Capítulo 4

Ecuaciones de Movimiento.

4.1. Coordenadas esféricas

4.1.1. Función de Lagrange

Para hallar las ecuaciones de movimiento del sistema vamos a usar la formulación lagrangiana. Para esto calculamos primeramente la función de Lagrange, la cual se define como:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i) \tag{4.1}$$

donde q_i y $\dot{q}_i$ son las coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas respectivamente.

Así la función de Lagrange en coordenadas esféricas vendrá dado por:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 \sin^2\varphi + \dot{\varphi}^2) - ml\dot{u}\dot{\varphi}\sin\varphi - mgl(\cos\varphi - 1) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - mgu \tag{4.2}$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (3.4) y (3.11) obtenidas en el capítulo anterior.

4.1.2. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{4.3}$$

Como nuestro sistema consta de dos grados de libertad, tendremos que aplicar dichas ecuaciones por separado para cada uno de ellos con lo que obtendremos las dos ecuaciones de movimiento que definen a nuestro problema.

Grado de libertad θ

Obtenemos los siguientes términos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}\sin^2\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = cl^2\dot{\theta}\sin^2\varphi$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la expresión (4.3) obtenemos la primera ecuación de movimiento del sistema:

$$ml^2\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2ml^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi + cl^2\dot{\theta}\sin^2\varphi = 0 \tag{4.4}$$

Grado de libertad φ

Obtenemos los siguientes términos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} - ml\dot{u}\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{u}\sin\varphi - ml\dot{u}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml^2\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi + ml\dot{u}\dot{\varphi}\cos\varphi - mgl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} = cl^2\dot{\varphi} - cl\dot{u}\sin\varphi$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la expresión (4.3) obtenemos la segunda ecuación de movimiento del sistema:

$$ml^2\ddot{\varphi} - ml^2\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi - ml(\ddot{u}\sin\varphi + g\sin\varphi) + cl^2\dot{\varphi} - cl\dot{u}\sin\varphi = 0 \tag{4.5}$$

siendo

$$\ddot{u} = -a\omega^2\cos\omega t$$

4.2. Coordenadas estereográficas

4.2.1. Función de Lagrange

Sustituyendo las expresiones (3.10) y (3.12) en la definición del lagrangiano, la cual viene dada por la expresión (4.1) que vimos anteriormente, obtenemos la expresión de la función de Lagrange en coordenadas estereográficas:

$$L = \frac{8ml^4}{(4l^2+\rho^2)^2}(\dot{x}_s^2+\dot{y}_s^2) - \frac{16ml^3\dot{u}}{(4l^2+\rho^2)^2}\rho\dot{\rho} + \frac{2mgl\rho^2}{4l^2+\rho^2} + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - mgu \quad (4.6)$$

Debido a la complicación de dicha expresión, a continuación vamos a adimensionalizar dicha expresión, usando unas nuevas variables para hacerlo. Dichas variables serán x'_s,y'_s y u'_s. Así tenemos:

$$x_s = 2lx'_s$$
$$y_s = 2ly'_s$$
$$u_s = 2lx'_s$$

Igualmente para poder adimensionalizar el tiempo definimos otro parámetro τ, tal que:

$$\tau = \omega t$$

con esta nueva variable convertimos lass derivadas temporales en derivadas con respecto a esta nueva variable de modo que:

$$\frac{d}{dt} = \omega\frac{d}{d\tau}$$

Si introducimos estos cambios en la expresión (4.6) y adoptando una nomenclatura sencilla evitando los subíndices y las tildes, nos resulta la siguiente expresión del lagrangiano:

$$L = 4ml^2\omega^2\left[\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1+\rho^2)^2} + \frac{\mu\rho^2}{1+\rho^2} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\mu u\right] \quad (4.7)$$

en esta última expresión cabe notar que se ha introducido un nuevo parámetro μ el cual representa la relación que existe entre el cuadrado de la frecuencia de caída del péndulo debida a la gravedad y el cuadrado de la frecuencia de la excitación armónica aplicada en la base.

$$\mu = \frac{\frac{g}{l}}{\omega^2}$$

A continuación adimensionalizando obtenemos la expresión del lagrangiano y de la energía disipativa también adimensionalizada, que serán las que posteriormente se usarán para obtener las ecuaciones de Lagrange.

