Capítulo 2

Coordenadas del sistema.

En este capítulo pasaremos a describir las coordenadas que van a definir nuestro sistema.

En principio tomaremos distintos tipos de coordenadas para definir nuestro sistema y posteriormente elegiremos las coordenadas más apropiadas para el posterior análisis del movimiento.

Describiremos los vectores de posición y velocidad en todos los sistemas de coordenadas elegidos.

2.1. Vector posición y vector velocidad

2.1.1. Coordenadas esféricas

El sistema consta de dos grados de libertad, los cuales en coordenadas esféricas vienen representados por los ángulos φ y θ , los cuales se muestran en la siguiente figura:

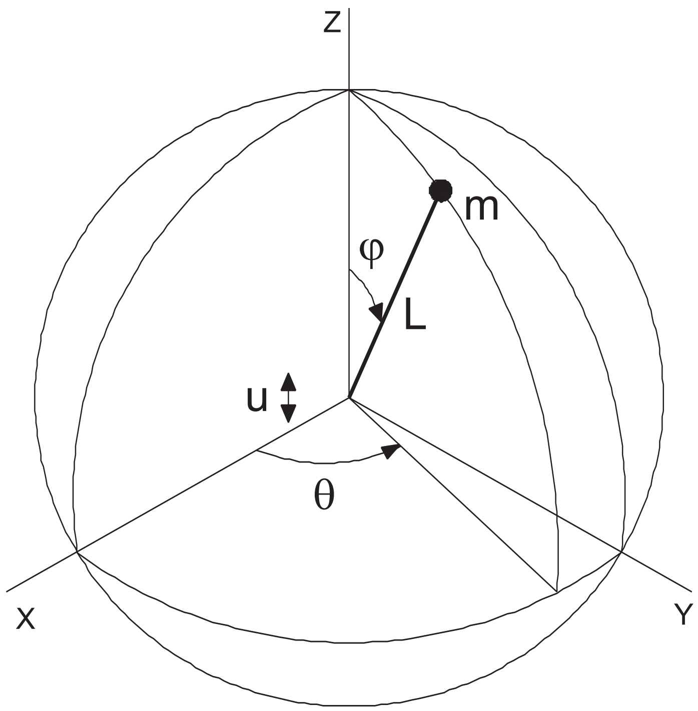

Figura 2.1: Coordenadas esféricas.

Vector posición

La posición de la masa en el sistema cartesiano de la figura 2.1 viene dado por:

$$\begin{aligned} x&=l\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ y&=l\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ z&=u+l\cos(\varphi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vector velocidad

Si se derivan las expresiones 2.1 con respecto al tiempo, se obtiene el vector velocidad, en cuyo caso sería:

$$\begin{aligned} \dot{x}&=l(-\dot{\theta}\sin(\theta)\sin\varphi+\dot{\varphi}\cos(\theta)\cos(\varphi))\\ \dot{y}&=l(\dot{\theta}\cos(\theta)\sin\varphi+\dot{\varphi}\sin(\theta)\cos(\varphi))\\ \dot{z}&=\dot{u}-l\dot{\varphi}\sin(\varphi) \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2. Coordenadas estereográficas

Para definir los dos grados de libertad de nuestro sistemas usamos las coordenadas estereográficas x_s e y_s, las cuales mostramos en la Figura 2.2.

Para obtener dichas coordenadas basta con prolongar la linea que une el polo inferior de la esfera con la masa situada en el extremo del péndulo hasta que corte a un plano horizontal situado en el polo superior de la esfera.

