

7 Comprobaciones

7.1 Comparación de los modos de vibración

Se han desarrollado muchas técnicas para comparar los modos de vibración, como se describe en Ewins (2000). En ocasiones resulta interesante comparar un grupo de modos de vibración obtenidos experimentalmente con otro que se había predecido, con el fin de validar un modelo de la estructura que se está analizando. En otros casos se comparan los modos de vibración obtenidos con ellos mismos para ver su correlación.

Existen programas comerciales que proporcionan una representación gráfica de la comparación entre los modos de vibración, si bien es preferible una representación numérica por ser más objetiva y más fácilmente contrastable.

7.1.1 Comparación gráfica de los modos de vibración

Una forma posible de realizar la comparación es dibujando los dos modos de vibración de forma conjunta. El inconveniente que presenta este tipo de comparaciones es que, a pesar de que se aprecien diferencias entre ambos dibujos, son muy difíciles de interpretar y suelen ser dibujos muy confusos porque hay demasiada información en ellos. Un gráfico alternativo sería un sólo dibujo en el que apareciera la diferencia entre ambos modos, pero también sería muy complicado. Un planteamiento más conveniente consiste en hacer un dibujo en el plano x-y, en el que cada elemento del modo de vibración se dibuja como se muestra en la Figura 7.1. Los puntos individuales en este dibujo están relacionados con los grados de libertad específicos en el modelo, y es de esperar que estén próximos a la línea recta que pasa por el origen y que tiene una pendiente de ± 1 . Para que esto ocurra es necesario que los modos de vibración se encuentren normalizados de la siguiente manera:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi\}_r \quad , \quad m_r = \{\psi\}_r^T [M] \{\psi\}_r \quad (7.1.1)$$

donde $\{\phi\}_r$ es el modo normalizado, $\{\psi\}_r$ es el modo de vibración que se ha obtenido, $[M]$ es la matriz de masa y m_r es la masa modal. También hay que verificar que los dos vectores que se están comparando representan al mismo modo de vibración. Si se cumplen todos estos requisitos y sigue sin haber una buena correlación entre los valores experimentales y los analíticos, es conveniente revisar el modelo analítico que se ha desarrollado, así como las suposiciones realizadas.

Este último método de comparación supone que los modos de vibración que se están comparando son reales.

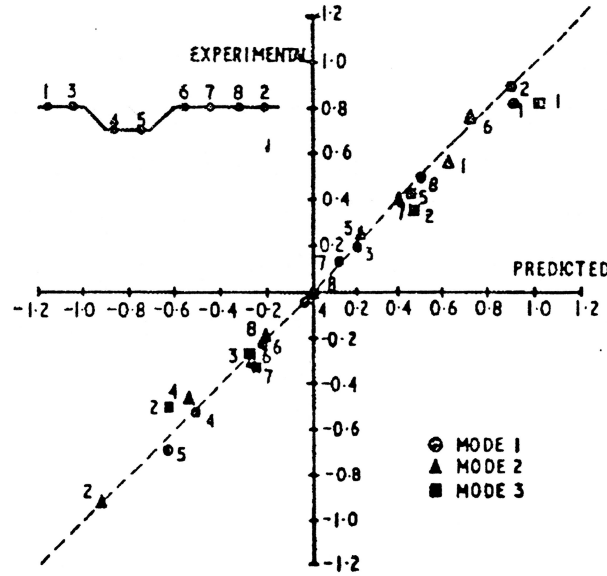


Figura 7.1. Comparación gráfica de tres modos de vibración mediante el plano x-y, utilizando ocho puntos para cada modo.

7.1.2 Correlación numérica (MAC) entre los modos de vibración

Es el procedimiento más usado para correlacionar dos conjuntos de modos de vibración. Las fórmulas dadas a continuación suponen que los modos son complejos. Se emplea para comparar los modos de vibración medidos $\{\psi_X\}$ con los calculados teóricamente $\{\psi_A\}$.

Las dos expresiones siguientes representan la pendiente de la línea recta que mejor se ajusta a los puntos del gráfico en el plano x-y (visto en el Apartado 7.1.1), y se le denomina Factor de Escala Modal (MSF).

$$MSF(X, A) = \frac{\sum_{j=1}^n (\psi_X)_j (\psi_A)_j^*}{\sum_{j=1}^n (\psi_A)_j (\psi_A)_j^*} \quad (7.1.2)$$

$$MSF(A, X) = \frac{\sum_{j=1}^n (\psi_A)_j (\psi_X)_j^*}{\sum_{j=1}^n (\psi_X)_j (\psi_X)_j^*} \quad (7.1.3)$$

donde n es el número de grados de libertad para los que se dispone de datos. En la expresión 7.1.2 se realiza la comparación tomando como referencia los modos calculados teóricamente, y en la 7.1.3 se toman como referencia los obtenidos experimentalmente. Pero este parámetro no proporciona información acerca de la comparación entre ambos modos.

