análisis modal tradicional.

Se emplea cuando las estructuras que se desean estudiar no es conveniente excitarlas por medio de un martillo o un excitador. Algunas porque son difíciles de excitar artificialmente debido a su tamaño, forma o localización. Para muchas estructuras grandes puede ser complicado excitarlas artificialmente a un nivel tal que la respuesta debida a factores ambientales (no controlables) sea pequeña en comparación con la otra artificial. Hay otros casos en los que surgen problemas debido a no linealidades introducidas por un nivel de respuesta muy elevado por emplear métodos artificiales de excitación. Además, todas las estructuras suelen estar sometidas a acciones como las fuerzas ambientales, como por ejemplo el viento, las olas, el tráfico, y también su propia maquinaria puede generar vibraciones.

Las principales ventajas de este tipo de ensayos son:

- es necesario menor tiempo para realizar el ensayo, ya que sólo hay que colocar los equipos de medida.

- es más barato, puesto que no necesita la adquisición de equipos excitadores y puede realizarse in situ.
- el ensayo no interfiere ni interrumpe el funcionamiento normal de la estructura, por lo que puede seguir estando en servicio mientras se realiza.
- la respuesta medida es representativa de las condiciones reales de funcionamiento de la estructura.
- se evita la aplicación de cargas artificiales que conllevan un riesgo de dañar la estructura.

Sin embargo, el uso de este tipo de ensayos produce respuestas pequeñas y, a menudo, mezcladas con ruido. Como la excitación es desconocida, el análisis es más difícil que en el caso tradicional. Las principales desventajas son:

- se necesitan equipos muy sensibles.
- es necesario un análisis de datos cuidadoso.

Existen muchos métodos para realizar el análisis modal operacional. Aquí se van a describir algunos de ellos: *Peak Picking* (PP), Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD), NExT/ERA e Identificación de Subespacios Estocásticos (SSI).

6.2 Peak Picking (PP)

Es el método más simple conocido para identificar los parámetros modales de estructuras de ingeniería civil sujetas a cargas ambientales. Se basa en que la función de respuesta en frecuencia alcanza valores extremos en torno a las frecuencias naturales. Dichas frecuencias se obtienen simplemente observando la gráfica de la función de densidad espectral promediada y normalizada, como se describe en Ren y Zong (2004). Es una técnica que se desarrolla en el dominio de la frecuencia. Los algoritmos en el dominio de la frecuencia son más usados debido a su simplicidad y su velocidad de realización.

A pesar de que las fuerzas de entrada no se miden, esto se resuelve adoptando una técnica de identificación de parámetros modales derivada de la tradicional, en la que las funciones de respuesta en frecuencia y la función de coherencia se calculan para cada punto de medida con respecto a la medida de referencia. Por tanto, la señal del sensor de referencia se usa como entrada. Nótese que en el contexto de análisis modal operacional la función de transferencia no significa la relación entre la respuesta y la fuerza aplicada, sino que representa la relación entre la respuesta medida por un sensor cualquiera y el de referencia. Por lo que todas las funciones de transferencia están relacionadas en este tipo de análisis con la respuesta medida por el sensor de referencia. Esto ayuda en la identificación de las resonancias. La función de coherencia para dos registros simultáneos de señales de respuesta tienen valores próximos a uno en las frecuencias de resonancia debido a la alta relación señal-ruido a estas frecuencias. Consecuentemente, la inspección de la función de coherencia puede ayudar a la elección de dichas frecuencias.

Las frecuencias naturales se determinan como los picos de la función densidad espectral promediada y normalizada. Esta función se obtiene básicamente convirtiendo las medidas de aceleraciones al dominio de la frecuencia mediante la transformada de

Fourier discreta (DFT). La función de coherencia obtenida para dos registros simultáneos de las señales de salida tiene valores próximos a la unidad para las frecuencias naturales de la estructura, como se puede ver en Peeters et al (1998), en Andersen et al (1999) y en Andersen (1999). Este hecho ayuda a decidir qué frecuencias se consideran como naturales. En la Figura 6.1 se muestra la gráfica de la que este método obtiene las frecuencias naturales, que son los picos de dicha curva.

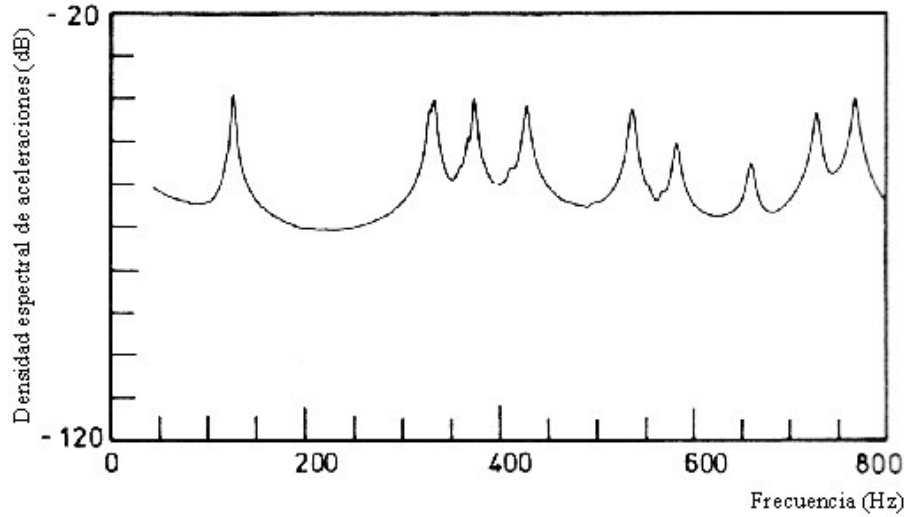


Figura 6.1 Representación de los picos de la densidad espectral que indican las frecuencias naturales para el método *Peak Picking*.

Se hace la suposición de que la respuesta dinámica en los picos de resonancia viene determinada sólo por un modo. La validez de esta suposición aumenta cuanto más separados están los modos y menor es el amortiguamiento de la estructura.

Los modos que proporciona este método se obtienen empleando la expresión 6.2.1, que se describe en Brownjohn (2003). Se varía el subíndice p mientras se mantiene la referencia q constante, al mismo tiempo que se van leyendo uno a uno los valores de la columna de la matriz de densidades espectrales cruzadas para cada frecuencia natural identificada en el pico del espectro. Estos valores contienen información de fase y de amplitud, y se normalizan a un valor unidad con un ángulo cero dividiendo entre la densidad espectral de la señal elegida como referencia. Por tanto, se evalúa la relación de la densidad espectral cruzada entre las posiciones p y q , y la densidad autoespectral en la posición q (referencia):

$$\frac{S_{qp}(w_{r0})}{S_{qq}(w_{r0})} \approx \frac{r^0 \phi_p}{r^0 \phi_q} \quad (6.2.1)$$

donde w_{r0} representa la frecuencia para la que se ha identificado el pico en el espectro.

Se puede demostrar que dicha relación aproximadamente coincide con la relación entre las ordenadas modales en dos posiciones diferentes. De este modo se obtiene la representación de la deformada en funcionamiento, que es una aproximación al modo de vibración. Además, el autoespectro $S_{qq}(w)$ en torno a la resonancia puede ser utilizado para estimar la relación de amortiguamiento mediante ajuste de una curva.

Hay que mencionar que tanto la estimación de la frecuencia natural, como la relación de amortiguamiento y la deformada están sujetos a aproximaciones y errores, por lo que no siempre proporcionan resultados fiables. Los errores cometidos dependen, entre otros factores, del amortiguamiento de la estructura, de la ventana que se emplee para realizar el análisis, del número de promedios que se realicen, del ancho del pico de la frecuencia en relación con la resolución utilizada y de la proximidad entre frecuencias naturales.

Algunos inconvenientes de este método se pueden encontrar en De Roeck et al (2000), y son:

- elegir las frecuencias naturales es una tarea subjetiva, especialmente si los picos no están demasiado claros.
- al aumentar el amortiguamiento, los picos se desplazan de las frecuencias naturales, como se indica en Drexel y Ginsberg [14].
- no se obtienen los modos de vibración, se calculan las formas de deformación que pueden servir como aproximación.
- sólo los modos reales o las estructuras con amortiguamiento proporcional pueden ser calculadas por este método.
- no se emplea para las estimaciones de amortiguamientos, ya que no proporciona buenos valores.

