

Capítulo 6

Análisis de resultados.

6.1. Problema Inicial.

Inicialmente para la resolución de nuestro problema nos basamos en los datos obtenidos en la resolución de este mismo sistema pero bajo la hipótesis de rozamiento viscoso nulo, el cual ha sido tratado con anterioridad en el Proyecto Fin de Carrera *Estabilización del péndulo esférico invertido mediante vibración del punto de apoyo*.

En el problema de rozamiento nulo la solución inicial que se obtuvo fue para los siguientes valores:

- Amplitud $A=0.19$
- Radio $\rho = 0,129$
- Momento angular $\Theta = 0,005$.
- La relación entre la frecuencia propia del péndulo debida a la gravedad y la frecuencia de la excitación armónica aplicada en la base, dada por $\mu = 0,01$.
- Velocidad $R=0$.

Empezamos tomando para nuestro problema los valores indicados anteriormente y realizamos luego variaciones en algunos de estos parámetros para ver como se comporta el sistema.

6.2. Problema plano

Por analogía al proyecto sin rozamiento, vamos a analizar también aquí el problema plano pero considerando ahora la existencia del rozamiento. Con esto podremos hacer un mejor análisis y comparación de resultados.

6.2.1. Variaciones de ρ .

Inicialmente representamos en Dynamic Solver la evolución de las variables ρ y R manteniendo constante todos los demás parámetros. Para conseguir dicha evolución se ha obtenido la sección de Poincaré usando el periodo de la excitación que le aplicamos a nuestro sistema. Estas secciones de Poincaré consisten en obtener un punto cada vez que transcurre un ciclo de periodo 2π . Como podremos ver a continuación los resultados obtenidos muestran un punto de silla que aparece para valores mayores a 0.2885 y también aparece un punto estable para $\rho = 0$. Los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

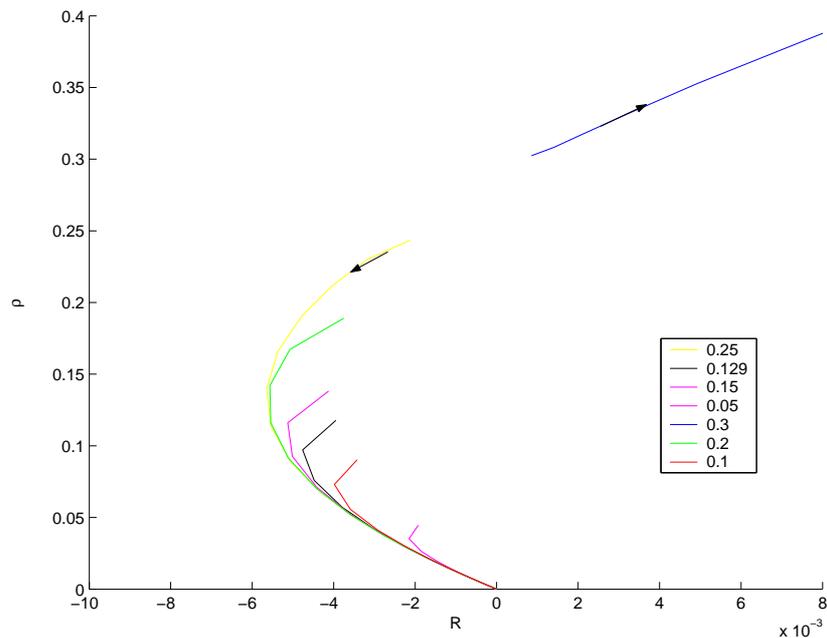


Figura 6.1: Sección de Poincaré $\rho - R$.

En la Figura 6.1 se muestran las distintas evoluciones de ρ y R partiendo de unos valores iniciales distintos en la variable ρ . En dicha figura podemos observar como existe un punto de silla que nos indica el salto de la solución

estable a la solución inestable tal como ocurría en el caso sin fricción. Este cambio se localizó para valores de ρ mayores a 0,2885, como ya indicamos anteriormente.

Para poder ver más claramente la evolución del péndulo, se realizaron diversos experimentos en los no se representan sólo los valores dados por las secciones de Poincaré sino que se hace una evolución completa de las variables. En esta nueva situación los resultados obtenidos se representan, para alguno de los valores analizados, en las Figuras 6.2 a la 6.8.

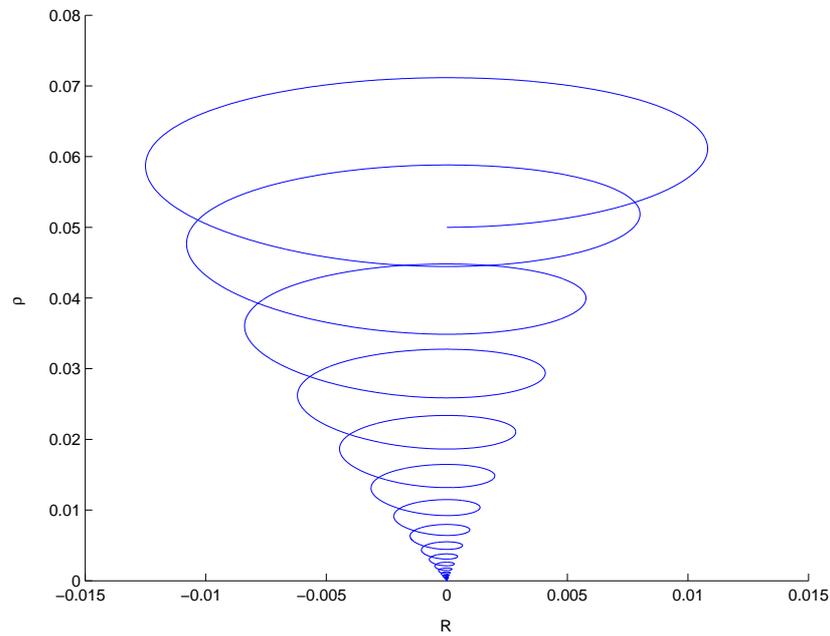
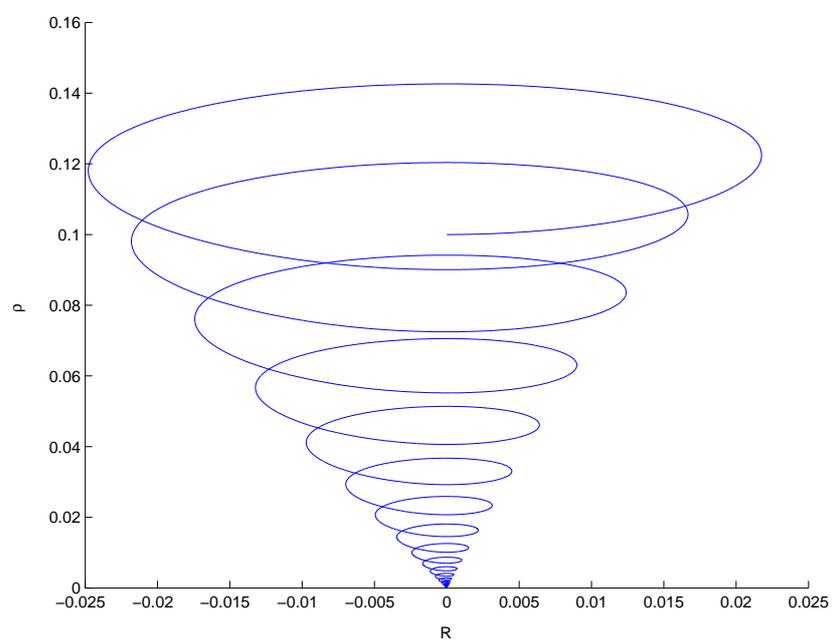
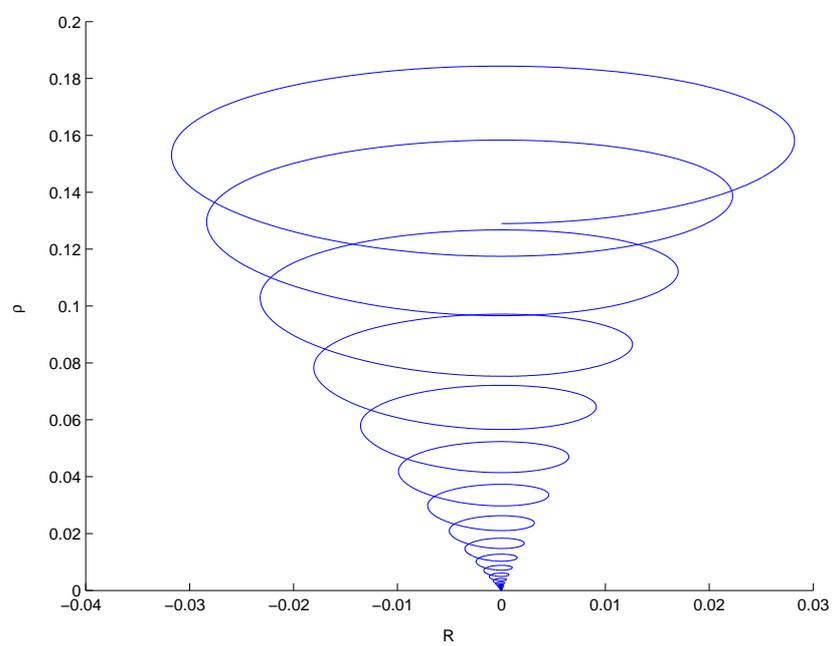
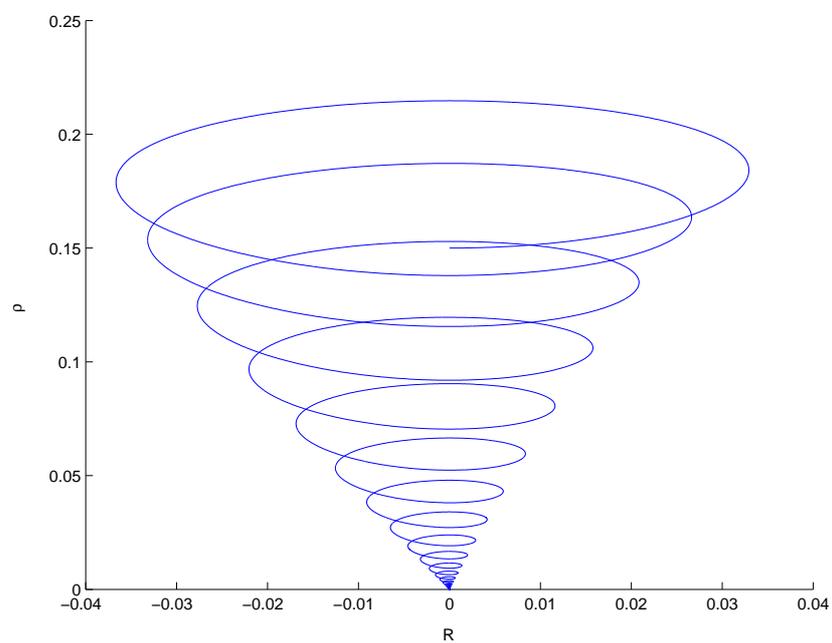
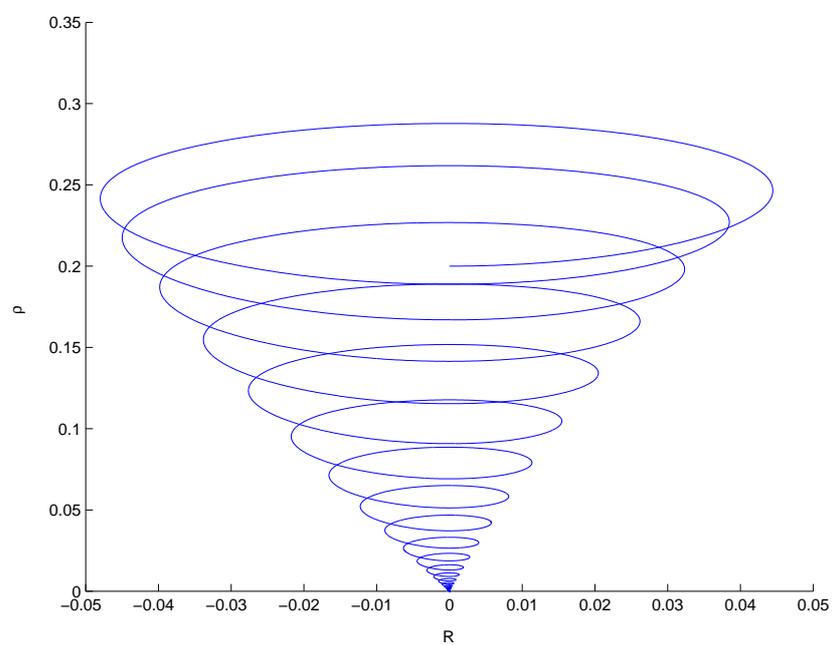
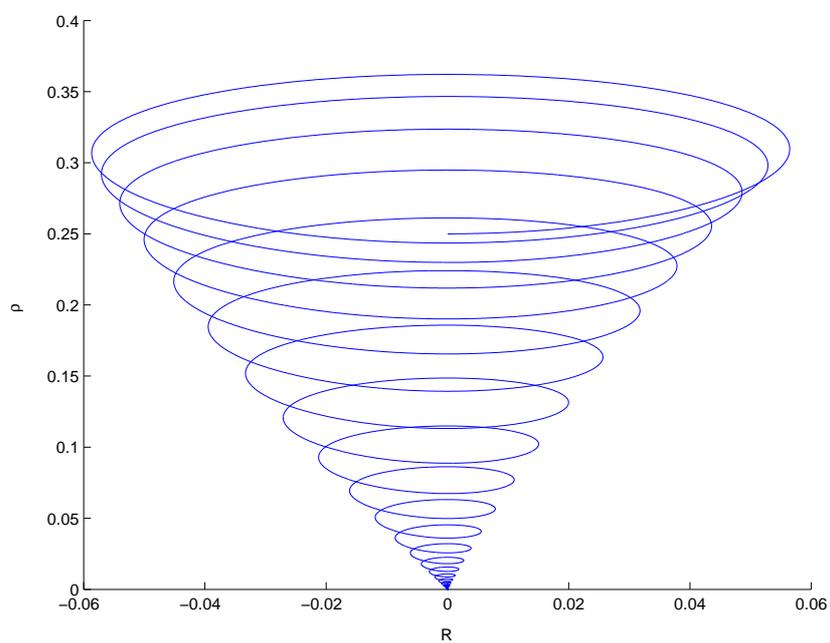
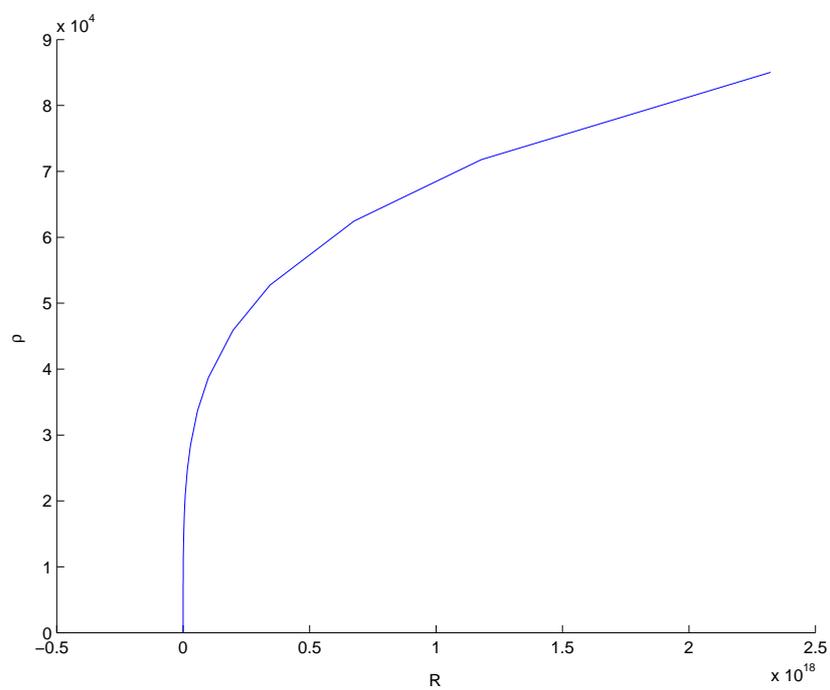


