# Capítulo 1

## Introducción.

#### 1.1. Antecedentes.

El péndulo es uno de los elementos más antiguos sometidos a investigación científica a lo largo de la historia. Una de las propiedades más destacable del péndulo fue descubierta en 1908 por Andrew Stephenson, el cual demostró que es posible estabilizar un péndulo plano en su posición invertida sometiendo su pivote a una vibración vertical a alta frecuencia.

Precisamente es esta propiedad del péndulo la que ha hecho posible el análisis de posteriores situaciones como la del proyecto que nos ocupa.

En el siguiente texto vamos a tratar de analizar el sistema formado por un péndulo esférico invertido sometido a una vibración vertical en su base, todo ello condicionado por el fenómeno de la fricción.

Para desarrollar este proyecto nos hemos basado en un Proyecto Fin de Carrera anterior, denominado Estabilización del péndulo esférico invertido mediante vibración del punto de apoyo. En este último proyecto se busca investigar la estabilización de la posición invertida del péndulo esférico sometido a vibración en el punto de apoyo, y más en concreto, ver como deben ser los parámetros de esa vibración para conseguir que sea estable; todo ello en ausencia de rozamiento.

Para una mejor comprensión de lo datos que se expondrán en este documento, pasaremos primeramente a explicar o describir de una forma más o menos breve, el modelo sin fricción y posteriormente entraremos en profundidad sobre el caso que nos ocupa.

### 1.2. Descripción del modelo sin fricción

Para este caso se ha hecho un estudio analítico de las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema mediante formulación Hamiltoniana y usando coordenadas estereográficas polares. La razón de que se eligiese la formulación Hamiltoniana es que Auto2000 usa ecuaciones diferenciales de primer orden, como son las hamiltonianas. Y se usan coordenadas estereográficas polares porque se pretende eliminar el momento angular y usando estas coordenadas aparece de forma explícita en las ecuaciones.

Este proyecto se divide a su vez en dos partes bien diferenciadas, una que analiza el caso plano y otra que analiza el caso espacial. A continuación pasaremos a describir cada uno de los casos de forma separada.

#### 1.2.1. Caso plano.

En este apartado se va a estudiar el caso en el que el momento cinético es nulo, y por tanto el movimiento del péndulo permanece en un plano puesto que se anula la velocidad angular.

Además vamos a determinar para qué valores de los parámetros de la vibración existen soluciones periódicas, estudiando también su estabilidad.

Todo este análisis se realizó con Auto2000, por lo que conviene que definamos algunos conceptos, relacionados con la continuación numérica, antes de exponer los resultados que obtenidos.

- Punto límite o pliegue (LP) Es el punto en el cual se unen una órbita periódica estable y otra inestable, para desaparecer a continuación.
- Punto de bifurcación (BP) Es el punto a partir del cual nace una nueva rama de órbitas cuyo periodo es igual al de las órbitas de la rama de la que parte.
- Punto de bifurcación de periodo (PD) Es el punto de una rama de órbitas periódicas a partir del cual nace una nueva rama de órbitas periódicas cuyo periodo es el doble del de las órbitas de la rama de la que parte.

Las ecuaciones que se usaran para el caso plano son las siguientes:

$$\dot{\rho} = (1 + \rho^2)^2 R$$

$$\dot{R} = -2\rho (1 + \rho^2) R^2 + (\mu + 2\ddot{u}) \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2}$$
(1.1)

siendo  $\ddot{u} = A\cos(t)$ ,  $\rho$  es la coordenada estereográfica polar que viene dada por  $\rho = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$  y  $R = \dot{\rho}$ .

Como podemos observar los únicos parámetros de estas ecuaciones son  $\mu$  y A. En el desarrollo de este proyecto se fijan dos valores de  $\mu$  y para cada uno de ellos se va a ir variando la amplitud A hallando así el diagrama de bifurcaciones, el cual muestra las diversas ramas de órbitas periódicas estables e inestables representadas por la distancia a la posición vertical  $L_2 - Norm(\rho)$  en función de A.

Así los diagramas que se obtiene para las dos frecuencias usadas  $\mu = 0.01$  y  $\mu = 0.1$  son los que se representan en las Figuras 1.1 y 1.2.