A pesar de los inconvenientes, es un método muy fácil de implementar y los errores son relativamente pequeños para estructuras débilmente amortiguadas y con las frecuencias naturales bien separadas. Se recomienda hacer un análisis *Peak Picking* en el mismo sitio que se realizan las medidas para hacer un control de calidad de los datos que se han tomado y para juzgar de forma general las características dinámicas de la estructura. Y posteriormente en la oficina aplicar otro método más avanzado como el SSI o la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia, para obtener los resultados con mayor detalle y corroborar los obtenidos con el método *Peak Picking*.

6.3 Descomposición en el Dominio de la Frecuencia

Es un procedimiento muy simple que representa una mejora significativa del método anterior. Primero se van a introducir las bases teóricas de este método, como se describe en Brincker et al (2001). La relación entre las desconocidas entradas $x(t)$ y las respuestas medidas $y(t)$ se puede expresar de la siguiente manera, como se puede ver en Bendat y Piersol (1986):

$$G_{yy}(j\omega) = \overline{H}(j\omega)G_{xx}(j\omega)H(j\omega)^T \quad (6.3.1)$$

donde $G_{xx}(j\omega)$ es la matriz (de orden $r \times r$) de densidad espectral de la entrada, r es el número de entradas, $G_{yy}(j\omega)$ es la matriz (de orden $m \times m$) de densidades espectrales de las salidas, m es el número de salidas, $H(j\omega)$ es la matriz (de orden $m \times r$) conocida como función de respuesta en frecuencia, y los superíndices " $-$ " y " T " indican matriz compleja conjugada y matriz sólo transpuesta respectivamente. Es conveniente recordar que las densidades espectrales representan como se distribuye la energía para todas las frecuencias.

En el caso de una estructura ligeramente amortiguada, la matriz de densidad espectral se puede ser aproximada por la siguiente expresión, que constituye una descomposición modal de la matriz de densidades espectrales:

$$G_{yy}(jw) \approx \sum_{k \in Sub(w)} \frac{d_k \phi_k \phi_k^T}{jw - \lambda_k} + \frac{\overline{d_k \phi_k \phi_k^T}}{jw - \lambda_k} \quad (6.3.2)$$

$$d_k = \gamma_k^T C \gamma_k \quad (6.3.3)$$

donde d_k es un escalar, ϕ_k es el modo de vibración, λ_k son los polos de la FRF, $Sub(w)$ es el conjunto de modos de vibración que contribuyen significativamente a la respuesta para la frecuencia w . Este último conjunto suele estar formado por uno o dos modos de vibración. La entrada se supone que es un ruido blanco, es decir, la matriz de densidad espectral de las entradas es una matriz constante: $G_{xx}(jw) = C$.

Una vez se han descrito los fundamentos teóricos, se describe el algoritmo de identificación. El primer paso es estimar la matriz de densidades espectrales. Una vez que se tienen los valores de $\hat{G}_{yy}(jw)$ para frecuencias discretas $w=w_i$ se descompone por medio de la Descomposición en Valores Singulares (SVD):

$$\hat{G}_{yy}(jw_i) = U_i S_i \bar{U}_i^T \quad (6.3.4)$$

donde la matriz $U_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}]$ contiene los vectores singulares y S_i es una matriz diagonal que contiene los valores singulares.

Los valores singulares se interpretan como una combinación lineal de densidades autoespectrales de un conjunto de sistemas de un grado de libertad, como se puede ver en Reynolds et al [27]. Cerca del pico k , el modo k será el que predomine en la respuesta, obteniendo los modos de vibración a partir de los picos en la representación de los valores singulares. El mayor valor singular representa la fuerza del modo de vibración dominante para cada frecuencia i , como se describe en Brownjohn (2003). Los otros valores singulares contienen ruido u otros modos escondidos detrás del dominante.

Cerca del pico k sólo existirá un modo en el conjunto $Sub(w)$, el primer vector singular u_{i1} será una estimación del modo de vibración $\hat{\phi} = u_{i1}$, y el correspondiente valor singular será la función de densidad espectral del sistema representado en la expresión 6.3.2. Los vectores singulares contienen las distintas maneras de las que se deforma la estructura.

Una ventaja de este modo es que se pueden identificar fácilmente modos de vibración muy próximos, examinando no sólo el mayor valor singular, sino también los siguientes. Una vez que se ha identificado el modo de vibración se ajusta la curva alrededor del pico seleccionado para obtener la frecuencia natural. En la Figura 6.2 se muestra un ejemplo de la representación de valores singulares.

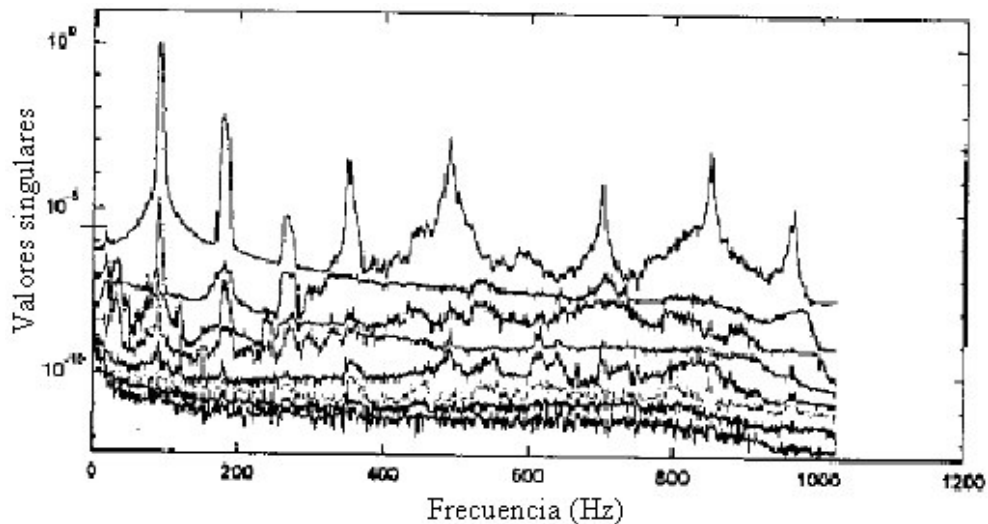


Figura 6.2 Ejemplo de representación de valores singulares de la matriz de densidad espectral.

Si se transforma la función de densidad espectral al dominio del tiempo por medio de la Transformada de Fourier, se obtiene la respuesta del sistema de un grado de libertad amortiguado, como se indica en Brincker et al [6]. Lo que se hace es calcular el modo de vibración para el pico de la curva que proporciona la frecuencia k , y se van calculando los modos para frecuencias ligeramente superiores e inferiores, hasta que la correlación (MAC) entre ambos modos alcanza cierto valor límite. Dicho valor se suele elegir como $MAC = 0.8$ (en el Capítulo 7 se estudia este parámetro). Una vez que se tienen las dos frecuencias que proporcionan estos modos, se toma una ventana con ese ancho y se realiza la antitransformada de Fourier. Con la Figura 6.3 se intenta aclarar esta idea. Con dicha señal en el dominio del tiempo se pueden calcular los parámetros que la caracterizan, que son el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural. A continuación se muestran las expresiones necesarias para su cálculo.