Figura 6.2: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

Figura 6.3: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.Figura 6.4: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

Figura 6.5: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.Figura 6.6: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.

Figura 6.7: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.Figura 6.8: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

En las figuras anteriores se puede observar como para valores de ρ menores a 0,2885 el péndulo tiende a buscar la solución de equilibrio, mientras que para valores mayores se dispara a infinito.

Por último para observar la evolución de esta variable realizamos un seguimiento de la misma representándola frente a ella misma en un instante 2π posterior, para poder seguir su tendencia, esto queda reflejado en las Figuras 6.9 a 6.15.

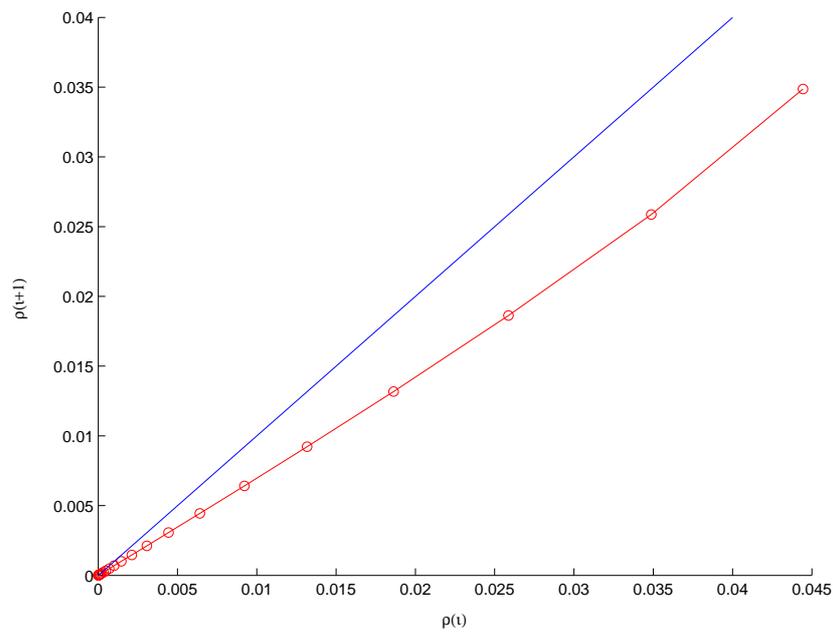
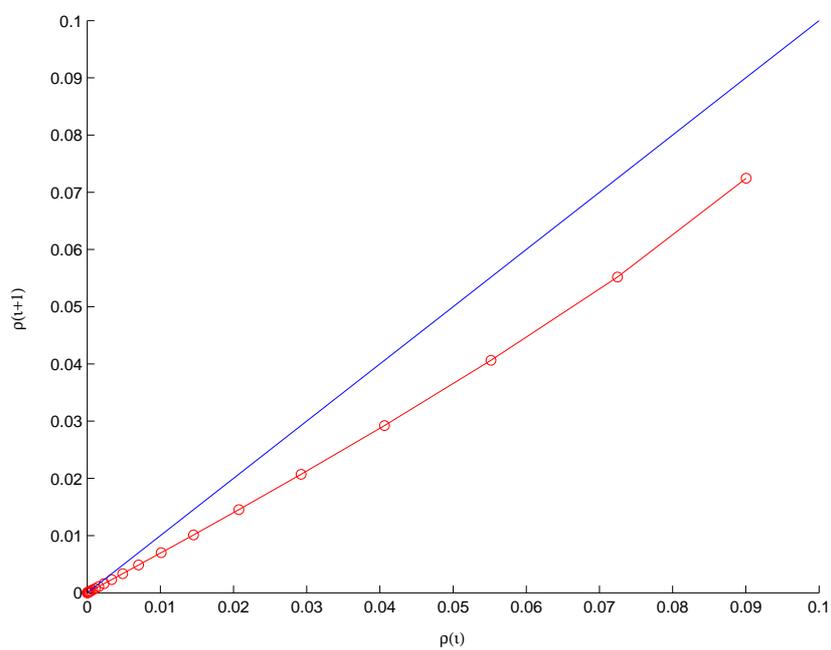
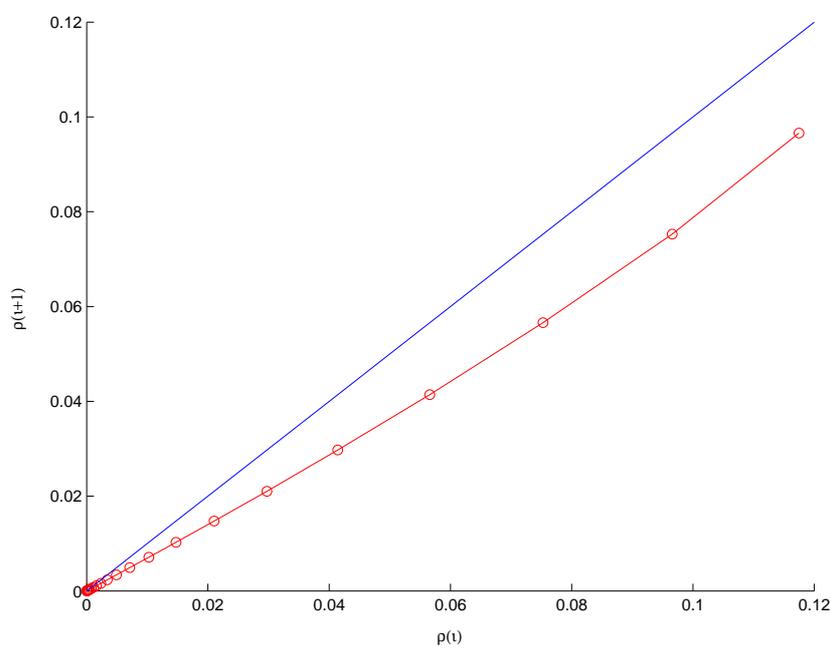
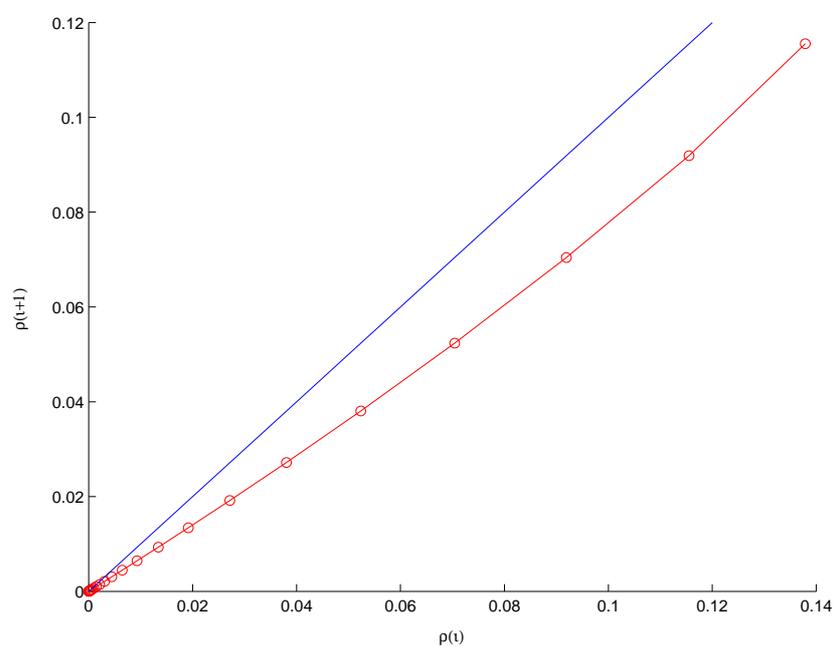
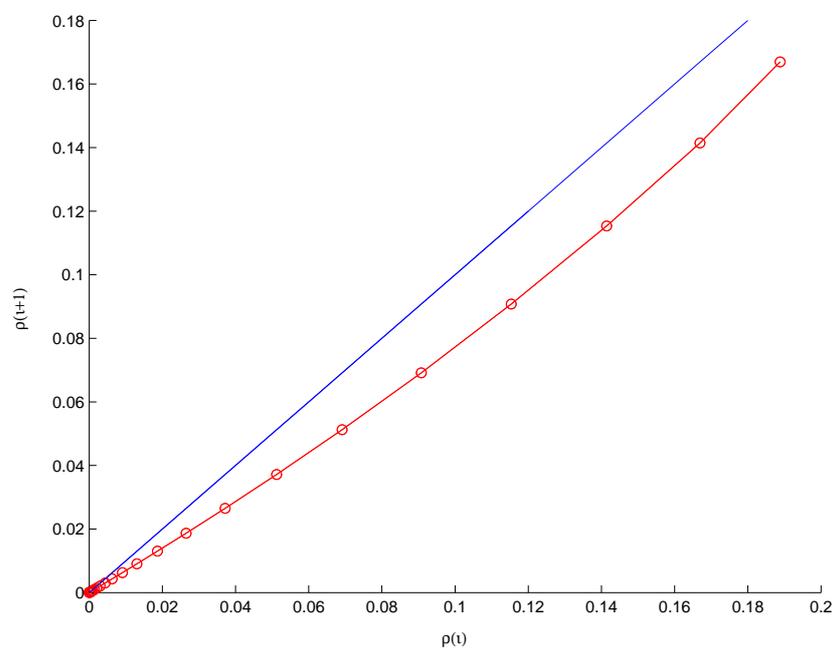