Analizando el caso  $\mu=0.01$  obtenemos la Figura 1.1 y las posteriores conclusiones:

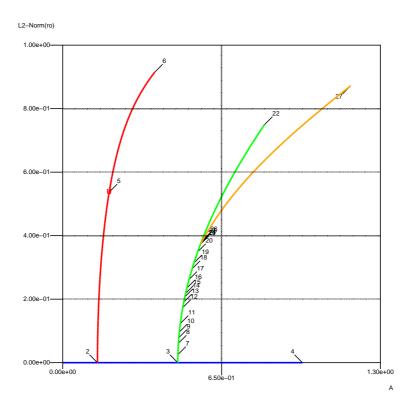


Figura 1.1: Diagrama de bifurcaciones para  $\mu = 0.01$ .

La solución vibratoria vertical, representada en azul en el diagrama, sólo es estable entre sus puntos de bifurcación BP y PD (2 y 3 en la figura respectivamente). La rama que parte del BP (en rojo) es de soluciones inestables. La que parte del PD (en verde) es de soluciones de periodo doble, estables hasta la BP que presenta; las posteriores son inestables. De esta última BP parte la rama naranja, de órbitas estables hasta un punto PD no detectado por Auto, después son inestables.

El diagrama en el caso  $\mu=0.1$  Figura 1.2 es totalmente análogo aunque con valores distintos.

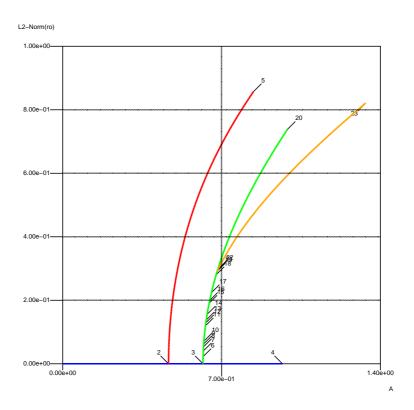


Figura 1.2: Diagrama de bifurcaciones para  $\mu = 0,1$ .

La rama representada en color azul muestra la primera de las continuaciones, donde el péndulo no se separaba de la posición vertical ( $\rho=0$ ). La etiqueta 2 representa un punto de bifurcación BP, y la número 3 un punto PD. En esta rama sólo hay estabilidad entre esas dos órbitas.

La rama roja es la segunda obtenida, que parte del punto BP y se separa de la vertical. Las soluciones que la componen son todas inestables.

La tercera continuación está representada en verde y es la rama de órbitas periódicas de periodo doble que se separa de la posición vertical en la PD. Esta rama presenta una bifurcación BP en la etiqueta 19. Las soluciones son estables hasta esa órbita BP, después son inestables.

La rama que parte de esta última BP es la de color naranja en el diagrama. Sus soluciones son estables hasta un valor aproximado del parámetro A de 0.69, donde hay una bifurcación PD no detectada por Auto; las órbitas posteriores son inestables.

Se puede ver que la zona de órbitas estables que require menor amplitud de excitación para cada frecuencia es la zona de la solución vibratoria vertical delimitada por los puntos de bifurcación BP y PD. Para ver cómo evoluciona esa región en función de la frecuencia y la amplitud de forzamiento, se ha realizado una continuación en dos parámetros de los puntos de bifurcación. Así se obtiene el conjunto de bifurcaciones del sistema, representado en la Figura 1.3.

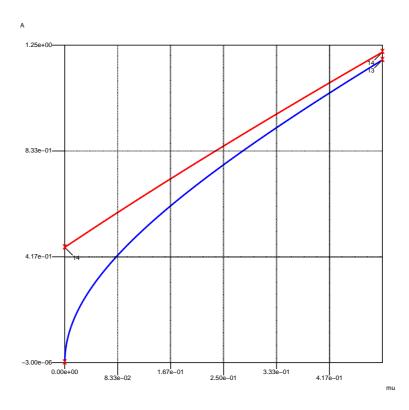


Figura 1.3: Conjunto de bifurcaciones del sistema.

En la anterior figura se observa que la linea azul muestra la variación de la BP, y la roja, la de la PD. La zona comprendida entre ambas es la franja de estabilidad.

Además podemos observar que cuanto menor es la frecuencia de la excitación (mayor  $\mu$ ), mayor es la amplitud necesaria para estabilizar el péndulo en su posición vertical, y menor es el rango de valores de dicha amplitud con los que se consiguen soluciones estables.

