Capítulo 3

Energías

3.1. Cálculo de la energía cinética

En este capítulo vamos a calcular las expresiones que definen la energía cinética para cada uno de los sistemas de coordenadas definidos en el capítulo anterior.

3.1.1. Coordenadas esféricas

La energía cinética de nuestro sistema viene dada por la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.1}$$

siendo la masa m la correspondiente a la masa situada en el extremo del péndulo, ya que se ha considerado la masa de la varilla despreciable frente a ésta. La velocidad v será la que cambie según los distintos sistemas de coordenadas elegidos, así para el caso de las coordenadas esféricas tendremos que:

$$v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{(}\frac{1}{2}) \tag{3.2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 =& l^2(\dot{\theta}^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi) \\
\dot{y}^2 =& l^2(\dot{\theta}^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi) \\
\dot{z}^2 =& \dot{u}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi - 2l\dot{u}\dot{\varphi} \sin\varphi
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sustituyendo las expresiones (3.3) en la ecuación de la energía cinética y realizando algunas operaciones obtenemos la expresión final de la energía cinética en coordenadas esféricas:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - ml\dot{u}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{3.4}$$

3.1.2. Coordenadas estereográficas

En estas nuevas coordenadas, al igual que en el caso anterior se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2}x_s + \frac{r}{\rho}\dot{x}_s \\ \dot{y} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2}y_s + \frac{r}{\rho}\dot{y}_s \\ \dot{z} &= \dot{u} - \frac{\dot{r}\rho + r\dot{\rho}}{2l} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sumando las expresiones anteriores llegamos a:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{\dot{r}\rho^2 - r^2\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{r^2}{\rho^2}(\dot{x_s}^2 + \dot{y_s}^2) + \dot{u}^2 + \frac{(\dot{r}\rho + r\dot{\rho})^2}{4l^2} - \frac{\dot{u}}{l}(\dot{r}\rho + r\dot{\rho}) \tag{3.6}$$

Usando un calculo matemático sencillo a través de la relación del ángulo doble y teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas dadas por las expresiones (3.7) obtenemos las expresiones de r y $\dot{r}$ en función de l y ρ.

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{r}{l} \\ \tan\frac{\varphi}{2} &= \frac{\rho}{2l} \\ \sin\varphi &= 2\tan\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{1 + \tan^2\frac{\varphi}{2}^2}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Así las expresiones de r y $\dot{r}$ son:

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\rho l^2}{4l^2 + \rho^2} \\ \dot{r} &= \frac{4l^2(4l^2 - \rho^2)}{(4l^2 + \rho^2)^2}\dot{\rho} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sustituyendo las expresiones (3.8) en la expresión (3.6) obtenemos el término de la velocidad en función de las coordenadas estereográficas:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{16l^4}{(4l^2+\rho^2)^2}(\dot{x_s}^2 + \dot{y_s}^2) + \dot{u} - \frac{32l^3\dot{u}}{(4l^2+\rho^2)^2}\rho\dot{\rho} \quad (3.9)$$

Por último sustituyendo la expresión (3.9) en la expresión (3.1) obtenemos la energía cinética en función de las coordenadas estereográficas:

$$T = \frac{8ml^4}{(4l^2+\rho^2)^2}(\dot{x_s}^2 + \dot{y_s}^2) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{16ml^3\dot{u}}{(4l^2+\rho^2)^2}\rho\dot{\rho} \quad (3.10)$$

siendo:

$$\rho^2 = x_s^2 + y_s^2$$
$$\rho\dot{\rho} = x_s\dot{x_s} + y_s\dot{y_s}$$

3.2. Cálculo de la energía potencial

3.2.1. Coordenadas esféricas

La energía potencial de nuestro sistema es debida al campo gravitatorio. Tomando como origen de potenciales el punto O representado en la Figura 2.1, la energía potencial vendría dada por la siguiente expresión:

$$U = mgh$$

siendo h la vertical desde el punto O hasta la masa m; representando dicha altura en función de nuestra coordenada z,obtendríamos la energía potencial del sistema en coordenadas esféricas.

$$U = mgl(\cos\varphi - 1) + mgu \quad (3.11)$$

3.2.2. Coordenadas estereográficas

Al igual que en el caso anterior, para obtener la energía potencial en las nuevas coordenadas basta con representar la altura h en función de éstas.Para este nuevo caso tomamos como origen de coordenadas el punto O representado en la Figura 2.2. Además la coordenada z viene dada ahora por:

$$z = u - \frac{2l\rho^2}{4l^2+\rho^2)}$$

y siendo h=z-l, nos resulta que la energía potencial será:

$$U = mgu - \frac{2mgl\rho^2}{4l^2+\rho^2)} \quad (3.12)$$

3.3. Energía disipativa

Para poder modelar el efecto del rozamiento en los sistemas se incluye un nuevo término, en las ecuaciones de Lagrange, cuya expresión es de la forma:

$$Fr = \frac{1}{2}cv^2$$

donde c es un coeficiente de rozamiento que varía según en el medio donde nos encontremos.

3.3.1. Coordenadas esféricas

Para obtener el término disipativo en estas coordenadas basta con expresar la velocidad v en coordenadas esféricas. Como vimos anteriormente la velocidad en esféricas podemos obtenerla usando las expresiones (3.3) mediante:

$$v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Con todo esto obtendríamos que el término disipativo viene dado por la siguiente expresión:

$$Fr = \frac{1}{2}cl^2(\dot{\theta}^2 \sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}c\dot{u}^2 - cl\dot{u}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{3.13}$$

3.3.2. Coordenadas estereográficas

En estas coordenadas la velocidad venia dada por la expresión (3.6). Teniendo en cuenta esta expresión la energía disipativa en dichas coordenadas vendrá dado por:

$$Fr = \frac{8cl^4}{(4l^2+\rho^2)^2}(x_s^2 + y_s^2) + \frac{1}{2}c\dot{u}^2 - \frac{16cl^3\dot{u}}{(4l^2+\rho^2)^2}\rho\dot{\rho} \tag{3.14}$$