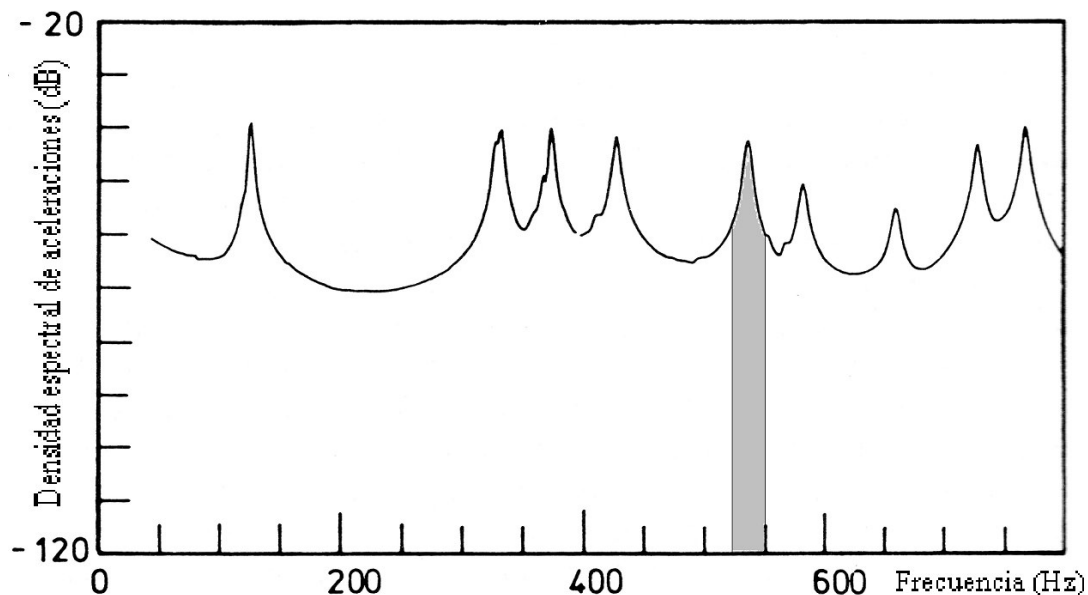


Figura 6.3 Ventana empleada para realizar la antitransformada de Fourier para obtener los parámetros del modo k .

El decremento logarítmico δ que experimenta la señal se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \left(\frac{r_0}{|r_k|} \right) \quad (6.3.5)$$

donde r_0 y r_k son los extremos inicial y final de la señal considerada, respectivamente. Ambos deben estar separados un número entero k de ciclos, es decir, o son picos o son valles.

El coeficiente de amortiguamiento viene dado por la siguiente expresión:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (6.3.6)$$

La frecuencia natural se obtiene de usando la frecuencia natural amortiguada y el coeficiente de amortiguamiento mediante la siguiente expresión:

$$f = \frac{f_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6.3.7)$$

- Ejemplo

Se ha desarrollado una función en *Matlab* que, a partir de los registros temporales, obtiene la representación gráfica de los valores singulares de la matriz de densidad espectral. En dicha gráfica se pueden apreciar las frecuencias naturales de la excitación.

La función principal se llama *ejemplo_fdd*, que a su vez llama a otras dos que son *fdd* y *fuerzas_fdd*. La función *fdd* recibe como parámetros de entrada los vectores que recogen las medidas en el dominio del tiempo y calcula la gráfica que se ha comentado antes. En la función *fuerzas_fdd* se crean los dos vectores de entrada como y_1 e y_2 , que son vectores en los que se almacenan los datos temporales que se han registrado. Como prueba se ha elegido que cada una de estas entradas esté formada por dos señales senoidales a las que se le ha añadido parte de ruido.

A continuación se muestran las señales temporales que se han utilizado, así como la gráfica de los valores singulares de la matriz de densidad espectral.

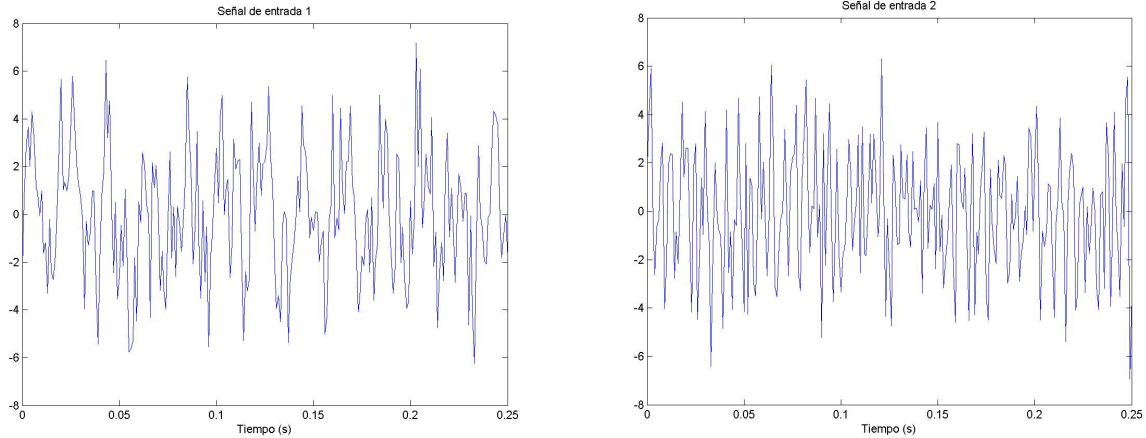


Figura 6.4 Señales de entrada tomadas para el ejemplo en *Matlab* del FDD.

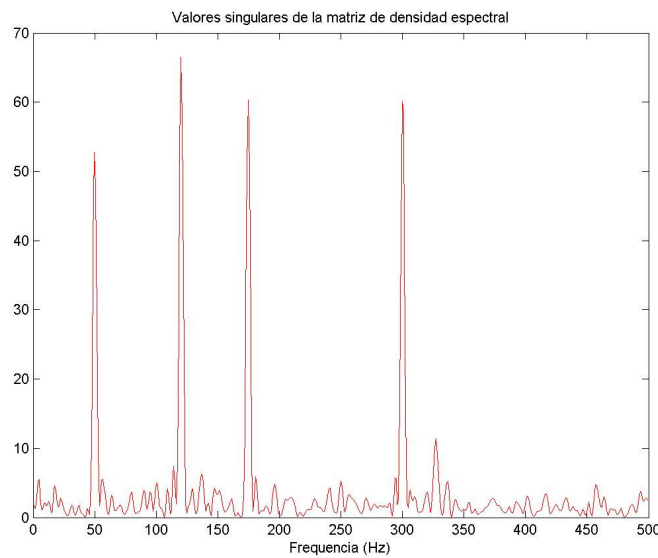


Figura 6.5 Valores singulares de la matriz de densidad espectral para el ejemplo en *Matlab* del FDD.

A partir de la función *fdd* creada es muy fácil obtener otra que tenga tantas entradas como se necesite. Tan solo hay que modificar el número de parámetros de entrada de dicha función.

6.4 NExT y ERA

6.4.1 NExT (*Natural Excitation Technique*)

La Técnica de Excitación Natural (NExT) es un método de caracterización modal que permite ensayar las estructuras en su propio ambiente. Es simple y efectivo. El mayor prerequisite es que la localización y la orientación de la referencia se debe elegir de manera que todos los modos relevantes puedan ser captados, como se indica en Brownjohn (2001). Es decir, el acelerómetro de referencia hay que colocarlo en un

punto que no sea nodo de ningún modo de vibración de los que se quiere identificar. Es un proceso de cuatro pasos diseñado para estimar los parámetros modales de estructuras excitadas por sus propias cargas de operación y que se describe ampliamente en James III et al (1992). El método NExT permite que los datos de respuesta forzada sean tratados como datos de respuesta libre, como se puede ver en Clayton [11].

El primer paso es obtener las respuestas de la estructura en funcionamiento normal. Son necesarios los sensores de fuerza, desplazamiento, velocidad o aceleración. Es conveniente hacer registros de cierta duración ya que las condiciones de operación de muchas estructuras son bastante estacionarias.

El segundo paso consiste en calcular las funciones de autocorrelación y de correlación cruzada a partir de las medidas tomadas. Las funciones de correlación se pueden expresar como un sumatorio de señales senoidales amortiguadas, teniendo cada una de estas señales una frecuencia natural amortiguada y un coeficiente de amortiguamiento que es idéntico al del correspondiente modo estructural.

El tercer paso utiliza una identificación en el dominio del tiempo para estimar los parámetros tratando las funciones de correlación como si fueran la respuesta libre de una excitación, es decir, como si se excitara el sistema y se dejara que oscile libremente. Se puede usar el método ERA para la identificación modal en el dominio del tiempo con el fin de extraer los amortiguamientos modales y las frecuencias naturales.

El último paso de este método consiste en estimar los modos de vibración a partir de los coeficientes de amortiguamiento y frecuencias naturales identificadas.