Se sabe que para valores mayores de la amplitud existen sucesivas zonas de estabilidad, aunque de tamaño reducido.

#### 1.2.2. Caso espacial.

En esta sección se estudia el caso de momento cinético no nulo. En este supuesto el movimiento es tridimensional ya que no se anula la velocidad angular. En este caso, al no existir rozamiento, se deduce que el valor del momento angular permanece constante, por lo que puede ser considerado un parámetro en las ecuaciones del sistema.

Aquí se hará un seguimiento de los parámetros de la vibración armónica forzante y del momento angular, para los que existen soluciones periódicas, estudiando su estabilidad ante perturbaciones externas.

Al igual que en el caso plano se sigue utilizando la formulación hamiltoniana en coordenadas estereográficas polares. Así, las ecuaciones que se usan serán:

$$\dot{\rho} = (1 + \rho^2)^2 R$$

$$\dot{R} = -2\rho (1 + \rho^2) R^2 + \frac{1 - \rho^4}{\rho^3} \Theta^2 + (\mu + A\cos t) \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2}$$

$$\dot{\theta} = (1 + \rho^2)^2 \frac{\Theta}{\rho^2}$$
(1.2)

A la hora de realizar el estudio de soluciones periódicas mediante continuación numérica de parámetros, se puede prescindir de la tercera ecuación y estudiar sólo el movimiento radial con las dos primeras ecuaciones.

$$\dot{\rho} = (1 + \rho^2)^2 R$$

$$\dot{R} = -2\rho (1 + \rho^2) R^2 + \frac{1 - \rho^4}{\rho^3} \Theta^2 + (\mu + A\cos t) \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2}$$
(1.3)

Se tienen por tanto tres parámetros, la frecuencia, la amplitud y el momento angular.

Para estudiar las órbitas periódicas que describe el péndulo en su movimiento tridimensional, se usará el programa de continuación numérica Auto como en el caso plano. Sin embargo, el programa necesita, además de las ecuaciones del movimiento, una solución inicial desde la que iniciar el proceso.

Se dispone de la solución vibratoria vertical para iniciar la continuación al igual que en el caso plano. Sin embargo, Auto da problemas con esta solución ya que en las ecuaciones de movimiento espacial aparece  $\rho$  en el denominador, y en la posición vertical sucede que  $\rho=0$ . Esto no supone ninguna incoherencia física puesto que en esta posición  $\Theta=0$  y se anula ese sumando, sin embargo Auto no acepta esta solución y nos muestra un error.

Por esta razón se recurre al uso del programa de simulación Dynamics Solver. En este programa introducimos las ecuaciones de movimiento, el valor de los parámetros y un valor inicial para cada variable. Utilizando todos estos datos como punto de partida, el programa simula una órbita donde la evolución de las variables viene marcada por las ecuaciones.

En este caso lo que se busca es encontrar una solución periódica en las variables  $\rho$  y R. Se busca una solución periódica cercana de una de las halladas en el caso plano. Por ejemplo se escoge la órbita etiquetada con el número 5 en la continuación con  $\mu=0,01$ , que pertenece a la rama que parte del punto de bifurcación BP, como se puede observar en la Figura 1.1. Esta es una solución inestable cuya amplitud es A=0,19.

Así introduciendo todos estos valores en Dynamics Solver encontramos que los valores de los parámetros de la solución son:

$$A=0, 19$$
  
 $\mu=0, 01$  (1.4)  
 $\Theta=0, 002$ 

Con el mismo programa podemos obtener las representaciones de  $\rho$  y R en función del tiempo, a partir de las cuales podemos obtener expresiones analíticas aproximadas de las variables:

$$\rho(t)=0, 1595 - 0, 0305 \cos(t)$$

$$R(t)=0, 029 \sin(t)$$
(1.5)

Así fijando los parámetros  $\mu = 0.01$  y A = 0.19, mediante Auto se obtiene el diagrama de bifurcaciones de la Figura 1.4.