Figura 6.9: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

Figura 6.10: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.Figura 6.11: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

Figura 6.12: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.Figura 6.13: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.

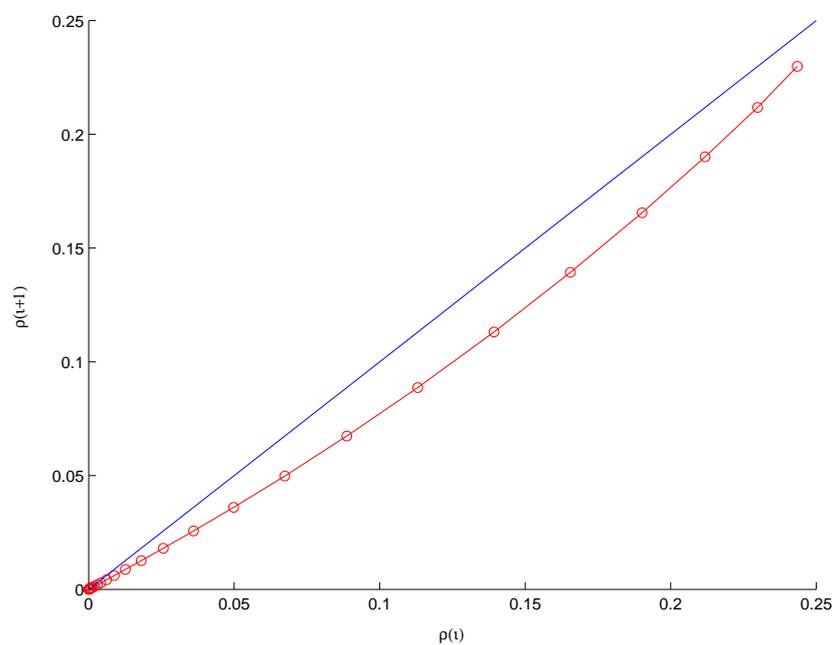


Figura 6.14: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.

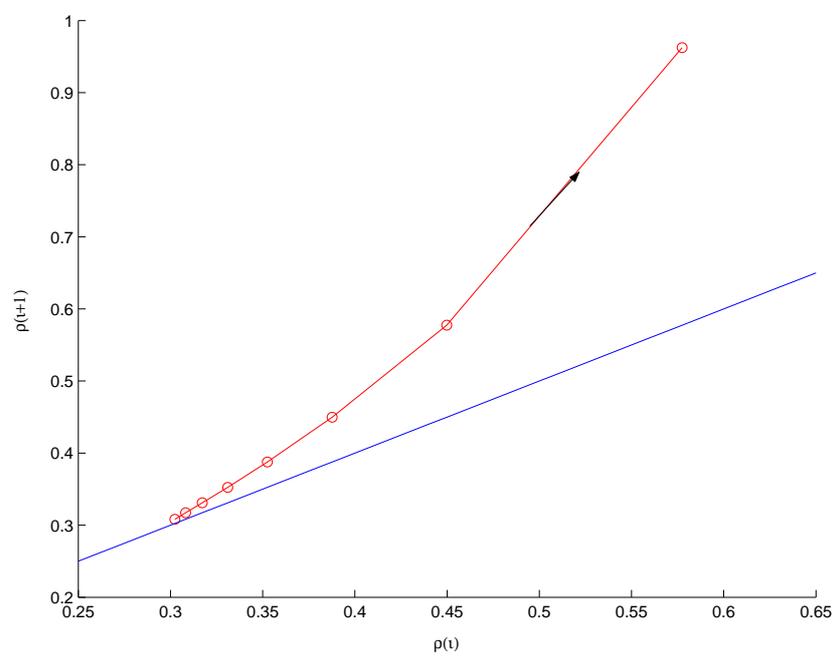


Figura 6.15: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

En estas últimas gráficas se vuelve a corroborar la tendencia a una solución estable cuando nos movemos con valores iniciales de ρ inferiores a 0,2885.

6.2.2. Variaciones de la amplitud.

A continuación variamos el valor de la amplitud y procederemos a realizar el mismo análisis anterior. A continuación sólo mostramos los análisis realizados para dos únicos valores iniciales de ρ que creemos son los más representativos y además con $R = 0$, pero cabe indicar que este mismo análisis se realizó para un número considerable de valores de este parámetro.

Los gráficos mostrados en la sección anterior son para un valor de la amplitud igual a 0.19 y para un ρ inicial igual a 0.1, a continuación mostramos varias gráficas en la cual se mantiene este valor de ρ y se va variando la amplitud. Hemos de hacer notar que en todo este análisis estamos considerando movimiento plano. De las Figuras 6.16 a la 6.20 se muestran las evoluciones completas del péndulo, de la Figura 6.21 a la 6.25 se muestra la variación del parámetro ρ para los nuevos valores de amplitudes.