Así obtendríamos x_s e y_s; para relacionar dichas coordenadas con las cartesianas se usan las relaciones trigonométricas sacadas de la Figura 2.3 que se muestran en las expresiones (2.3):

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \rho^2 &= x_s^2 + y_s^2 \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) &= \frac{2l}{\rho} \end{aligned} \tag{2.3}$$

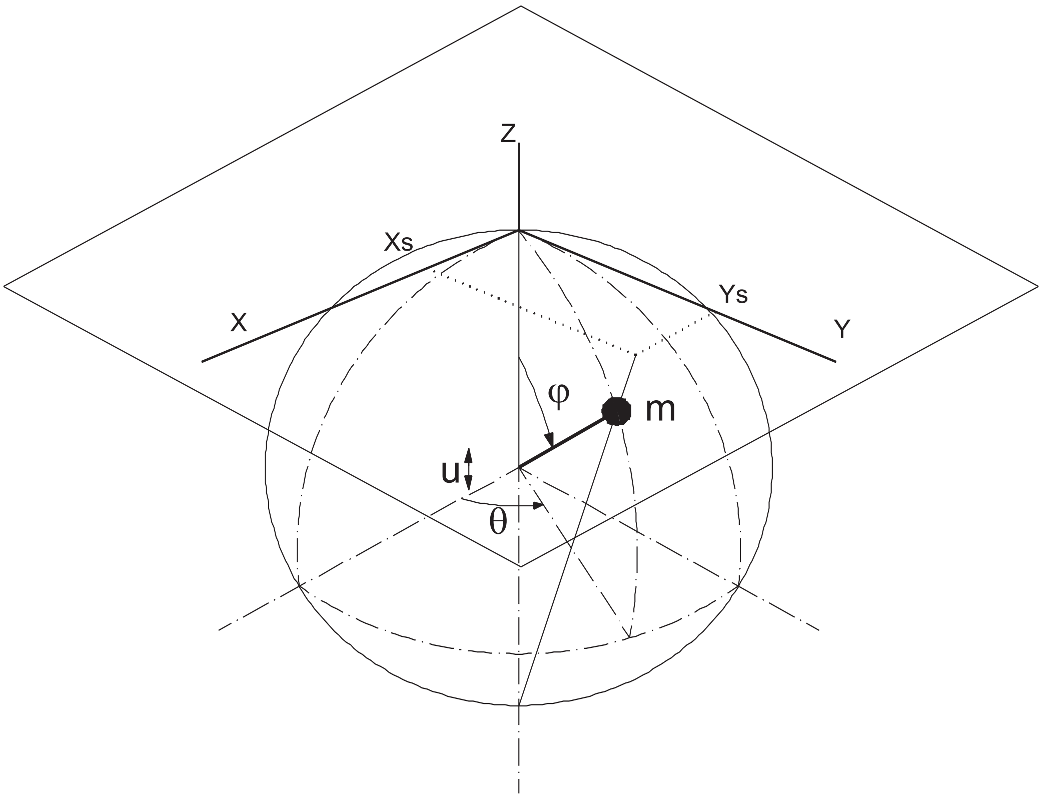

Figura 2.2: Coordenadas estereográficas.

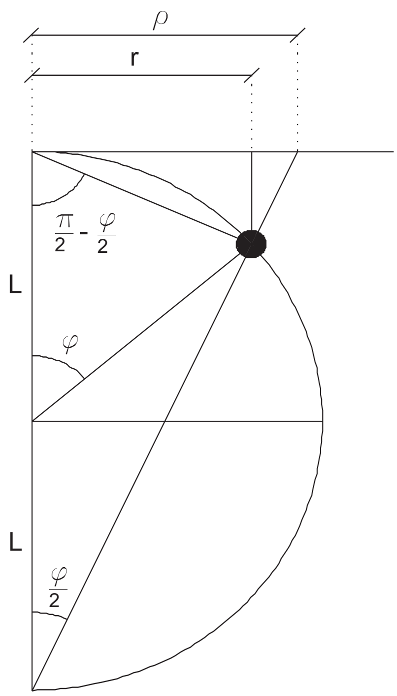

Figura 2.3: Sección vertical.