$$\boldsymbol{L} = \frac{L}{4ml^2\omega^2}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{F}{4ml^2\omega^2}$$

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1+\rho^2)^2} + \frac{\mu\rho^2}{1+\rho^2} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\mu u \tag{4.8}$$

$$F = \frac{c}{m}\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1+\rho^2)^2}\right) \tag{4.9}$$

4.2.2. Ecuaciones de Lagrange

Antes de aplicar las ecuaciones de Lagrange vamos a pasar de las coordenadas estereográficas a las coordenadas estereográficas polares, las cuales se diferencian de las anteriores en que éstas describen el punto de intersección, en el plano que pasa por el polo superior de la esfera, mediante coordenadas polares y no cartesianas. Según podemos observar en la figura siguiente:

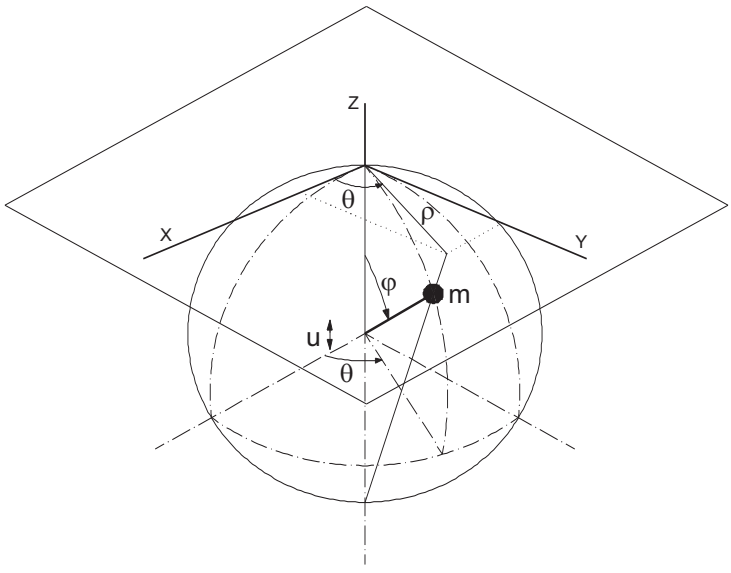

Figura 4.1: Coordenadas estereográficas polares.

Así, si aplicamos el cambio (4.10), a la ecuación del lagrangiano expresada en el apartado anterior (4.8)

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \tag{4.10}$$

Obtenemos la función de Lagrange:

$$L = \frac{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{2\dot u\rho\dot\rho}{(1+\rho^2)^2} + \frac{\mu\rho^2}{2(1+\rho^2)} + \frac{1}{2}\dot u^2 - \frac{1}{2}\mu u \tag{4.11}$$

Aplicando el mismo cambio a la ecuación de la energía disipativa obtenemos:

$$F = \frac{c}{m}\left(\frac{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2}{2(1+\rho^2)^2} - \frac{2\dot u\rho\dot\rho}{(1+\rho^2)^2}\right) \tag{4.12}$$

Aplicando a estas últimas expresiones las ecuaciones de Lagrange definidas por la expresión (4.3), obtendremos las ecuaciones de movimiento asociadas a cada uno de nuestros grados de libertad.

Grado de libertad ρ

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\rho} = \frac{\dot\rho - 2\dot u\rho}{(1+\rho^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\rho}\right) = \frac{\ddot\rho - 2\dot u\dot\rho - 2\ddot u\rho}{(1+\rho^2)^2} - (\dot\rho - 2\dot u\rho)\frac{4\rho\dot\rho}{(1+\rho^2)^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\rho} = \frac{\rho\dot\rho^2}{(1+\rho^2)^2} - \frac{2\rho^3\dot\theta^2}{(1+\rho^2)^3} - \frac{2\dot\rho\dot u}{(1+\rho^2)^2} + \frac{8\dot u\rho^2\dot\rho}{(1+\rho^2)^3} + \frac{\mu\rho}{1+\rho^2} - \frac{\mu\rho^3}{(1+\rho^2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\dot\rho} = \frac{c}{m}\left(\frac{\dot\rho}{(1+\rho^2)^2} - \frac{2\dot u\rho}{(1+\rho^2)^2}\right)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.3), se obtiene la primera ecuación de movimiento:

$$\ddot\rho = \frac{4\rho\dot\rho^2}{(1+\rho^2} - \frac{2\rho^3\dot\theta^2}{1+\rho^2} + \rho\dot\theta^2 + (2\ddot u + \mu)\rho - \frac{c}{m}(\dot\rho - 2\dot u\rho) \tag{4.13}$$