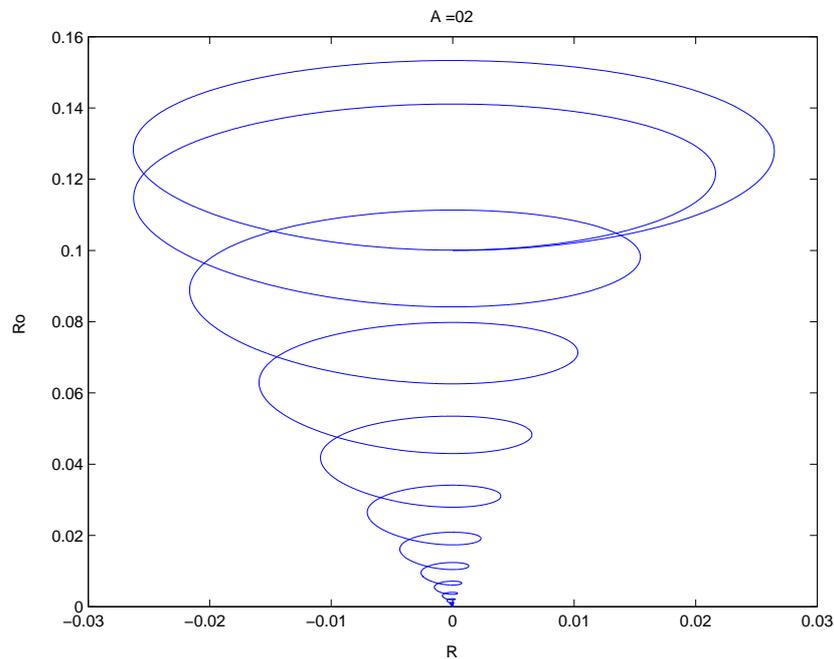
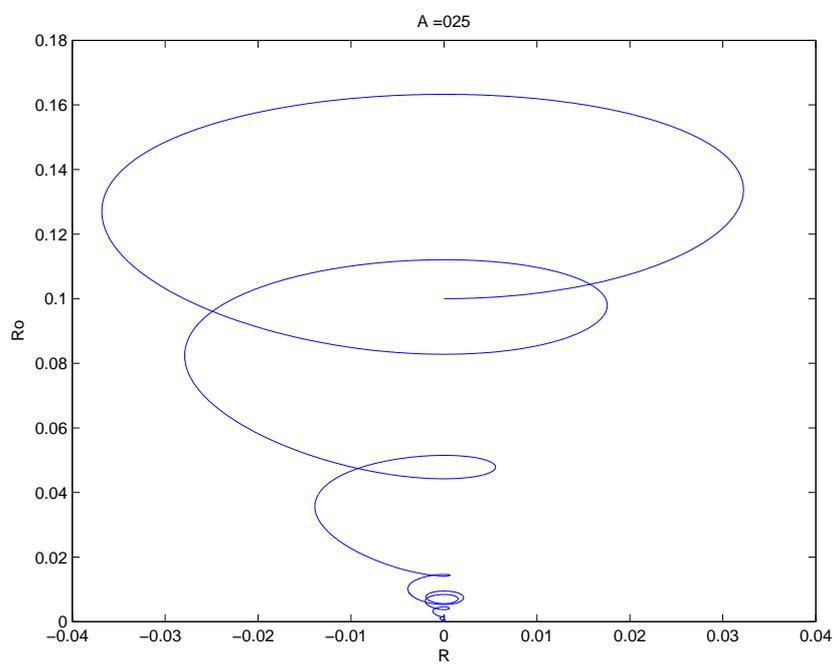
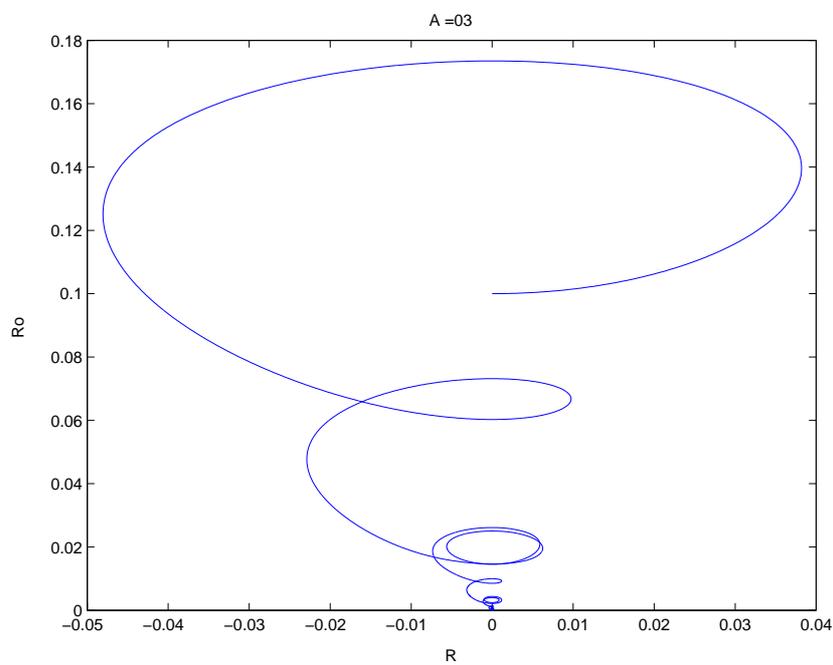
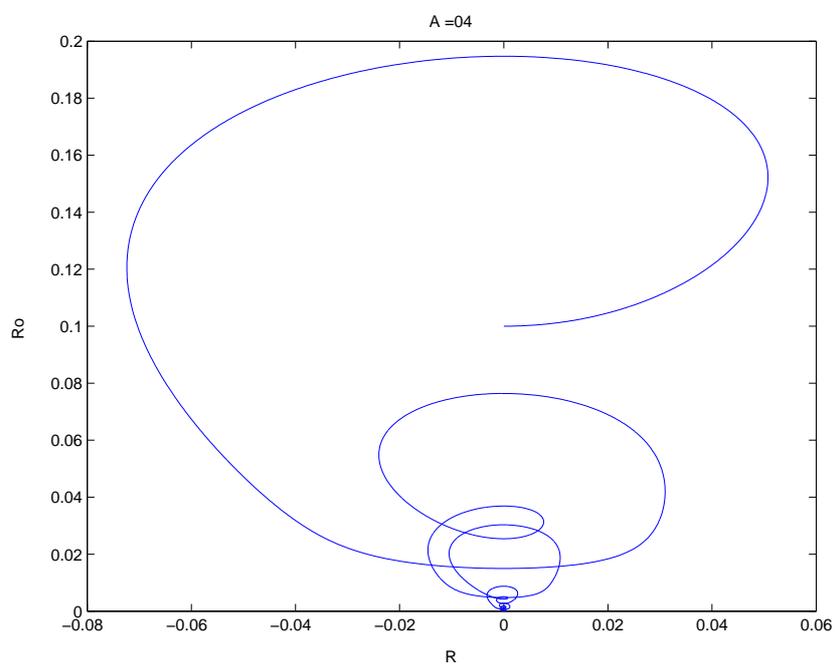
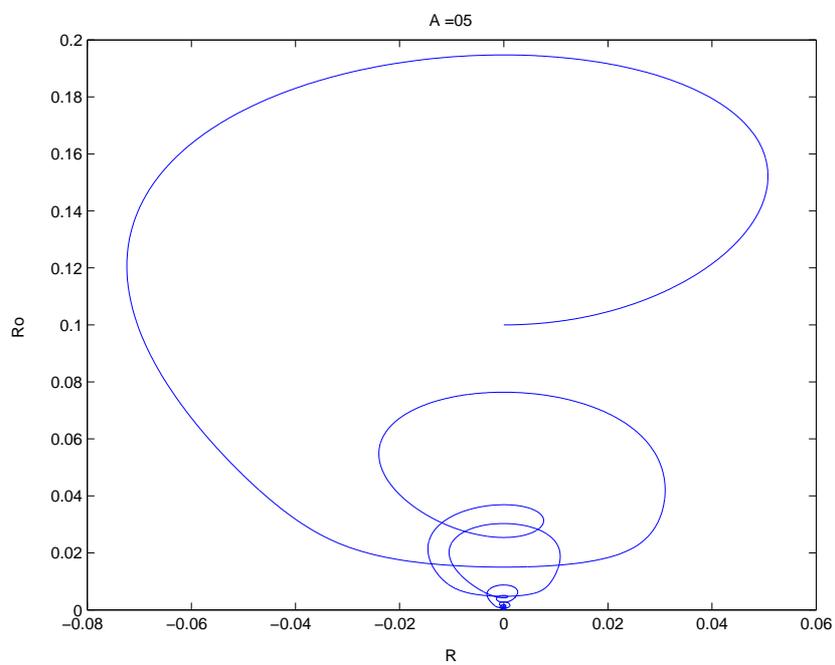
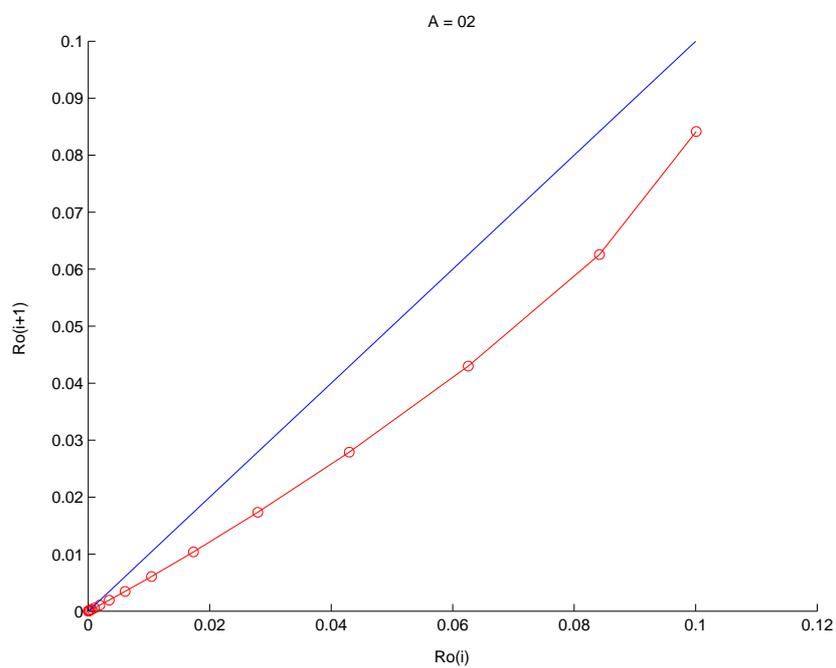
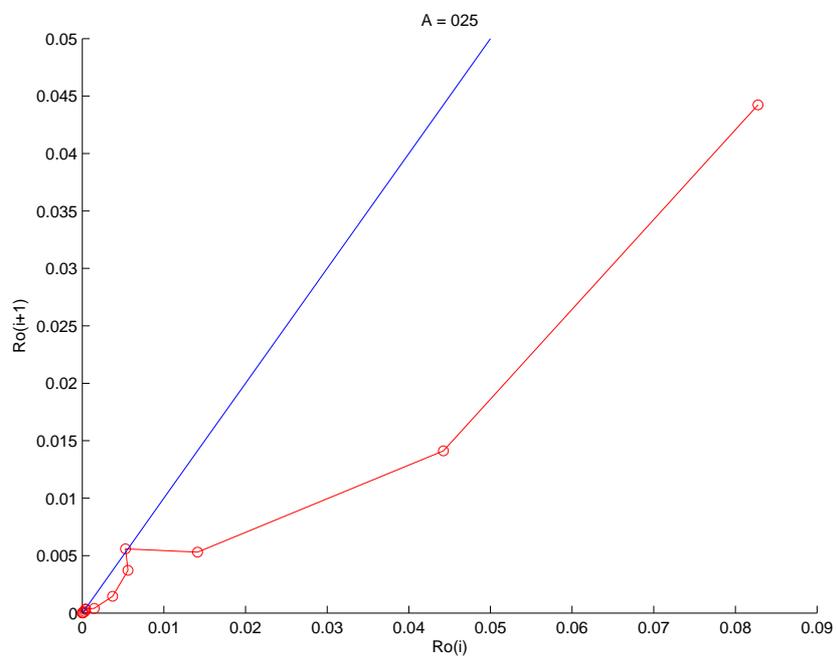


Figura 6.16: *Amplitud* = 0,2.

Figura 6.17: *Amplitud* = 0,25.Figura 6.18: *Amplitud* = 0,3.

Figura 6.19: *Amplitud* = 0,4.Figura 6.20: *Amplitud* = 0,5.

Figura 6.21: *Amplitud* = 0,2.Figura 6.22: *Amplitud* = 0,25.

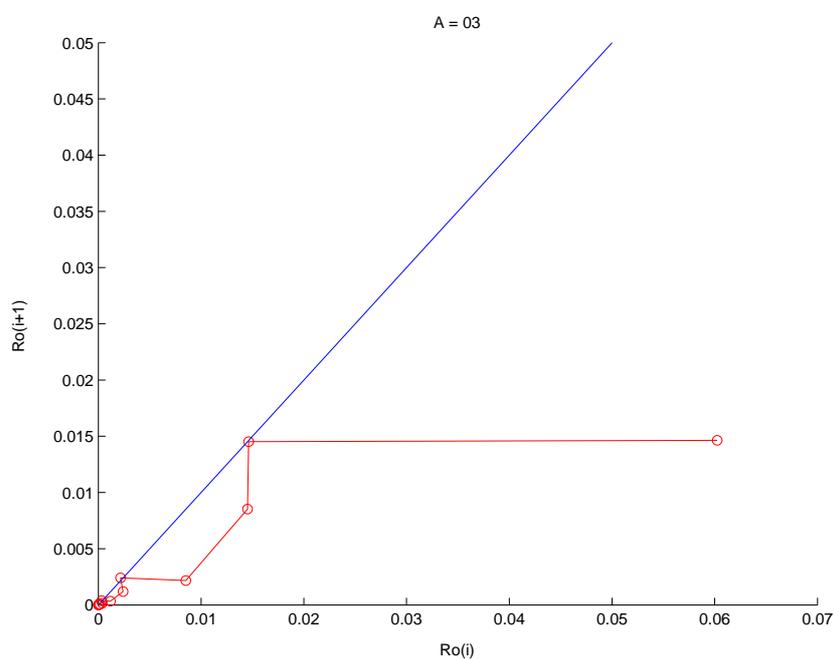


Figura 6.23: *Amplitud* = 0,3.

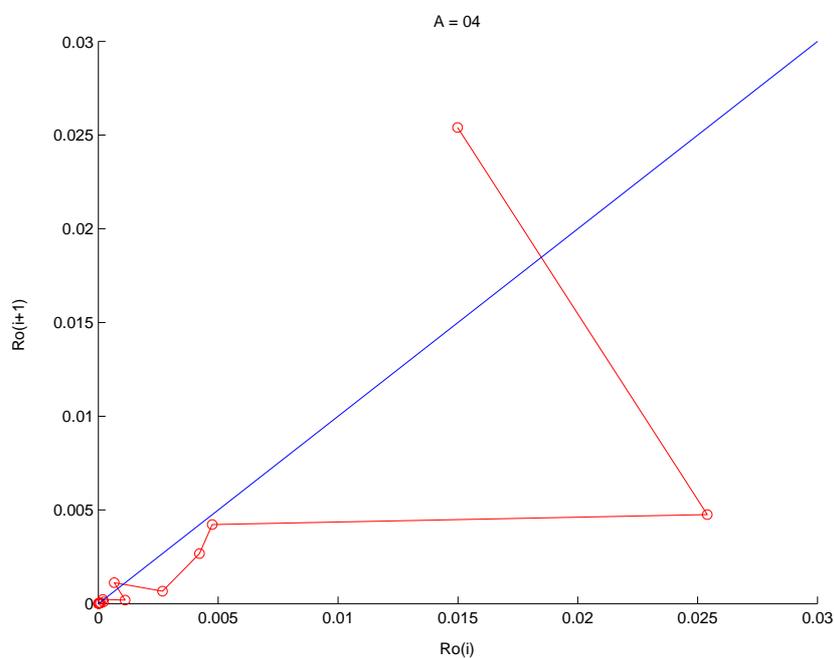


Figura 6.24: *Amplitud* = 0,4.