- Desarrollo teórico de NExT

Una justificación teórica de este método se encuentra en que un sistema con múltiples entradas y salidas, en el que las fuerzas externas aleatorias, que excitan varios modos del sistema, producen funciones de autocorrelación y de correlación cruzada que son suma de señales sinusoidales amortiguadas por una exponencial. Además estas sinusoidales tienen las mismas frecuencias amortiguadas y coeficientes de amortiguamiento que los modos del sistema. Consecuentemente las funciones de correlación tendrán la misma forma que las funciones de respuesta a un impulso y de este modo pueden ser usadas para desarrollar algoritmos de análisis modal estándar.

El planteamiento consiste en desarrollar una solución general para una estructura con una representación espacial discreta, definir la función de correlación cruzada entre dos salidas y resolver para el caso de entradas aleatorias. La justificación teórica de este método se puede desarrollar para entradas aleatorias en general, modos completamente complejos y la presencia incluso de armónicos. Sin embargo aquí se presenta el desarrollo para el caso de que la entrada sea un ruido blanco, los modos sean reales y en ausencia de armónicos para mayor claridad.

Las ecuaciones del movimiento en forma matricial son las siguientes:

$$[M]\left\{\ddot{x}(t)\right\}+[C]\left\{\dot{x}(t)\right\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \quad (6.4.1)$$

donde $[M]$ es la matriz de masa, $[C]$ es la matriz de amortiguamiento, $[K]$ es la matriz de rigidez, $\{f\}$ es un vector de funciones de fuerza aleatorias y $\{x\}$ es el vector de desplazamientos. La ecuación anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\phi^r\} q^r(t) \quad (6.4.2)$$

donde $[\Phi]$ es la matriz de modos, $\{q(t)\}$ es el vector de coordenadas modales, $\{\phi^r\}$ es el modo r -ésimo y n es el número de modos. Premultiplicando la expresión 6.4.1 por $[\Phi]^T$, y suponiendo que los modos son reales, las matrices $[M]$, $[C]$ y $[K]$ se diagonalizan simultáneamente. Resulta finalmente un conjunto de ecuaciones en coordenadas modales:

$$\ddot{q}^r(t) + 2\zeta^r w_n^r \dot{q}^r(t) + w_n^{r^2} q^r(t) = \frac{1}{m^r} \{\phi^r\}^T \{f(t)\} \quad (6.4.3)$$

donde w_n^r es la frecuencia natural r -ésima, ζ^r es el r -ésimo coeficiente de amortiguamiento y m^r es la masa modal r -ésima. La solución de esta última ecuación suponiendo que las condiciones iniciales son nulas y con unas fuerzas externas $\{f\}$ cualesquiera se obtiene mediante la integral de Duhamel:

$$q^r(t) = \int_{-\infty}^t \{\phi^r\}^T \{f(\tau)\} g^r(t-\tau) d\tau \quad (6.4.4)$$

donde $g^r(t) = \frac{1}{m^r w_d^r} \text{sen}(w_d^r t) e^{(-\zeta^r w_n^r t)}$, y $w_d^r = w_n^r \sqrt{1-\zeta^{r^2}}$ representa la frecuencia modal amortiguada.

Ahora se pueden usar las expresiones 6.4.2 y 6.4.4 para obtener las soluciones de $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\phi^r\} \int_{-\infty}^t \{\phi^r\}^T \{f(\tau)\} g^r(t-\tau) d\tau \quad (6.4.5)$$

Particularizando la ecuación anterior para una sola salida, $x_{ik}(t)$, debida a una única fuerza, $f_k(t)$, en el punto k :

$$x_{ik}(t) = \sum_{r=1}^n \phi_i^r \phi_k^r \int_{-\infty}^t f_k(\tau) g^r(t-\tau) d\tau \quad (6.4.6)$$

donde ϕ_i^r es el i -ésimo componente del modo de vibración r .

La función de respuesta a un impulso entre la entrada k y la salida i es lo que se obtiene cuando en la ecuación anterior $f(\tau)$ es una delta de Dirac para $\tau=0$, y el resultado queda:

$$x_{ik}(t) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_i^r \phi_k^r}{m^r w_d^r} \text{sen}(w_d^r t) e^{(-\zeta^r w_n^r t)} \quad (6.4.7)$$

El siguiente paso es obtener la función de correlación cruzada de dos respuestas (x_{ik} y x_{jk}) debido a un ruido blanco de entrada en el punto k . La función de correlación $R_{ijk}(T)$ se define como el valor esperado del producto de dos respuestas evaluadas en instantes separados en el tiempo una distancia T :

$$R_{ijk}(T) = E[x_{ik}(t+T)x_{jk}(t)] \quad (6.4.8)$$

donde el operador $E[]$ indica la esperanza o valor esperado.

Sustituyendo la expresión 4.6.6 en la 4.6.8 se obtiene lo siguiente, puesto que $f_k(t)$ es la única variable aleatoria:

$$R_{ijk}(T) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \phi_i^r \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+T} g^r(t+T-\sigma) g^s(t-\tau) E[f_k(\sigma) f_k(\tau)] d\sigma d\tau \quad (6.4.9)$$

Usando la definición de función de autocorrelación y tomando $f(t)$ como ruido blanco, la función de autocorrelación de f es:

$$R_{ff}^k(\tau - \sigma) = E[f_k(\tau) f_k(\sigma)] = \alpha_k \delta(\tau - \sigma) \quad (6.4.10)$$

donde α_k es una constante y $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Sustituyendo la relación 6.4.10 dentro de la 6.4.9 y usando la definición de la función delta se obtiene la siguiente expresión:

$$R_{ijk}(T) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_k \phi_i^r \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s \int_{-\infty}^t g^r(t+T-\tau) g^s(t-\tau) d\tau \quad (6.4.11)$$

Haciendo el cambio de variable $\lambda = t - \tau$ los límites de integración varían y la expresión que se obtiene es la siguiente:

$$R_{ijk}(T) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_k \phi_i^r \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s \int_0^\infty g^r(\lambda+T) g^s(\lambda) d\lambda \quad (6.4.12)$$

Usando la definición de g (fórmula 6.4.4) y usando la propiedad trigonométrica de la suma de ángulos para el seno se obtiene:

$$\begin{aligned} g^r(\lambda+T) &= \left[\cos(w_d^r T) e^{(-\zeta^r w_n^r T)} \right] \frac{\text{sen}(w_d^r \lambda) e^{(-\zeta^r w_n^r \lambda)}}{m^r w_d^r} + \\ &+ \left[\text{sen}(w_d^r T) e^{(-\zeta^r w_n^r T)} \right] \frac{\cos(w_d^r \lambda) e^{(-\zeta^r w_n^r \lambda)}}{m^r w_d^r} \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

Sustituyendo 6.4.13 en 6.4.12 se obtiene:

$$R_{ijk}(T) = \sum_{r=1}^n \left[G_{ijk}^r \cos(w_d^r T) e^{(-\zeta^r w_n^r T)} + H_{ijk}^r \text{sen}(w_d^r T) e^{(-\zeta^r w_n^r T)} \right] \quad (6.4.14)$$

donde G_{ijk}^r y H_{ijk}^r son funciones sólo de los parámetros modales, independientes de T , conteniendo en su interior un sumatorio en s , como se muestra a continuación:

$$\begin{Bmatrix} G_{ijk}^r \\ H_{ijk}^r \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^n \frac{\alpha_k \phi_i^r \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s}{m^r w_d^r m^s w_d^s} \int_0^\infty \text{sen}(w_d^s \lambda) e^{(-\zeta^r w_n^r - \zeta^s w_n^s) \lambda} \begin{Bmatrix} \text{sen}(w_d^r \lambda) \\ \cos(w_d^r \lambda) \end{Bmatrix} d\lambda \quad (6.4.15)$$

En esta última expresión se encuentra la clave. Observándola bien se puede ver que la función de correlación cruzada es en el fondo una suma de senos y cosenos amortiguados, con la misma característica que la función de respuesta a un impulso del sistema original. De modo que la función de correlación cruzada se puede emplear como estimación de los parámetros modales en el dominio del tiempo de las funciones de respuesta a un impulso.