Grado de libertad θ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1+\rho^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\rho^2 \ddot{\theta}}{(1+\rho^2)^2} + \dot{\theta}\left(\frac{2\rho\dot{\rho}}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^3\dot{\rho}}{(1+\rho^2)^3}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = \frac{c}{m}\frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1+\rho^2)^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.3), se obtiene la segunda ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} = \frac{4\rho\dot{\rho}\dot{\theta}}{(1+\rho^2} - \frac{2\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho} - \frac{c}{m}\dot{\theta} \tag{4.14}$$

4.3. Consideraciones previas al análisis.

4.3.1. Introducción

Una vez hemos obtenido todas las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema, tanto en coordenadas esféricas como en coordenadas estereográficas polares, hemos de decidir sobre que sistema realizaremos nuestro análisis. Dicho análisis se hará tomando las coordenadas estereográficas polares debido a la facilidad con la cual se puede identificar en ellas el momento angular, para poder interpretar los resultados físicamente, que a priori no podríamos observar en otro tipo de coordenadas.

4.3.2. Modificación de las ecuaciones

Vamos a modificar las ecuaciones de movimiento obtenidas en al apartado anterior de forma que en ellas aparezca el momento angular.

Partiendo de las parciales obtenidas para la coordenada θ podemos identificar el momento angular, el cual vendría definido como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1+\rho^2)^2} = \Theta \tag{4.15}$$

Introduciendo este cambio en la ecuación de movimiento de la coordenada θ 4.13, se obtiene una nueva ecuación en función del momento angular.

$$\dot{\Theta} = -\frac{c}{m}\Theta \tag{4.16}$$

Igualmente si introducimos dicho cambio en la ecuación de movimiento dada por la coordenada ρ (4.14), se obtiene la segunda ecuación de movimiento en función del momento angular:

$$\ddot{\rho} = \frac{4\rho\dot{\rho}^2}{1+\rho^2} - \frac{2\Theta^2(1+\rho^2)^3}{\rho} + \frac{\Theta^2(1+\rho^2)^4}{\rho^3} + (2\ddot{u}+\mu)\rho - \frac{c}{m}(\dot{\rho} - 2\dot{u}\rho) \tag{4.17}$$

Para facilitar la resolución de nuestro sistema de ecuaciones introduciremos un cambio de variable (4.18), para poder convertir nuestra ecuación (4.14) en una ecuación diferencial de primer orden.

$$\dot{\rho} = R \tag{4.18}$$

Así obtenemos el sistema de ecuaciones que finalmente tendremos que resolver será:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= -\frac{c}{m}\Theta \\
\dot{R} &= \frac{4\rho\dot{\rho}^2}{1+\rho^2} - \frac{2\Theta^2(1+\rho^2)^3}{\rho} + \frac{\Theta^2(1+\rho^2)^4}{\rho^3} + (2\ddot{u}+\mu)\rho - \frac{c}{m}(\dot{\rho} - 2\dot{u}\rho) \\
\dot{\rho} &= R
\end{aligned} \tag{4.19}$$

4.3.3. Singularidad del sistema

Nuestro sistema posee una característica un tanto especial la cual nos va a obligar a analizar el movimiento del sistema con el programa **Dynamic Solver** y no con **Auto2000** como en un principio se había pensado. La característica, a la cual nos referimos, es la forma que presenta la solución en $\Theta(t)$, de la expresión (4.16), donde podemos observar que se trata de una exponencial decreciente y que por tanto no oscilará para ninguna vibración que le apliquemos.

La característica anterior, conlleva a que nos planteemos que las posibles soluciones del sistema se encuentren, o bien en la vertical nula, o bien que se establezcan una vez se extinga el movimiento de rotación proporcionado por el momento angular, es decir que el sistema termine oscilando en un plano.

El hecho de analizar las soluciones del sistema con **Dynamic Solver** y no con **Auto2000** se debe a que este último solamente realiza la continuación numérica de soluciones de equilibrio ó periódicas y nosotros estamos interesados en el régimen transitorio de carácter exponencial que presenta el momento angular.