Vector de posición

Teniendo en cuenta que la posición de nuestra masa m sobre los ejes cartesianos serían:

$$
\begin{aligned}
x = & r\cos(\theta) \\
y = & r\sin(\theta) \\
z = & u - \frac{r}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Si aplicamos las relaciones (2.3) a estas últimas ecuaciones (2.4),obtenemos el vector de posición en las coordenadas estereográficas:

$$
\begin{aligned}
x = & \frac{r}{\rho} x_s \\
y = & \frac{r}{\rho} y_s \\
z = & u - \frac{r\rho}{2l}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Vector velocidad

Derivando lass expresiones (2.5) con respecto al tiempo obtenemos el vector velocidad:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2} x_s + \frac{r}{\rho}\dot{x}_s \\
\dot{y} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2} y_s + \frac{r}{\rho}\dot{y}_s \\
\dot{z} &= \dot{u} - \frac{\dot{r}\rho + r\dot{\rho}}{2l}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.1.3. Coordenadas estereográficas polares

Estas nuevas coordenadas se obtienen igual que las anteriores prolongando la línea de unión entre el polo inferior de la esfera y el extremo superior del péndulo, con la salvedad de que ahora para describir el punto que se obtiene en el plano que pasa por el polo superior a la esfera se usan coordenadas polares (ρ,θ) y no cartesianas (x_s, y_s) como en el caso anterior.

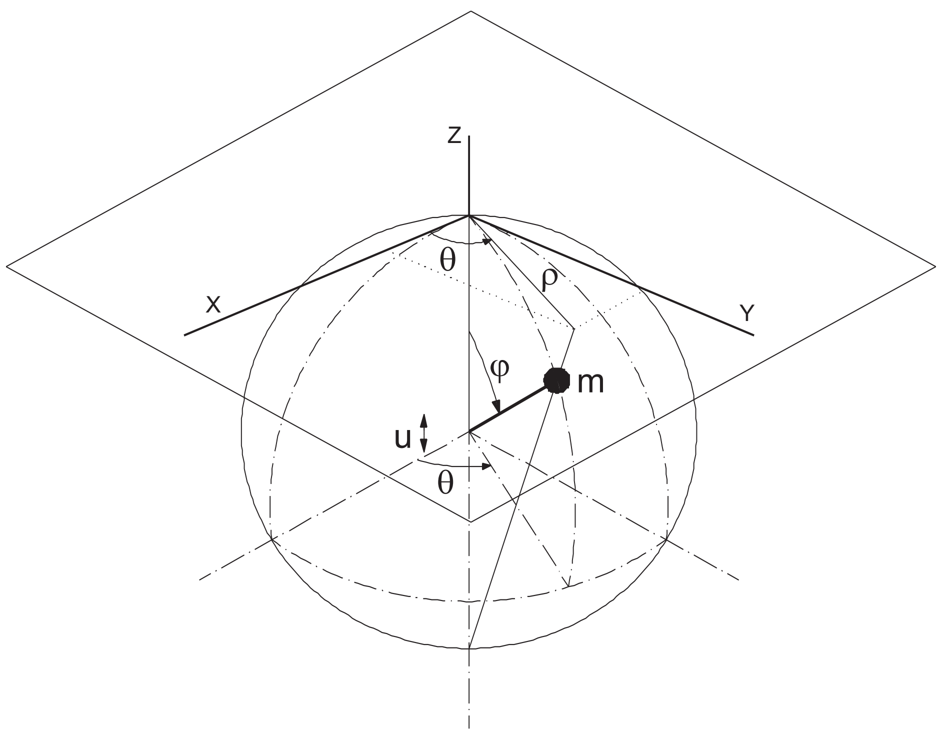

Figura 2.4: Coordenadas estereográficas polares.

Vector posición

Por tanto si observamos la Figura 2.4 vemos que para obtener el vector posición en estas nuevas coordenadas basta con realizar el cambio:

$$\begin{aligned} x_s &= \rho\cos(\theta) \\ y_s &= \rho\sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vector velocidad

Derivando las expresiones (2.7) con respecto al tiempo obtenemos el vector velocidad:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \dot{\rho}\cos(\theta) - \rho\dot{\theta}\sin(\theta) \\ \dot{y}_s &= \dot{\rho}\sin(\theta) + \rho\dot{\theta}\cos(\theta) \end{aligned} \tag{2.8}$$