Finalmente, G_{ijk}^r y H_{ijk}^r pueden ser simplificados evaluando la integral:

$$G_{ijk}^r = \sum_{s=1}^n \frac{\alpha_k \phi_i^r \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s}{m^r w_d^r m^s} \left[\frac{I_{rs}}{J_{rs}^2 + I_{rs}^2} \right] \quad (6.4.16)$$

$$H_{ijk}^r = \sum_{s=1}^n \frac{\alpha_k \phi_i^r \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s}{m^r w_d^r m^s} \left[\frac{J_{rs}}{J_{rs}^2 + I_{rs}^2} \right] \quad (6.4.17)$$

donde $I_{rs} = 2w_d^r (\zeta^r w_n^r + \zeta^s w_n^s)$, y $J_{rs} = (w_d^s)^2 - (w_d^r)^2 + (\zeta^r w_n^r + \zeta^s w_n^s)^2$.

Para ilustrar de forma más útil estos resultados se define el siguiente parámetro:

$$\text{tg}(\gamma_{rs}) = \frac{I_{rs}}{J_{rs}} \quad (6.4.18)$$

Usando esta relación en las fórmulas 6.4.16 y 6.4.17:

$$G_{ijk}^r = \frac{\phi_i^r}{m^r w_d^r} \sum_{s=1}^n \beta_{jk}^{rs} \text{sen}(\gamma_{rs}) \sqrt{(J_{rs}^2 + I_{rs}^2)} \quad (6.4.19)$$

$$H_{ijk}^r = \frac{\phi_i^r}{m^r w_d^r} \sum_{s=1}^n \beta_{jk}^{rs} \cos(\gamma_{rs}) \sqrt{(J_{rs}^2 + I_{rs}^2)} \quad (6.4.20)$$

donde $\beta_{jk}^{rs} = \frac{\alpha_k \phi_k^r \phi_j^s \phi_k^s}{m^s}$. Sustituyendo estas dos últimas expresiones en 6.4.14 y realizando el sumatorio para todos los puntos, m , para encontrar la función de autocorrelación debida a todas las entradas se tiene:

$$R_{ij}(T) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_i^r}{m^r w_d^r} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^m \beta_{jk}^{rs} \text{sen}(w_d^r T + \gamma_{rs}) e^{(-\zeta^r w_n^r T)} \sqrt{(J_{rs}^2 + I_{rs}^2)} \quad (6.4.21)$$

Los sumatorios interiores en s y en k de la expresión anterior son simplemente funciones seno con fase diferente pero con igual frecuencia. Rescribiendo esta ecuación como una única función seno con un nuevo ángulo de fase (Θ) y una nueva constante de amplitud adicional (A_j^r):

$$R_{ij}(T) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_i^r A_j^r}{m^r w_d^r} \text{sen}(w_d^r T + \Theta^r) e^{(-\zeta^r w_n^r T)} \quad (6.4.22)$$

Con esta expresión se termina el desarrollo teórico para una sola entrada, varias salidas y para el caso en el que se exciten muchos modos. Esta última ecuación muestra que la función de correlación cruzada es una suma de senos amortiguados de la misma forma que la función de respuesta a un impulso del sistema original (6.4.7). Esta semejanza permite usar métodos de identificación de parámetros modales en el dominio del tiempo, como por ejemplo el método ERA.

6.4.2 ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*)

El objetivo de este algoritmo es el cálculo de las matrices del sistema a partir de las medidas realizadas, como se describe en Drexel y Ginsberg [14] y para la reducción de sistemas lineales. Se pueden hacer muchas mejoras a este algoritmo, como se indica en Qin et al (2001). Este método es un análisis de los parámetros de un sistema basado en la relación entre la matriz de Hankel y el espacio de estados que definen el sistema, como se muestra en Luscher et al (2001). Con este procedimiento se pueden identificar incluso dos modos de vibración que se encuentren muy cercanos, como se puede ver en Brownjohn (2003). Se suelen usar los métodos NExT y ERA juntos.

El algoritmo ERA toma los datos de funciones de correlación cruzada y construye un sistema de espacio de estados en el que los parámetros modales de la estructura pueden ser identificados. Luego crea la matriz de Hankel de los datos de respuesta libre y posteriormente realiza una Descomposición en Valores Singulares. Una vez se han calculado los valores singulares, los mayores se considera que son los que realmente caracterizan la estructura. A partir de aquí ya se pueden obtener los modos de vibración y demás parámetros modales, según se describe en Clayton [11].

El desarrollo que se sigue a continuación puede encontrarse más detallado en He et al (2004). Se parte de la ecuación que describe el movimiento de una estructura discretizada en N grados de libertad que se muestra a continuación, y que es equivalente a la mostrada en la ecuación 6.4.1.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = [P]\{f(t)\} \quad (6.4.23)$$

donde la que la única novedad es que las fuerzas externas se describen como el producto de la matriz $[P]$, que representa la distribución de cargas, y el vector de cargas $f(t)$. Se supone que la excitación ambiental tiene una función estocástica y estacionaria, además de que las respuestas presentes no guardan ninguna correlación con las fuerzas que aparecerán más adelante sobre la estructura. Las condiciones iniciales para la ecuación

anterior son las siguientes: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$, para posición y velocidad respectivamente.

La ecuación anterior se puede convertir a la formulación de los espacios de estados y se puede discretizar de la siguiente manera:

$$z(k+1) = Az(k) + Bf(k) \quad (6.4.24)$$

$$x(k) = Cz(k) + Df(k) \quad (6.4.25)$$

donde A , B , C y D son matrices en forma discreta que describen los espacios de estados, z es el vector de estados, y $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_m(k)]^T$, es un vector columna de tamaño m (es el número de canales medidos) que representa la respuesta de desplazamientos del sistema para tiempos discretos $t=k(\Delta t)$ a lo largo de las medidas de los m grados de libertad medidos. La siguiente matriz de Hankel (de dimensiones $ms \times s$) se forma utilizando el vector de respuesta en desplazamientos (x) para las condiciones de vibración libre:

$$H^s(k-1) = \begin{bmatrix} x(k) & x(k+1) & \dots & x(k+s-1) \\ x(k+1) & x(k+2) & \dots & x(k+s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(k+s-1) & x(k+s) & \dots & x(k+2(s-1)) \end{bmatrix}_{(ms \times s)} \quad (6.4.26)$$

donde s es un número entero que determina el tamaño de la matriz, y es un parámetro relacionado con el número de muestras utilizadas. En otras referencias, como Brownjohn (2003) y Tasker et al (1998), se puede observar como no es necesario que esta última matriz sea cuadrada. Se puede hacer una Descomposición en Valores Singulares (SVD) de esta matriz:

$$H^s(0) = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_n & U_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^T \\ V_p^T \end{bmatrix} \quad (6.4.27)$$

donde la matriz Σ recoge los valores singulares. La Descomposición en Valores Singulares se puede dividir en dos partes separando los valores singulares mayores en una submatriz Σ_n y en otra los demás Σ_p . Se definen dos nuevas matrices:

$$H_1 = U_n \Sigma_n^{1/2} \quad (6.4.28)$$

$$H_2 = \Sigma_n^{1/2} V_n^T \quad (6.4.29)$$

Las expresiones para la inversa por la izquierda H_1^+ y la inversa por la derecha H_2^+ se muestran a continuación:

$$H_1^+ = \Sigma_n^{-1/2} U_n^T \quad (6.4.30)$$

$$H_2^+ = V_n \Sigma_n^{-1/2} \quad (6.4.31)$$

Ya se pueden obtener las matrices que describen el espacio de estados:

$$\begin{cases} D = x(0) \\ C = H_1(1:m,:) \\ B = H_2(:,1:r) \\ A = H_1^+ H^s(1) H_2^+ \end{cases} \quad (6.4.32)$$

donde la notación $(1:m,:)$ indica las primeras m filas de la matriz y $(:,1:r)$ indica las primeras r columnas. r es el número de componentes del vector de cargas. Los parámetros modales como la frecuencia natural y los coeficientes de amortiguamiento se obtienen a partir de las siguientes relaciones:

$$w_n = \left| \frac{\ln(\lambda_n)}{\Delta t} \right| \quad (6.4.33)$$

$$\zeta_n = -\cos(\text{ángulo}(\ln(\lambda_n))) \quad (6.4.34)$$

donde λ_n es un autovalor de la matriz A y Δt es la relación de muestreo. Los modos de vibración de la estructura se obtienen del siguiente producto matricial:

$$\Phi = C \cdot T \quad (6.4.35)$$

donde T es una matriz que está formada por los autovectores de A colocados por columnas y en la matriz Φ se recogen los modos de vibración por columnas.