El parámetro conocido como MAC (*Modal Assurance Criterion*) proporciona una medida de la desviación de los puntos del gráfico x-y de la línea recta de correlación. Es una cantidad escalar incluso si los modos que se están comparando son complejos. Dos expresiones alternativas se muestran a continuación:

$$MAC(A, X) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\psi_X)_j (\psi_A)_j^* \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\psi_X)_j (\psi_X)_j^* \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\psi_A)_j (\psi_A)_j^* \right)} \quad (7.1.4)$$

$$MAC(A, X) = \frac{|\{\psi_X\}^T \{\psi_A\}|^2}{(\{\psi_X\}^T \{\psi_X\}) \cdot (\{\psi_A\}^T \{\psi_A\})} \quad (7.1.5)$$

Si los dos modos que se están comparando son idénticos, se cumple que los parámetros $MAC(A, X)$, $MSF(X, A)$ y $MSF(A, X)$ tienen un valor unidad. Pero si los modos son proporcionales de manera que: $\{\psi_X\} = \gamma \{\psi_A\}$, el parámetro $MAC(A, X)$ sigue teniendo un valor unidad, mientras que los otros dos varían: $MSF(X, A) = \gamma$ y $MSF(A, X) = \gamma^{-1}$.

Dados dos conjuntos de modos, uno de ellos formado por m_X modos experimentales y el otro por m_A modos teóricos, se puede presentar en una matriz de dimensiones $m_X \times m_A$ los valores del MAC en la que se ve claramente las relaciones entre los modos experimentales y los teóricos. Generalmente se acepta que un valor del MAC por encima de 0.9 indica que los modos comparados están correlacionados, y un valor por debajo de 0.1 señala que no hay correlación entre ambos.

Las causas de que el parámetro MAC no alcance exactamente el valor unidad para modos correlacionados pueden ser varias:

- el modelo analítico es una aproximación de la estructura real.
- presencia de no linealidades en la realización del ensayo.
- presencia de ruido en las medidas.
- análisis modal pobre de los datos medidos.
- inapropiada elección de los grados de libertad incluidos en la correlación.

La elección de los grados de libertad con los que se va a calcular el MAC es bastante importante. Se tiene que elegir un número de grados de libertad suficiente para que se puedan distinguir bien los diferentes modos de vibración. Es obvio que si se incluyen todos los grados de libertad del modelo se obtiene una medida más precisa de la correlación entre los dos vectores. Sin embargo, también resulta evidente que se obtendrá un resultado diferente si sólo se eligen unos pocos grados de libertad.

7.1.3 Auto-MAC

Es una versión del parámetro MAC en la que se compara un grupo de modos de vibración obtenidos con ellos mismos. La matriz que se obtiene se caracteriza por tener la diagonal principal formada por elementos de valor unidad, además de ser cuadrada y simétrica. Si todos los modos de vibración obtenidos son ortogonales, los elementos que no se encuentran en la diagonal serán nulos. Una de las razones por la que esto último

puede no cumplirse es debido a que la condición de ortogonalidad sólo se satisface cuando se incluyen en los cálculos todos los grados de libertad. Otra de las razones es que la propiedad de ortogonalidad es sólo rigurosamente aplicable cuando se usa la matriz de masa. El siguiente tipo de MAC elimina esta última razón mediante el empleo de una matriz de ponderación.

7.1.4 MAC-normalizado

En esta versión de MAC se emplea una matriz de ponderación, que puede ser tanto la de masa como la de rigidez, para normalizar el valor del parámetro calculado. Su expresión matemática es la siguiente:

$$NCO(A, X) = \frac{|\{\psi_x\}^T [W] \{\psi_A\}|^2}{(\{\psi_x\}^T [W] \{\psi_x\}) \cdot (\{\psi_A\}^T [W] \{\psi_A\})} \quad (7.1.6)$$

donde $[W]$ es la matriz de ponderación. El principal inconveniente que puede aparecer es que no se empleen todos los grados de libertad de la matriz de ponderación, por lo que habría que condensarlos para dejar sólo aquellos para los cuales hay datos.

7.2 Armónicos

Hay muchas ocasiones en las que en las señales que se están analizando aparecen armónicos que realmente no interesan, y que hay que saber distinguir. Las propiedades estadísticas de una respuesta armónica y de una respuesta estructural estocástica son bastante diferentes, como se describe en Brincker et al [8]. La función densidad de probabilidad de una respuesta armónica es una distribución que presenta dos picos, mientras que la función de una respuesta estructural estocástica es una distribución con un solo pico. De este modo, la función densidad de probabilidad experimental para un modo cualquiera que se haya obtenido constituye un indicador natural de la respuesta armónica o estructural.