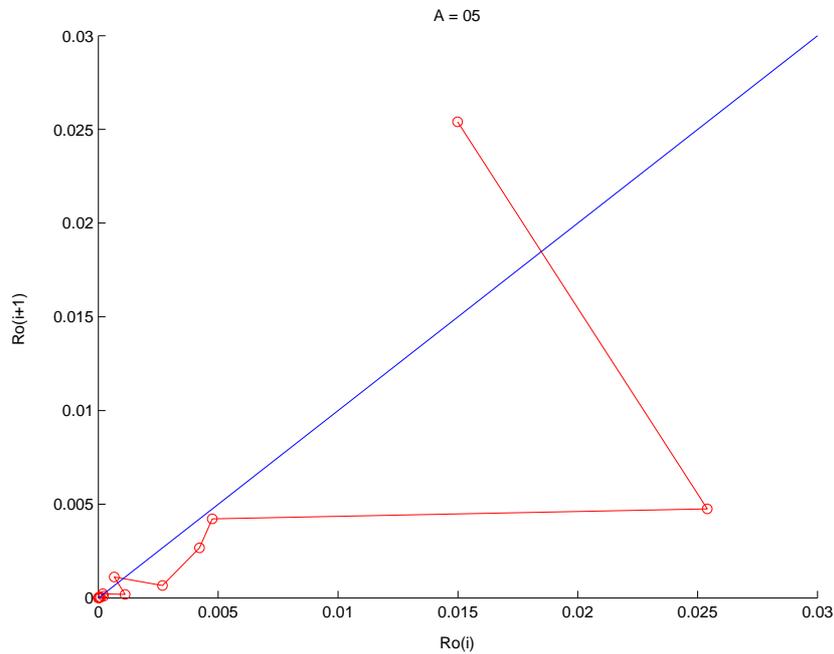


Figura 6.25: *Amplitud* = 0,5.

6.3. Problema espacial.

Una vez hemos visto como se comporta nuestro sistema cuando consideramos nulo el momento angular, pasamos a analizar los resultados cuando consideramos un momento angular no nulo.

Para ver el cambio de comportamiento del sistema vamos a analizar el sistema en varias situaciones posibles. primeramente vamos a partir de un momento angular pequeño para ver las modificaciones que esto implica en el sistema y posteriormente analizaremos el sistema para valores mayores de momento angular.

6.3.1. Momento angular inicial $\Theta = 0,002$

Evolución de ρ .

Inicialmente representamos en Dynamic Solver la evolución de la variables ρ , así los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

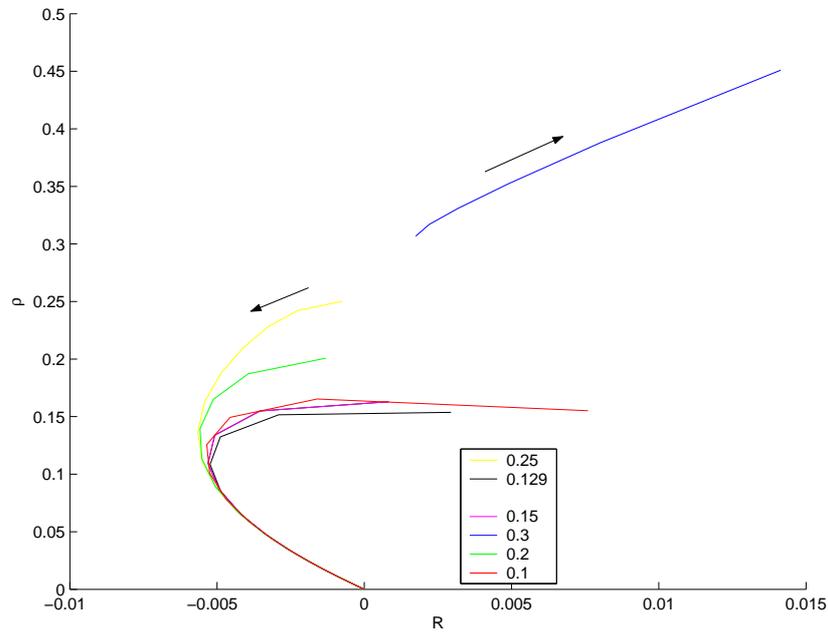


Figura 6.26: Evolución de $\rho - R$.

En la Figura 6.26 podemos observar como existe un punto de silla que nos indica el salto de la solución estable a la solución inestable tal como ocurría en el caso sin fricción. Este cambio se localizó tanto para valores de ρ mayores a 0,281 como para valores inferiores a 0,05999. Estas soluciones a las que nos referimos corresponden a la posición en la cual el péndulo queda en posición vertical y a aquella situación en la que el péndulo queda oscilando en un plano.

Para poder ver más claramente la influencia del parámetro sobre nuestro problema y poder ver de una forma más clara la evolución del péndulo, se realizaron diversos experimentos en los no se representan sólo los valores dados por las secciones de Poincaré sino que se hace una evolución completa de los mismos. En esta nueva situación los resultados obtenidos se representan, para alguno de los valores analizados, en las Figuras 6.27 a la 6.33.

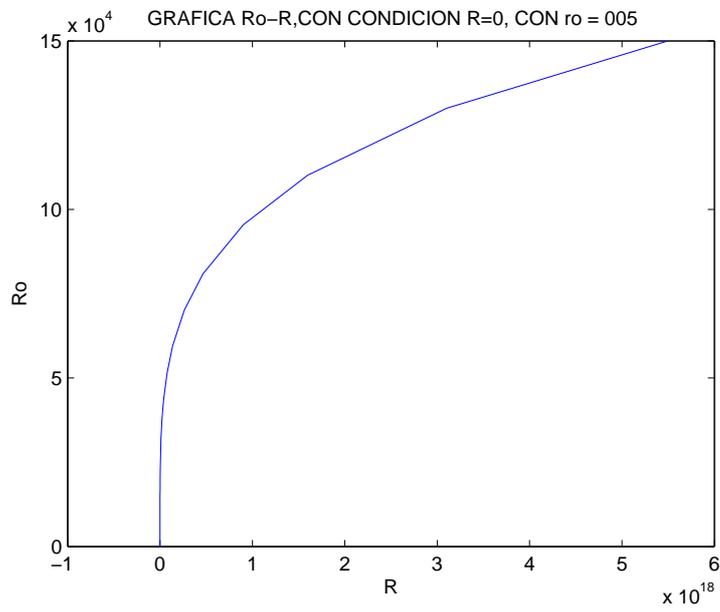


Figura 6.27: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

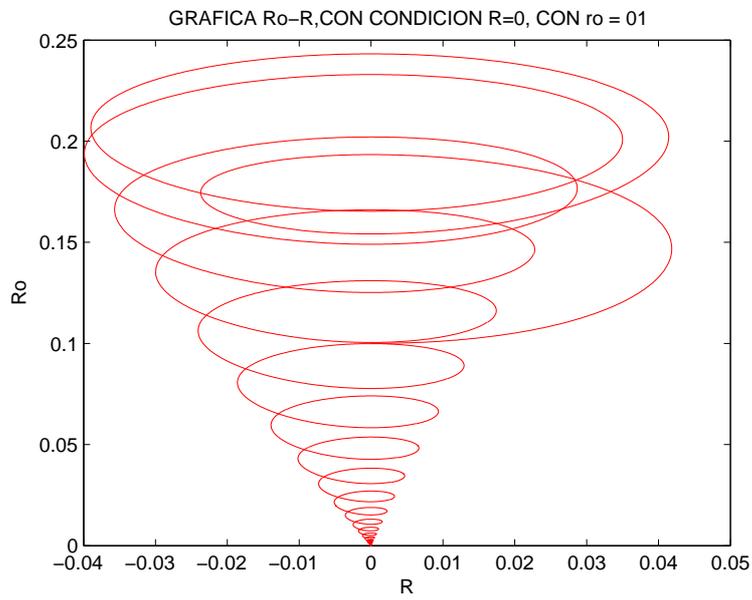


Figura 6.28: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.