6.5 Identificación de Subespacios Estocásticos (SSI)

Es un método de identificación en el dominio del tiempo que trabaja directamente con los datos temporales medidos, sin necesidad de convertirlos en espectros o correlaciones. Probablemente sea el método de identificación de sistemas para vibraciones ambientales más avanzado que se conoce hasta la fecha, según De Roeck et al (2000) y Ren y Zong (2004), aunque no siempre proporciona los mejores resultados. En Brincker et al [7] se muestra que, en algunos casos, con la técnica de la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia se obtienen mejores estimaciones tanto de los modos como de los coeficientes de amortiguamiento que empleando la técnica SSI. Aunque las aproximaciones de los parámetros modales que se obtienen con ambos métodos son buenas y bastante parecidas como se puede ver en Brincker et al (2001).

La técnica SSI permite detectar frecuencias que posiblemente se perderían mediante el método *Peak Picking*, y además obtiene una mejor aproximación de los modos de vibración para todos los casos. La carga computacional del SSI es significativamente mayor que la del *Peak Picking*, pero la calidad de identificación es también mayor.

Sin embargo, este tipo de métodos no es infalible, como se describe en Dahlén et al [12] y puede producir errores por muchas razones ya que, además de todas las suposiciones que se hacen, también hay aproximaciones.

En esta sección, el método de Identificación en el Subespacio Estocástico será explicado de forma resumida, pudiéndose encontrar más detalladamente en Van Overschee (1996) y Peeters y De Roeck (1999).

6.5.1 Modelo de espacio de estados para el estudio de la dinámica de estructuras

El comportamiento dinámico de un sistema mecánico se puede describir mediante la ecuación siguiente:

$$M\ddot{U}(t) + C_{amort}\dot{U}(t) + KU(t) = F(t) \quad (6.5.1)$$

donde M es la matriz de masa, C_{amort} es la matriz de amortiguamiento, K es la matriz de rigidez, $F(t)$ es la excitación y $U(t)$ es el desplazamiento. Para sistemas continuos esta ecuación se discretiza pasando a un sistema con n_2 grados de libertad, por lo que las matrices M , C_{amort} y K serán de dimensiones $n_2 \times n_2$, mientras que los vectores $F(t)$ y $U(t)$ son de orden $n_2 \times 1$. Aunque la ecuación anterior representa el comportamiento dinámico de una estructura, no suele usarse directamente en los métodos de identificación de sistemas por varias razones. La primera es que la ecuación anterior es continua en el tiempo, mientras las medidas se toman en instantes discretos. La segunda consiste en que no es posible medir en todos los grados de libertad como implica dicha ecuación. Por último, es necesario considerar ruido debido a excitaciones desconocidas o a otras causas. Si se trata de identificar un sistema midiendo solamente la respuesta de dicho sistema a excitaciones desconocidas, se suele suponer que el sistema es excitado por un ruido blanco. Por estas razones, la ecuación de equilibrio se convierte en un modelo de espacio de estados estocásticos que es discreto en el tiempo.

Definiendo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} U(t) \\ \dot{U}(t) \end{pmatrix} \quad (6.5.2)$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_{amort} \end{pmatrix} \quad (6.5.3)$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{pmatrix} \quad (6.5.4)$$

donde I_{n_2} es la matriz identidad de orden n_2 . La ecuación de equilibrio se puede transformar en la ecuación de estado siguiente:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c(t)F(t) \quad (6.5.5)$$

donde $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n = 2n_2$) es la matriz de estado, que describe la dinámica del sistema; $B_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de entrada; $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de estado. El número de elementos del vector de estado es el número de variables independientes necesario para describir el estado de un sistema. Los estados del sistema que se van a estimar no tienen necesariamente un significado físico.

En la práctica no se miden todos los grados de libertad. Suponiendo que se dispone de l acelerómetros para evaluar las medidas en l puntos diferentes, se obtiene la ecuación de observación:

$$y(t) = C_a \ddot{U}(t) \quad (6.5.6)$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ son las medidas y $C_a \in \mathbb{R}^{l \times n}$ es la matriz de salida para las aceleraciones. Definiendo:

$$C = (-C_a M^{-1} K \quad -C_a M^{-1} C_{amort}) \quad (6.5.7)$$

$$D = C_a M^{-1} \quad (6.5.8)$$

La ecuación de observación se puede transformar en la siguiente expresión:

$$y(t) = Cx(t) + DF(t) \quad (6.5.9)$$

donde $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ es la matriz de salida, que describe cómo el estado interno se transfiere al mundo exterior de las medidas; $D \in \mathbb{R}^{l \times n}$ es la llamada matriz de transmisión directa. Las expresiones 6.5.5 y 6.5.9 constituyen un modelo del espacio de estados determinista (los valores de $y(t)$ y $F(t)$ pueden ser medidos exactamente) y continuo en el tiempo (las expresiones pueden ser evaluadas en cualquier instante de tiempo). Sin embargo esto realmente no es así, ya que las expresiones pueden ser evaluadas sólo en instantes discretos $k\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$ siendo Δt el intervalo de muestreo, y los valores de $y(t)$ y $F(t)$ no pueden ser medidos con exactitud ya que el ruido siempre está presente. Tras el muestreo, el modelo del espacio de estados se transforma en:

$$x_{k+1} = Ax_k + BF_k \quad (6.5.10)$$

$$y_k = Cx_k + DF_k \quad (6.5.11)$$

donde $x_k = x(k\Delta t)$ es el vector de estado para instantes discretos, $A = \exp(A_c \Delta t)$ es la matriz de estado discreta y $B = [A \quad -I]A_c^{-1}$ es la matriz de entrada discreta. La matriz A describe la dinámica del sistema, ya que los sus autovalores describirán los modos dinámicos que han sido medidos. Incluyendo las componentes estocásticas (el ruido) se obtiene el siguiente modelo determinista y discreto de espacios de estados estocásticos:

$$x_{k+1} = Ax_k + BF_k + w_k \quad (6.5.12)$$

$$y_k = Cx_k + DF_k + v_k \quad (6.5.13)$$

donde $w_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el ruido debido a las inexactitudes del modelo y $v_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ es el ruido debido que hay en las medidas. Ambas señales no pueden ser medidas, pero se suponen que son señales estacionarias y con media cero, que poseen las características de un ruido blanco y que tienen las siguientes matrices de covarianza:

$$E \left[\begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (6.5.14)$$

donde δ_{pq} es la delta de Kronecker, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$ son las matrices de covarianza de las secuencias de ruido v_k y w_k , y $E[\cdot]$ es el valor esperado.

En el caso de vibraciones originadas por el ambiente no se mide la excitación, por lo que el término F_k desaparece de la ecuación anterior, estando la excitación modelada implícitamente en los términos de ruido w_k y v_k . La suposición de ruido blanco de ambos procesos es muy importante y no debe ser violada. Si se viola esta suposición, es decir, la excitación tiene componentes dominantes para alguna frecuencia, entonces estas componentes no se podrán separar de las frecuencias propias del sistema, obteniendo como frecuencias propias del sistema las propias de la excitación. Además se supone que ambas señales no son nulas.

Se hacen varias suposiciones adicionales que se describen a continuación. Las matrices A y C pueden ser observadas, lo que implica que todos los modos del sistema se pueden ver en la salida y_k y así poder identificarlos. El par de matrices $\{A, Q^{1/2}\}$ se puede controlar, lo que significa que todos los modos del sistema son excitados por la entrada estocástica w_k . El proceso estocástico x_k es estacionario, con media cero y matriz de covarianza Σ , $E[x_k x_k^T] = \Sigma$, siendo dicha matriz independiente del tiempo k . Además, w_k y v_k son independientes del estado actual x_k , por lo que $E[x_k w_k^T] = 0$ y $E[x_k v_k^T] = 0$.