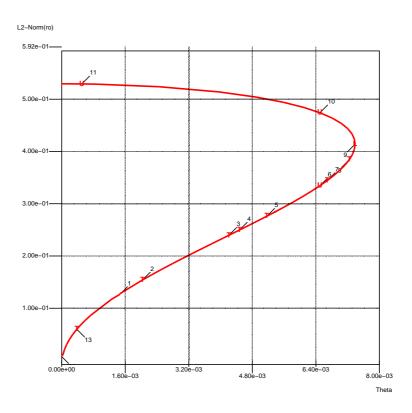


Figura 1.4: Conjunto de bifurcaciones de la continuación en  $\Theta$  para  $A{=}0.19$  y  $\mu=0{,}01$ .

En esta figura se observa que existe un punto límite LP, etiquetado como 9, que marca la separación entre las órbitas estables, rama inferior, y las inestables, rama superior. También representa el máximo momento cinético para el que se puede estabilizar el péndulo sin variar los parámetros de la vibración del punto de apoyo.

Para ver cómo se conectan el movimiento plano y el espacial del péndulo, hay que señalar que los dos puntos con  $\Theta=0$  de la Figura 1.4 se corresponden: el inferior, con la solución vibratoria vertical para A=0.19 y  $\mu=0.01$ ; y el superior, con la órbita 5 de la rama que partía de la BP de la Figura 1.1.

Por último, para estudiar la variación del punto de cambio de estabilidad LP se ha realizado una continuación del mismo en dos parámetros  $(A \text{ y } \Theta)$ , dicha evolución se representa en la Figura 1.5.

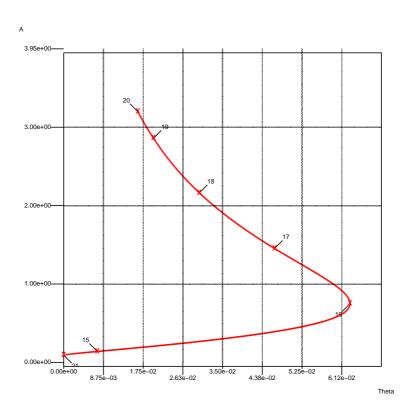


Figura 1.5: Variación del LP con  $\Theta$  y A.

Podemos observar que la gráfica de variación del LP tiene a su vez un punto de pliegue LP, etiquetado como 16 en la figura anterior.

Se puede comprobar que el punto LP para momento angular nulo de la figura se corresponde con el punto de bifurcación BP de la solución vibratoria vertical. Por tanto quedan conectados los casos de movimiento plano y tridimensional.

## 1.3. Descripción del modelo con fricción.

El sistema objeto de estudio en el presente proyecto viene definido en la siguiente figura:

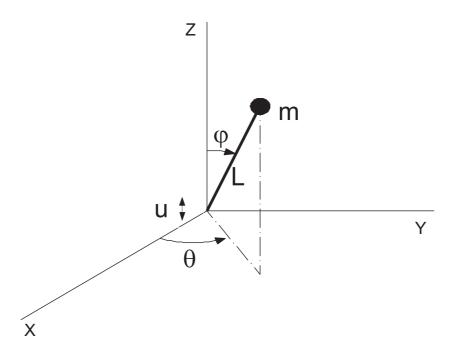


Figura 1.6: Péndulo esférico invertido.

Consideraciones de nuestro sistema:

- La varilla tiene longitud l y su masa se considerará despreciable frente a la masa situada en el extremo del péndulo.
- La masa situada en el extremo de la varilla tiene valor M.
- El rozamiento en la rótula que debiera existir en el punto inferior de la varilla se considera despreciable.
- Se considera el rozamiento con el aire.

La excitación a la que sometemos nuestro sistema en su base supondremos que es de la forma:

$$u = a \cdot \cos(\omega t) \tag{1.6}$$

### 1.4. Objetivos del proyecto.

El estudio del presente proyecto, constará de dos parte bien diferenciadas, una parte analítica y otra numérica, la cual se llevará a cabo con el programa de simulación numérica Dynamics Solver.

Los objetivos de nuestro proyecto se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Obtener las ecuaciones de movimiento del sistema definido por nuestro modelo de la Figura 2.1, utilizando la formulación lagrangiana.
- Aprender a usar el programa de simulación numérica Dynamics Solver, el cual nos servirá para analizar las ecuaciones obtenidas en los puntos anteriores.
- Mediante el software de continuación numérica escogido, analizar el tipo de movimiento que sigue nuestro sistema, así como el estudio de los posibles soluciones periódicas que se obtuvieran.