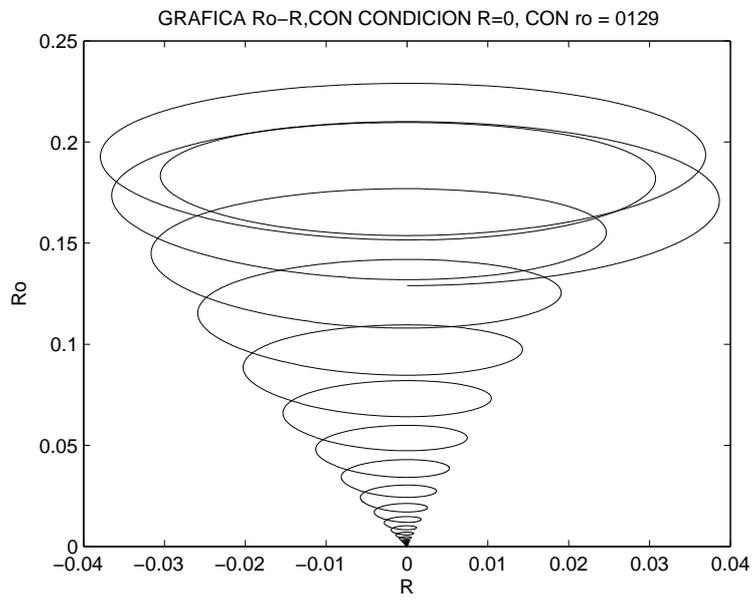


Figura 6.29: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

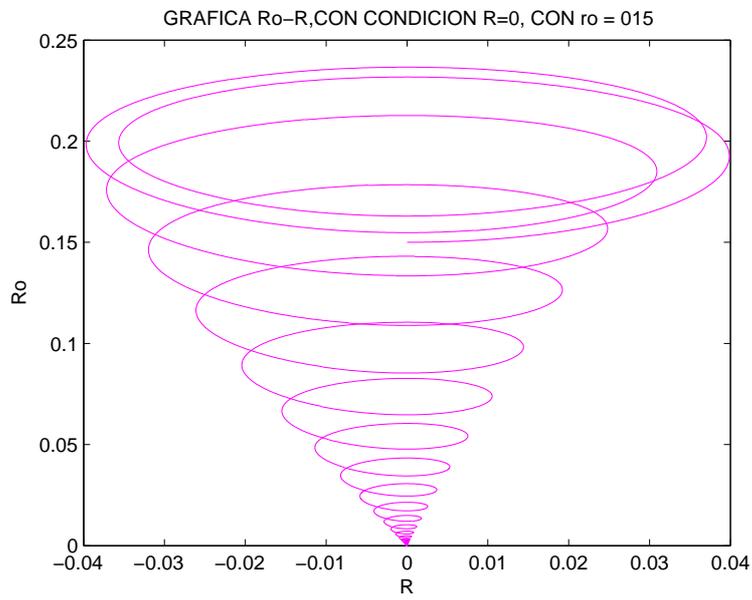
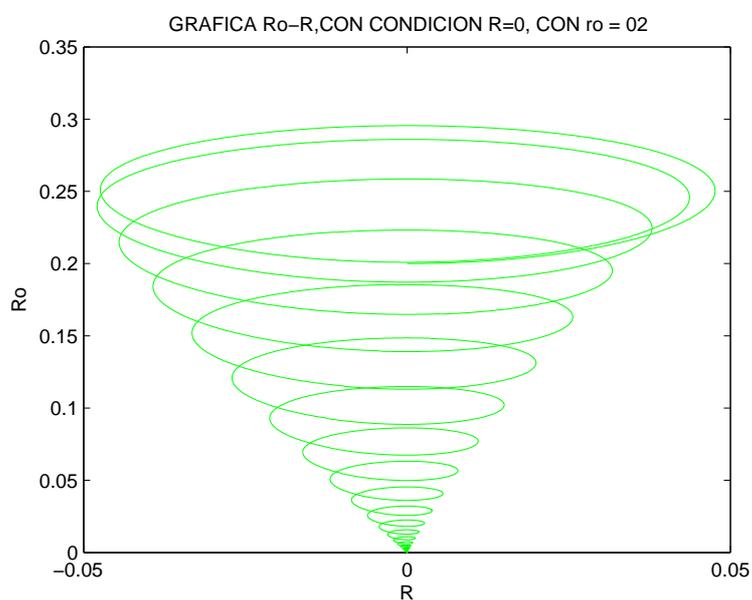
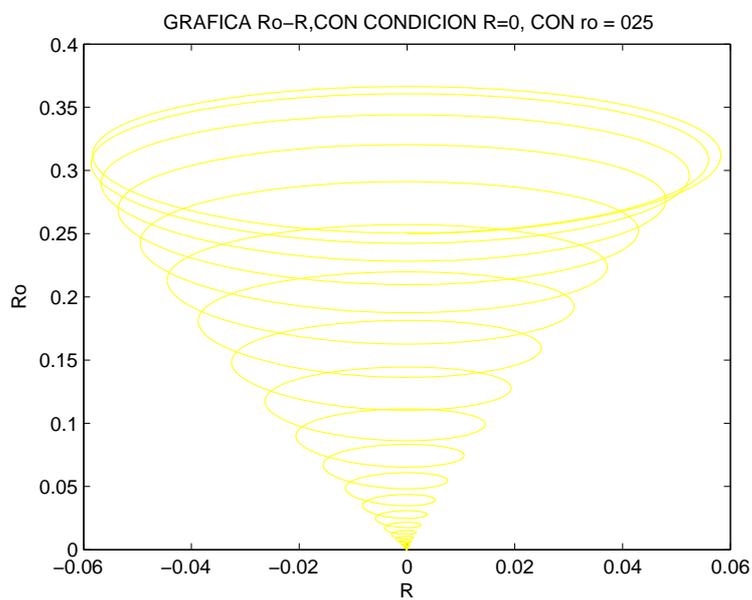
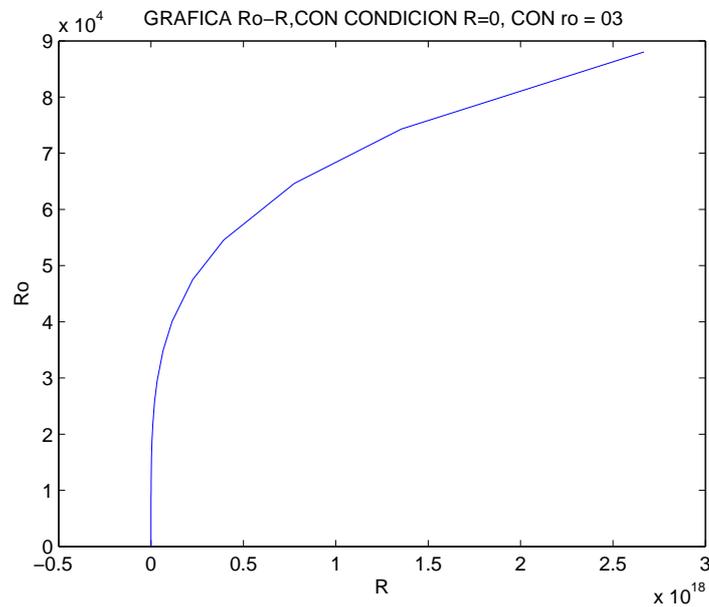


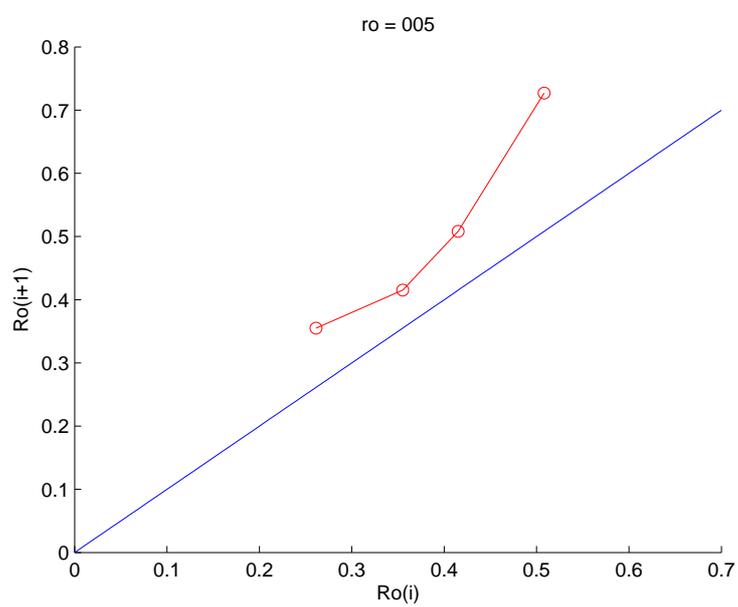
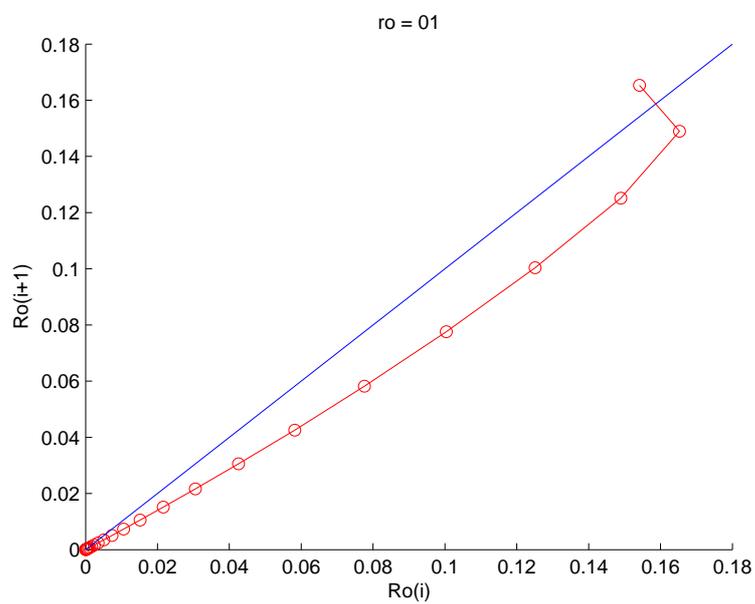
Figura 6.30: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.

Figura 6.31: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.Figura 6.32: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.

Figura 6.33: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

En las figuras anteriores se puede observar como para valores de ρ comprendidos entre 0,0599 y 0,281 el péndulo tiende a buscar la solución de equilibrio, mientras que para valores fuera de este rango se dispara a infinito.

Por último para observar la evolución de este parámetro realizamos un seguimiento del mismo representándolo frente a él mismo en un instante posterior, para poder seguir su tendencia, esto queda reflejado en las Figuras 6.34 a 6.40.

Figura 6.34: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.Figura 6.35: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.