6.5.2 Modelo de espacio de estados estocástico

Existen varios modelos de espacio de estados estocásticos: modelo hacia delante, modelo hacia atrás e innovaciones sobre estos dos modelos. Ambos tipos de modelos se diferencian básicamente porque en los que van hacia delante las fórmulas iterativas estiman el valor de x_{k+1} basándose en el valor conocido de x_k , mientras que en los que van hacia atrás es al contrario. El modelo del espacio de estados estocásticos que aquí se describe es el modelo hacia delante por ser el más simple y el más intuitivo.

Si se quiere emplear alguna de las innovaciones de los modelos hacia detrás o hacia delante, hay que comprobar que la serie de covarianzas (determinada por las matrices A , G , C y A_0) son reales y positivas. Basta con verificar que la matriz de covarianzas que forman las matrices Q , S y R sea definida positiva. Si no se satisface esta condición, no se puede resolver realizar el análisis con este tipo de modelos.

Se parte de las siguientes ecuaciones:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k \quad (6.5.15)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (6.5.16)$$

teniendo w_k y v_k media cero, y matriz de covarianzas la dada por la expresión 6.5.14. Se definen las matrices de covarianzas de la salida como:

$$\Lambda_i \equiv E \begin{bmatrix} y_{k+1} & y_k^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l} \quad (6.5.17)$$

Se define la matriz de covarianza G entre el estado próximo y la salida:

$$G \equiv E \begin{bmatrix} x_{k+1} & y_k^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times l} \quad (6.5.18)$$

A partir de estas definiciones se obtienen las siguientes propiedades:

$$\Sigma = A\Sigma A^T + Q \quad (6.5.19)$$

$$\Lambda_0 = C\Sigma C^T + R \quad (6.5.20)$$

$$G = A\Sigma C^T + S \quad (6.5.21)$$

$$\Lambda_i = CA^{i-1}G \quad (6.5.22)$$

Las medidas son guardadas por bloques en una matriz de Hankel con $2i$ bloques de filas y j columnas. Las matrices de Hankel se caracterizan por tener cada antidiagonal formada por la repetición de los mismos elementos. Como los sistemas estocásticos requieren cierta cantidad de análisis estadístico, se supondrá para todos los desarrollos teóricos que $j \rightarrow \infty$.

El número de bloques de filas i hay que definirlo: tiene que ser un número suficientemente grande, como mínimo mayor que el orden máximo del sistema que se quiere identificar. Pero como no se conoce este otro índice n , se supone que $i > n$.

$$H = Y_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2il \times j} \quad (6.5.23)$$

Las medidas son escaladas con un factor $1/\sqrt{j}$. Los subíndices de $Y_{i|2i-1} \in \mathbb{R}^{il \times j}$ son los subíndices del primero y del último elemento en la primera columna de la matriz de Hankel. Los subíndices p y f significan pasado y futuro, respectivamente. Las matrices $Y_p \in \mathbb{R}^{il \times j}$ y $Y_f \in \mathbb{R}^{il \times j}$ se definen agrupando la matriz H en dos partes de i bloques. Se

puede obtener otra división añadiendo la primera columna del futuro al pasado. De este modo quedan definidas las matrices $Y_p^+ \in \mathbb{R}^{l(i+1) \times j}$ y $Y_f^- \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times j}$:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{Y_{0|i-1}}{Y_{i+1|2i-1}} \\ \frac{Y_{i|i}}{Y_{i+1|2i-1}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Y_p^+ \\ Y_f^- \end{pmatrix} \quad (6.5.24)$$

Se define la matriz de observación extendida como:

$$O_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{il \times n} \quad (6.5.25)$$

La matriz inversa de control estocástica extendida se define como:

$$C_i \equiv \begin{pmatrix} A^{i-1}G & A^{i-2}G & \cdots & AG & G \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times li} \quad (6.5.26)$$

6.5.3 Identificación en el Subespacio Estocástico

La identificación se puede realizar empleando dos métodos diferentes: SSI-COV ('Covariance-Driven SSI') y SSI-DATA ('Data-Driven SSI'), que se describen en Peeters y De Roeck (1999 y 2001). En el SSI-COV se calculan las covarianzas entre las salidas y es mucho más rápido. Mientras que en el SSI-DATA se hacen proyecciones del espacio fila futuro sobre el espacio fila pasado, y además es un método más robusto numéricamente. Ambos son muy parecidos, pero presentan algunas diferencias. De hecho, las nociones de las proyecciones y de las covarianzas se encuentran estrechamente relacionadas y no son apreciables las diferencias entre los resultados obtenidos con los dos métodos. En este desarrollo se ha elegido el método SSI-DATA.

- Estados a partir del filtro de Kalman

El objetivo del filtro de Kalman es realizar una predicción óptima para el vector de estado x_{k+1} haciendo uso de las medidas observadas hasta el instante k , las matrices de sistema disponibles y las matrices de covarianza del ruido. Estas predicciones óptimas se denotan por un gorro ($\hat{x}_{k+1}$). Si se conocen la estimación del estado inicial ($\hat{x}_0 = 0$), la covarianza inicial del estado estimado ($P_0 \equiv E[\hat{x}_0 \hat{x}_0^T] = 0$) y el conjunto de medidas ($y_0, y_1, \dots, y_k$), el filtro de Kalman estima el estado $\hat{x}_{k+1}$ según las diferentes fórmulas recursivas, de las cuales se obtienen el estado estimado ($\hat{x}_{k+1}$), la matriz de ganancia del filtro de Kalman (K_k) y la matriz de covarianza del estado (P_{k+1}):

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_k(y_k - C\hat{x}_k) \quad (6.5.27)$$

$$K_k = (G - AP_k C^T)(\Lambda_0 - CP_k C^T)^{-1} \quad (6.5.28)$$

$$P_{k+1} = AP_k A^T + (G - AP_k C^T)(\Lambda_0 - CP_k C^T)^{-1}(G - AP_k C^T)^T \quad (6.5.29)$$

Las estimaciones de los estados obtenidas usando el filtro de Kalman se guardan formando una secuencia de estados estimados que se usará posteriormente en el algoritmo de identificación.

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+j-1}) \in \mathbb{R}^{n \times j} \quad (6.5.30)$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en Van Overschee (1996).

- Proyecciones

La clave de este algoritmo de identificación estocástico es la proyección del espacio de filas futuro en el espacio de filas pasado de la matriz de Hankel. La idea detrás de esta proyección es la de retener toda la información del pasado que resulte útil para predecir el futuro.

En primer lugar se realiza la factorización QR de la matriz de Hankel:

$$H = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} = RQ^T \quad (6.5.31)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{j \times j}$ es una matriz ortonormal (esto significa que $Q^T Q = Q Q^T = I_j$) y $R \in \mathbb{R}^{2il \times j}$ es una matriz triangular inferior (se omiten los ceros en R y Q al ser $2il < j$):

$$H = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (6.5.32)$$

donde $R_{11} \in \mathbb{R}^{li \times li}$, $R_{21} \in \mathbb{R}^{l \times li}$, $R_{22} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $R_{31} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times li}$, $R_{32} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l}$, $R_{33} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l(i-1)}$ y $Q_1 \in \mathbb{R}^{j \times li}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{j \times l}$, $Q_3 \in \mathbb{R}^{j \times l(i-1)}$. Hay que indicar que en el algoritmo las matrices Q se cancelarán debido a su ortonormalidad. Se define la proyección del bloque fila futuro en el bloque fila pasado de la matriz de Hankel como:

$$Y_f / Y_p = Y_f Y_p^T (Y_p Y_p^T)^{\times} Y_p \quad (6.5.33)$$

donde $(\)^{\times}$ quiere decir matriz pseudoinversa. Introduciendo la factorización QR de la matriz de Hankel en la ecuación anterior se obtiene:

$$Y_f / Y_p = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix} Q_1^T \in \mathbb{R}^{il \times j} \quad (6.5.34)$$

El teorema fundamental de la identificación en el subespacio estocástico establece que la proyección Y_f/Y_p se puede factorizar como el producto de la matriz de observación y la secuencia de estados estimados a partir del filtro de Kalman:

$$Y_f/Y_p = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_i & \hat{x}_{i+1} & \dots & \hat{x}_{i+j-1} \end{pmatrix} \equiv O_i \hat{X}_i \quad (6.5.35)$$

(La demostración de este teorema se puede encontrar en Van Overschee (1996)). Para obtener la matriz de observación O_i y la secuencia de estados $\hat{X}_i$ se realiza una descomposición en valores singulares de la matriz de proyección:

$$Y_f/Y_p = U_1 S_1 V_1^T \quad (6.5.36)$$

Por el teorema fundamental citado anteriormente se sabe que el orden n del sistema de ecuaciones definido por las expresiones 6.5.15 y 6.5.16 es igual al número de valores singulares no nulos en la ecuación 6.5.36. En la práctica, debido al ruido, los valores singulares más pequeños no son exactamente cero. Por esto se obtiene el orden del sistema determinando un intervalo entre dos valores sucesivos. El valor singular donde tiene lugar la mayor separación determina el orden del sistema. A la hora de aplicar este criterio se debe ser cuidadoso, ya que generalmente en las estructuras reales no está claro dicho intervalo.