Cualquier tipo de estructura excitada con algún tipo de carga estocástica, producirá una respuesta con una densidad de probabilidad próxima a una distribución Gaussiana. Es fácil concluir que cualquier combinación de un gran número de variables aleatorias tiende a tener una distribución normal, independientemente de las propiedades estadísticas de las variables. De manera que si cualquier estructura se excita con un número suficientemente grande de fuentes de carga independientes, la respuesta será siempre aproximadamente Gaussiana. Esto es cierto independientemente de las operaciones que se le hagan a la señal, si está filtrada, etc.

Los armónicos también pueden ser detectados al calcular la relación de amortiguamiento de sus modos correspondientes, ya que presentan valores de este parámetro varios órdenes de magnitud inferiores a los demás.

A continuación se muestra un ejemplo que ilustra todo esto. En la Figura 7.2 se muestran los valores singulares de la matriz de densidad espectral para los ocho primeros picos, que se va a comprobar si realmente son frecuencias naturales. Observando los ocho se puede ver que los tres primeros presentan una forma muy diferente a los demás. Esto puede hacer sospechar que sean armónicos. Si se calculan las funciones de densidad de probabilidad para todos los modos, se obtiene que para los tres primeros modos aparecen dos picos mientras que para los otros cinco sólo tiene uno. En la Figura 7.3 se representan dichas funciones para los cuatro primeros modos, pudiéndose observar la clara diferencia entre los tres primeros y el cuarto.

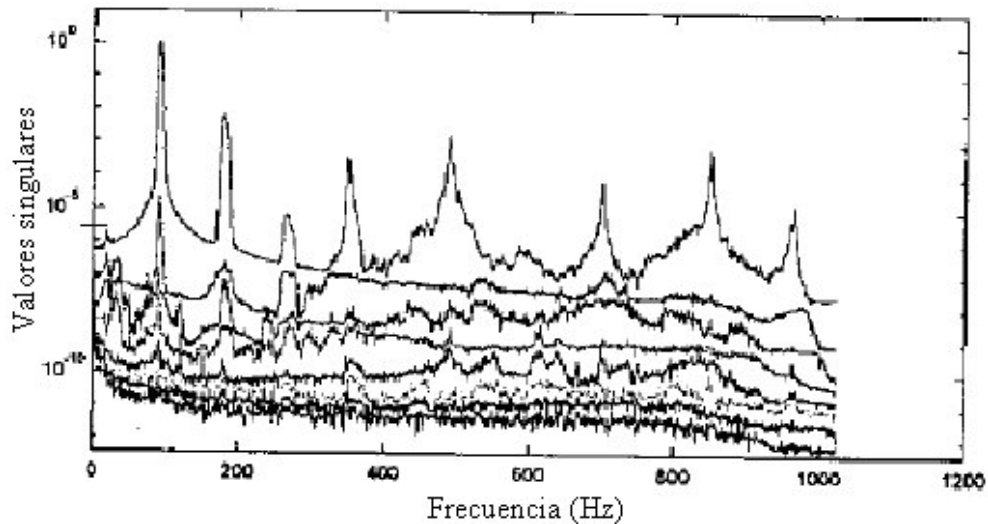


Figura 7.2 Ejemplo de valores singulares con tres armónicos.

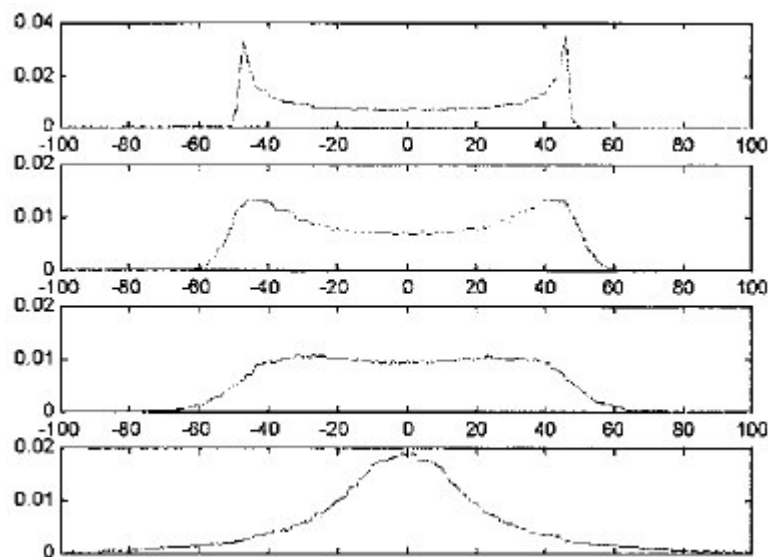


Figura 7.3 Función de densidad espectral para los cuatro primeros modos, siendo los tres primeros armónicos.