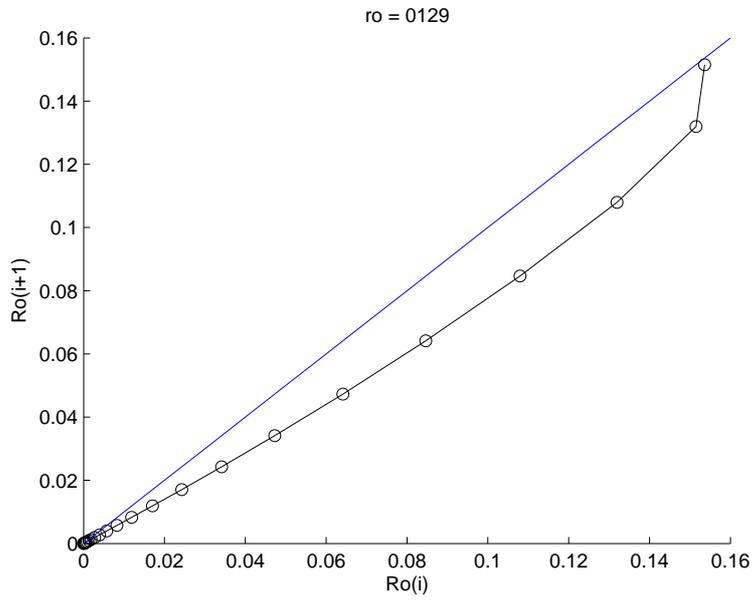


Figura 6.36: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

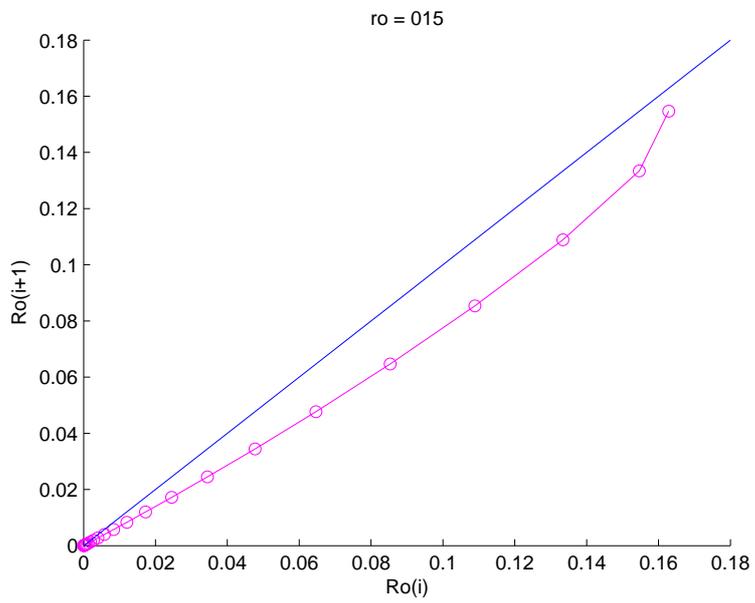
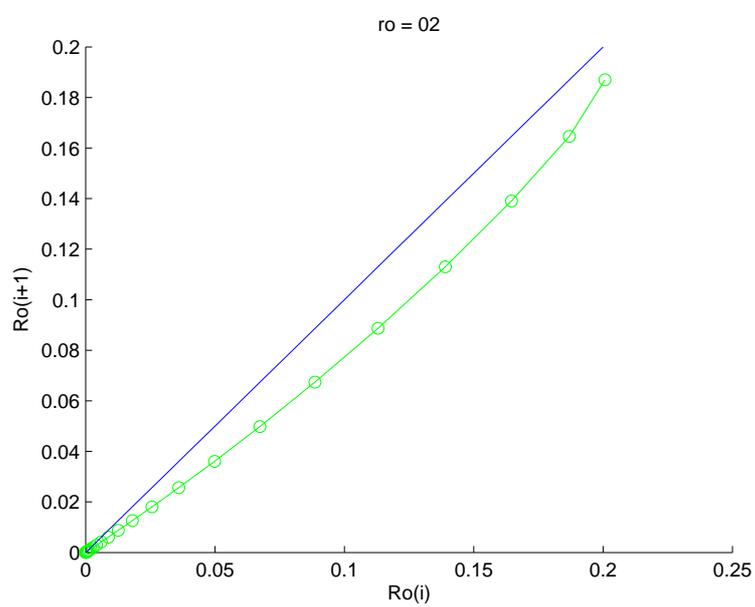
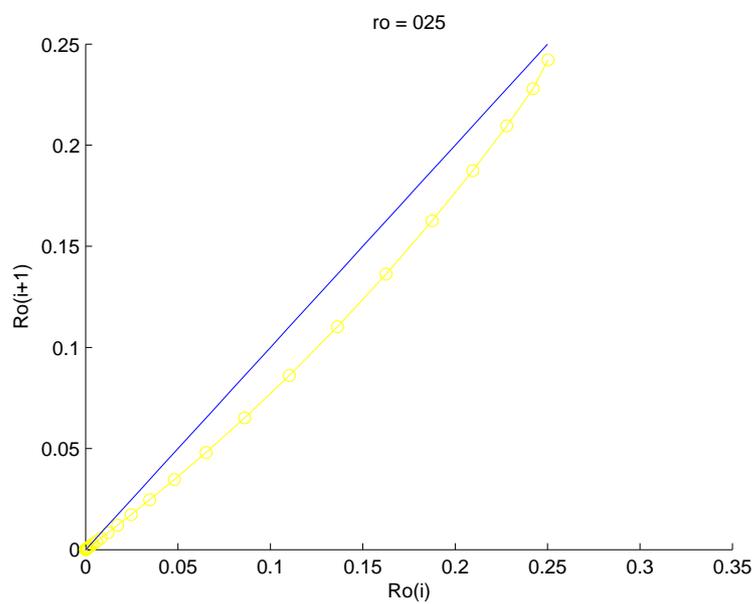


Figura 6.37: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.

Figura 6.38: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.Figura 6.39: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.

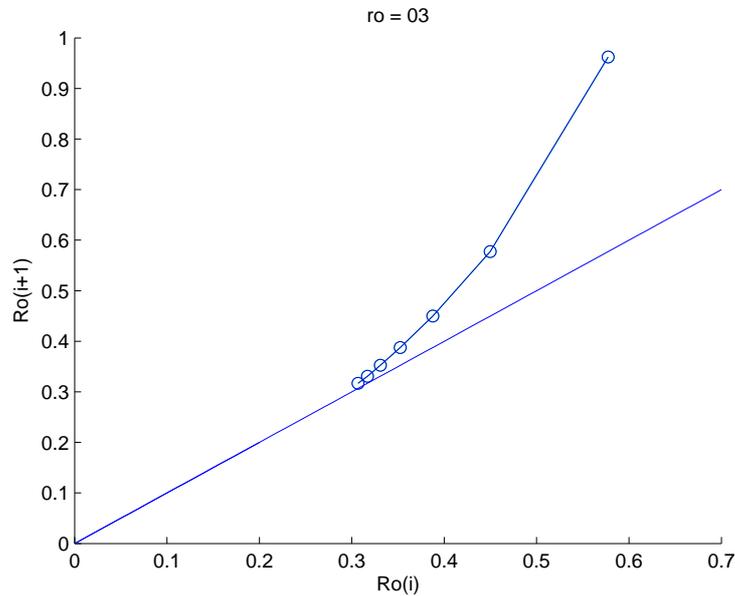


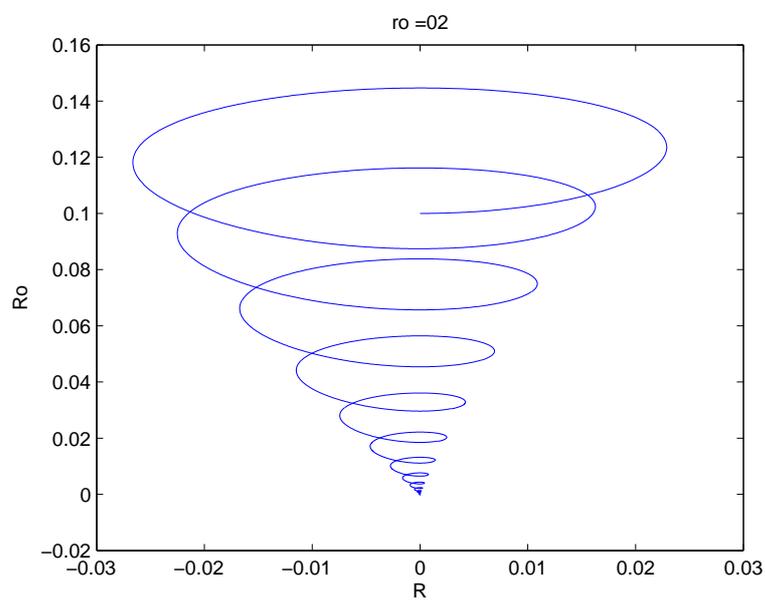
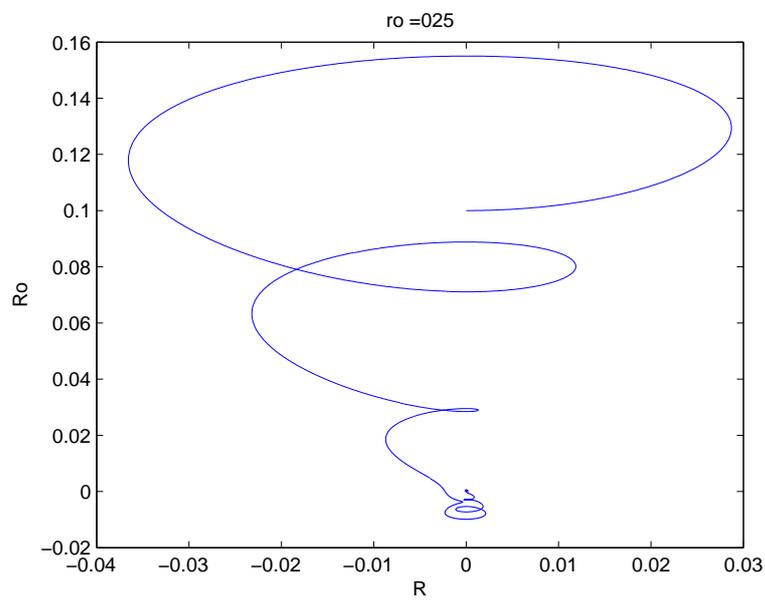
Figura 6.40: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

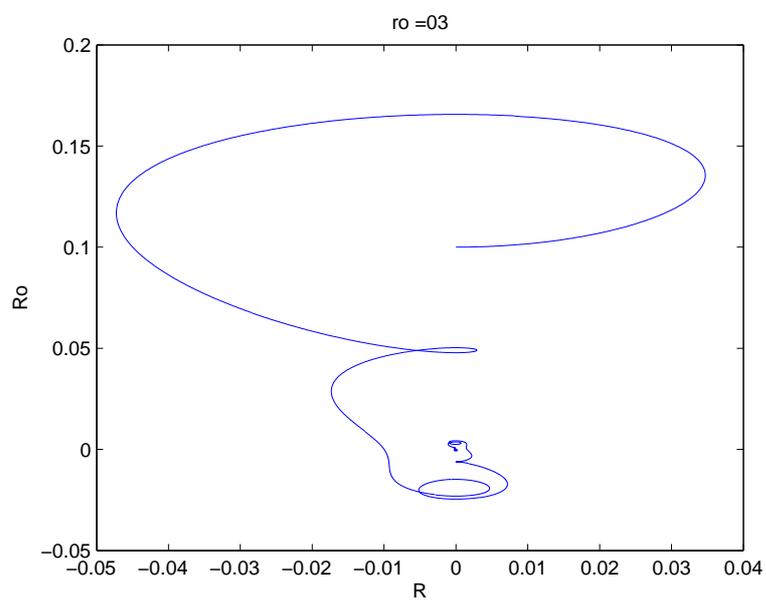
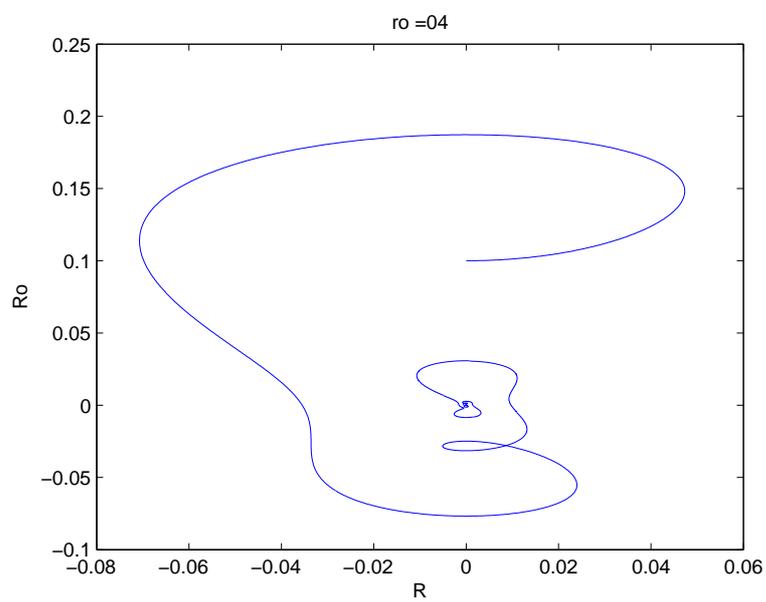
En estas últimas gráficas se vuelve a corroborar la tendencia a una solución estable cuando nos movemos en el intervalo 0,0599 a 0,281.