Al ser el $\text{rango}(Y_f/Y_p)=n$, se tiene que $U_1 \in \mathbb{R}^{il \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{j \times n}$. Igualando ambas ecuaciones se obtiene:

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} \quad (6.5.37)$$

$$\hat{X}_i = O_i^\times (Y_f/Y_p) \quad (6.5.38)$$

- Determinación de las matrices del sistema

Hay varios algoritmos diferentes para el cálculo de las matrices: PC (*Principal Component*), UPC (*Unweighted Principal Component*) y CVA (*Canonical Variate Algorithm*). En este apartado se desarrolla el último de ellos (empleando como matriz de ponderación una matriz identidad).

Se han obtenido la matriz de observación O_i y la secuencia de estados $\hat{X}_i$, a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz de Hankel donde se guardan las medidas. Para identificar el sistema también hay que calcular las matrices A , C , Q , R y S . Primero se obtiene la proyección:

$$Y_f^-/Y_p^+ = \begin{pmatrix} R_{31} & R_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times j} \quad (6.5.39)$$

que puede ser calculada a partir de la factorización QR de la matriz de Hankel. Análogamente se obtiene:

$$Y_f^- / Y_p^+ = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{i+1} & \hat{x}_{i+2} & \dots & \hat{x}_{i+j} \end{pmatrix} \equiv O_{i-1} \hat{X}_{i+1} \quad (6.5.40)$$

Se obtiene O_{i-1} a partir de O_i , quitándole a ésta las l últimas filas, y se obtiene la secuencia de estados como:

$$\hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^\times (Y_f^- / Y_p^+) \quad (6.5.41)$$

Por lo tanto se han obtenido las secuencias de estados estimados a partir del filtro de Kalman usando solamente los datos medidos. Se puede formar ahora el sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado siguiente:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \quad (6.5.42)$$

siendo:

$$Y_{i|i} = \begin{pmatrix} R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times j} \quad (6.5.43)$$

Al no estar los residuos ρ_w y ρ_v correlacionados con $\hat{X}_i$, el sistema de ecuaciones puede ser resuelto mediante mínimos cuadrados, obteniendo A y C .

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} \hat{X}_i^\times \quad (6.5.44)$$

Al introducir las expresiones obtenidas anteriormente para $\hat{X}_{i+1}$ y $\hat{X}_i$ en esta ecuación, se cancelan las matrices ortogonales Q .

Finalmente, las matrices de covarianza del ruido Q , R y S se obtienen a partir de la covarianza de los residuos anteriores.

Las matrices A , C , Q , R y S se pueden transformar en A , G , C y Λ_0 , que se pueden obtener resolviendo las ecuaciones 6.5.19, 6.5.20 y 6.5.21. Desde el punto de vista teórico el problema está resuelto: dadas las medidas se obtiene el orden del sistema n y las matrices A , G , C y Λ_0 .

6.5.4 Análisis modal

El método de identificación de sistemas descrito anteriormente puede ser usado para el análisis modal de estructuras. La estructura se encuentra sometida a su carga de servicio, midiéndose la respuesta de la estructura a dicha carga.

A partir del algoritmo de identificación se obtiene la matriz de estado A , cuya descomposición en autovalores y autovectores caracteriza dinámicamente a la estructura.

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (6.5.45)$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_q) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, con $q=1,2,\dots,n$, es una matriz diagonal que contiene los autovalores del sistema discreto y $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores del sistema discreto. La ecuación de estado continua en el tiempo es equivalente a la ecuación de equilibrio del sistema, por lo que ambas tienen los mismos autovalores y autovectores. Realizando una descomposición en autovalores y autovectores de la ecuación de estado continua en el tiempo se obtiene:

$$A_c = \Psi_c \Lambda_c \Psi_c^{-1} \quad (6.5.46)$$

donde $\Lambda_c = \text{diag}(\lambda_{c_q}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, es una matriz diagonal que contiene los autovalores del sistema continuo y $\Psi_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores del sistema continuo. Sabiendo que:

$$A = \exp(A_c \Delta t) \quad (6.5.47)$$

se obtiene:

$$\Psi_c = \Psi \quad (6.5.48)$$

$$\lambda_{c_q} = \frac{\ln(\lambda_q)}{\Delta t} \quad (6.5.49)$$

Los autovalores de A_c son parejas de valores complejos conjugados, que se pueden escribir como:

$$\lambda_{c_q}, \lambda_{c_q}^* = -\xi_q w_q \pm j w_q \sqrt{1 - \xi_q^2} \quad (6.5.50)$$

donde ξ_q es el coeficiente de amortiguamiento del modo q y w_q (rad/s) es la frecuencia natural de dicho modo.

Las deformadas en las localizaciones de los acelerómetros Φ_q se obtienen a partir de la ecuación de observación:

$$\Phi = C \Psi \in \mathbb{C}^{l \times n} \quad (6.5.51)$$

siendo Φ_q las columnas de Φ .

6.5.5 Respuesta modal y errores

El modelo de espacio de estados estocásticos dado por el sistema de ecuaciones de 6.5.15 y 6.5.16 se puede convertir en:

$$z_{k+1} = Az_k + Ke_k \quad (6.5.52)$$

$$y_k = Cz_k + e_k \quad (6.5.53)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{n \times l}$ es la ganancia del filtro de Kalman y $e_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ se conocen como innovaciones, con matriz de covarianza $E[e_p e_q^T] = R_e \delta_{pq}$. El vector de estado z_k es diferente de x_k debido a que las bases de los espacios son distintas. Realizando una descomposición modal, usando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$z_{m_{k+1}} = \Lambda z_{m_k} + K_m e_k \quad (6.5.54)$$

$$y_k = \Phi z_{m_k} + e_k \quad (6.5.55)$$

donde $\Psi^{-1} z_k = z_{m_k}$, $\Psi^{-1} K = K_m$. Eliminando las innovaciones en la primera ecuación se obtiene:

$$z_{m_{k+1}} = (\Lambda - K_m \Phi) z_{m_k} + K_m y_k \quad (6.5.56)$$

$$\hat{y}_k = \Phi z_{m_k} \quad (6.5.57)$$

donde $\hat{y}_k$ es la salida predecida y las innovaciones son los errores predecidos $e_k = y_k - \hat{y}_k$. El modelo de espacio de estados $(\Lambda - K_m \Phi, K_m, \Phi, 0)$ puede ser simulado usando las medidas y_k como entradas. Como resultado se obtendrá el estado en base modal z_{m_k} y las predicciones de las salidas $\hat{y}_k$. Debido a que Λ es una matriz diagonal, la contribución de cada modo a la respuesta total del sistema puede ser separada. Si $(z_{m_k})_q$ representa la componente q de z_{m_k} , se define la respuesta modal del modo q como:

$$\hat{y}_k^{(q)} = \Phi_q (z_{m_q})_q \quad (6.5.58)$$

La respuesta total se puede descomponer como:

$$y_k = \sum_{q=1}^n \Phi_q (z_{m_q})_q + e_k \quad (6.5.59)$$

Con este modelo, además de obtener el error, se puede ver la contribución de cada modo a la respuesta total del sistema.