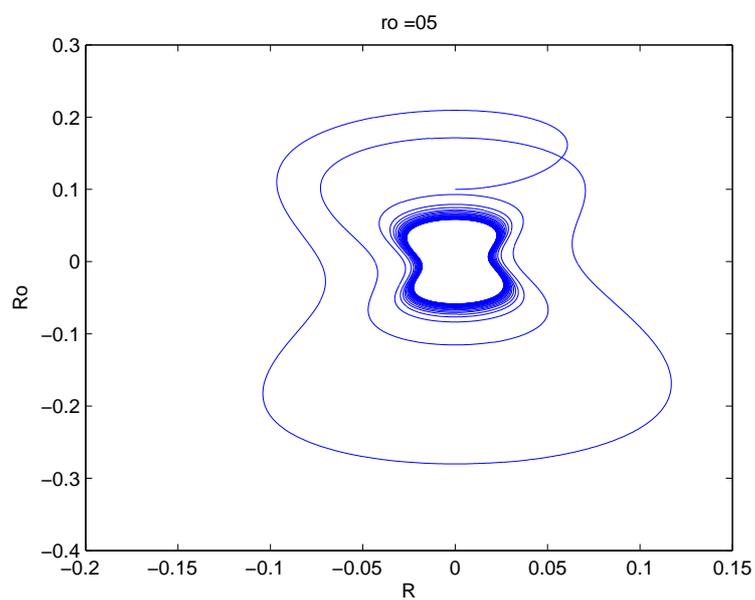
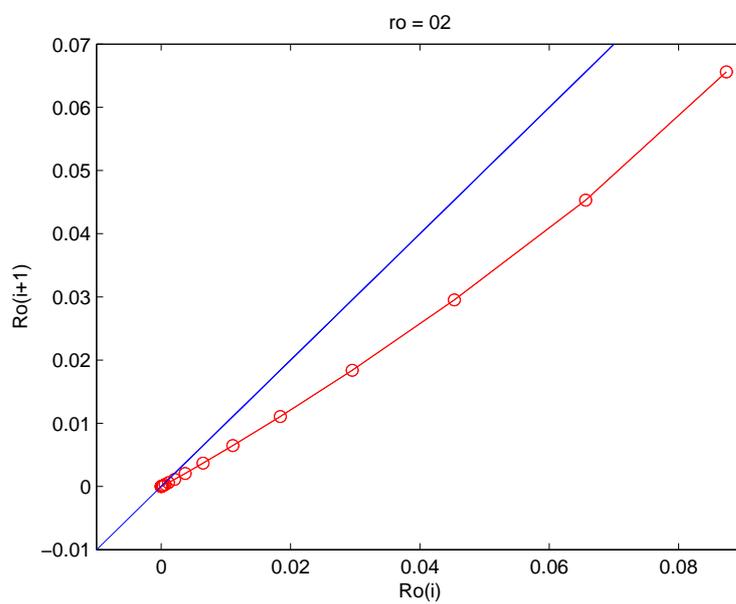
Variaciones de la amplitud.

A continuación variamos el valor de la amplitud y procederemos a realizar el mismo análisis anterior. A continuación sólo mostramos los análisis realizados para dos únicos valores iniciales de ρ que creemos son los más representativos, pero cabe indicar que este mismo análisis se realizó para un número considerable de valores iniciales de este parámetro.

Los gráficos mostrados en la sección anterior son para un valor de la amplitud igual a 0.19 y para un ρ inicial igual a 0.1, a continuación mostramos varias gráficas en la cual se mantiene este valor inicial de ρ y se va variando la amplitud. Además para ver más claros los resultados partiremos de un momento angular inicial muy reducido de 0.002. De las Figuras 6.41 a la 6.45 se muestran las evoluciones completas del péndulo, de la Figura 6.46 a la 6.50 se muestra la variación del parámetro ρ para los nuevos valores de amplitudes.

Figura 6.41: *Amplitud* = 0,2.Figura 6.42: *Amplitud* = 0,25.

Figura 6.43: *Amplitud = 0,3.*Figura 6.44: *Amplitud = 0,4.*

Figura 6.45: *Amplitud* = 0,5.Figura 6.46: *Amplitud* = 0,2.

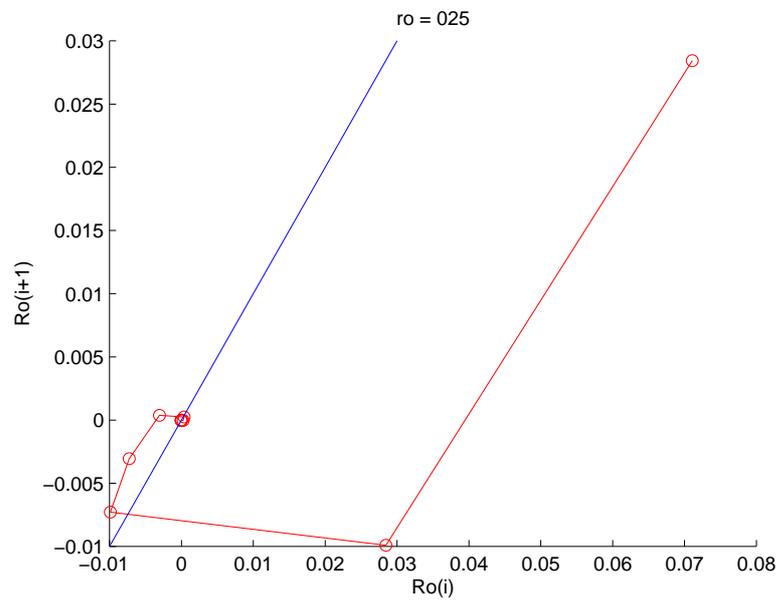


Figura 6.47: *Amplitud = 0,25.*

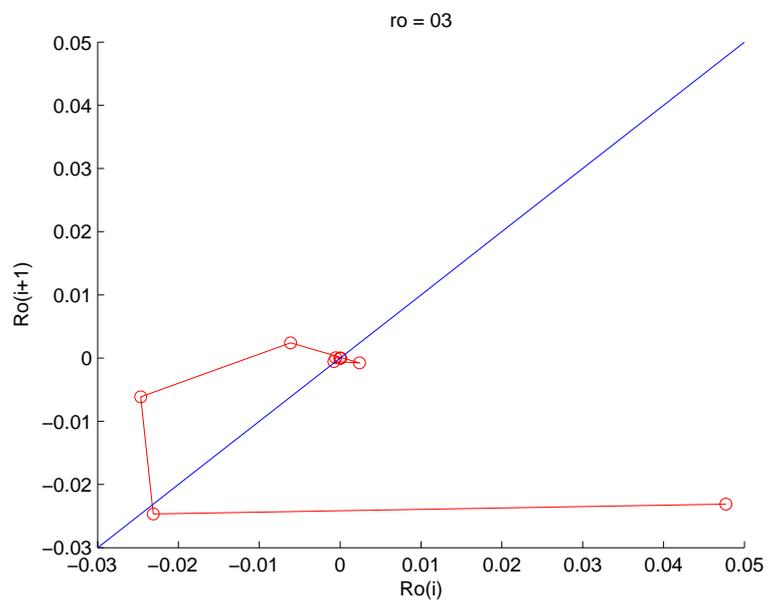


Figura 6.48: *Amplitud = 0,3.*

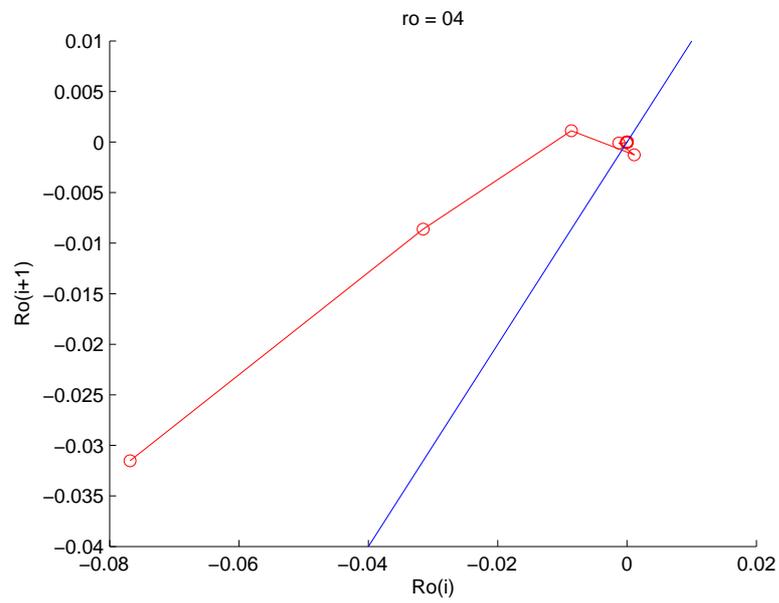


Figura 6.49: *Amplitud* = 0,4.

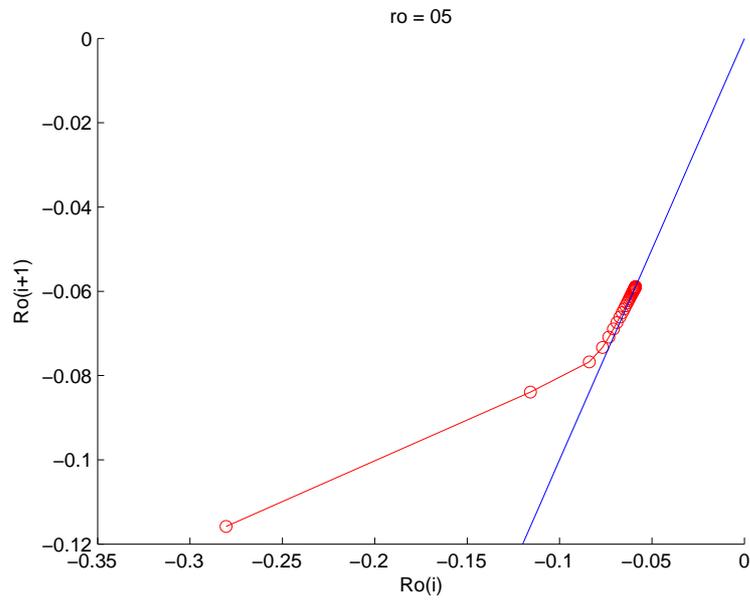


Figura 6.50: *Amplitud* = 0,5.

En estos resultados es donde se pone de manifiesto la existencia de las dos soluciones que planteábamos al principio de este documento, así podemos ob-

servar que para amplitudes menores a 0.05 la solución a la que tiende nuestro sistema es a la solución en el punto inicial que correspondería a la posición vertical del péndulo, y para amplitudes mayores a este valor podemos observar como tendemos a una solución oscilatoria. Para ver más claramente este fenómeno vamos a representar las secciones de Poincaré para una amplitud de 0.05 en la cual observamos claramente esta situación oscilatoria entorno al eje vertical. Esto puede observarse en la Figura 6.51.

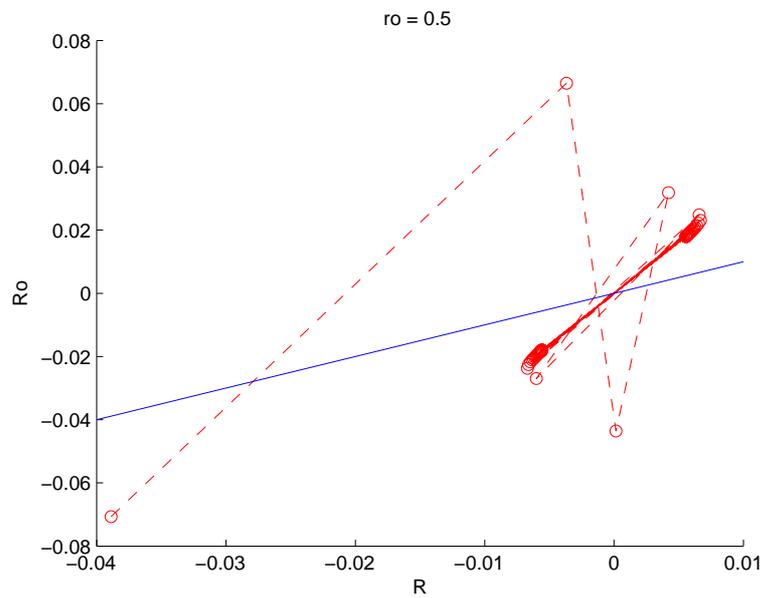


Figura 6.51: *Amplitud* = 0,5.

6.3.2. Momento angular inicial $\Theta = 0,005$.

A modo de resumen mostramos sólo las gráficas correspondientes a dos amplitudes, $A = 0,4$ y $A = 0,5$, y para un único valor de $\rho = 0,1$.

Amplitud 0.4

Tomando como valor de $\rho = 0,1$, de momento angular inicial 0.005 y como amplitud 0.4 , obtenemos el siguiente resultado:

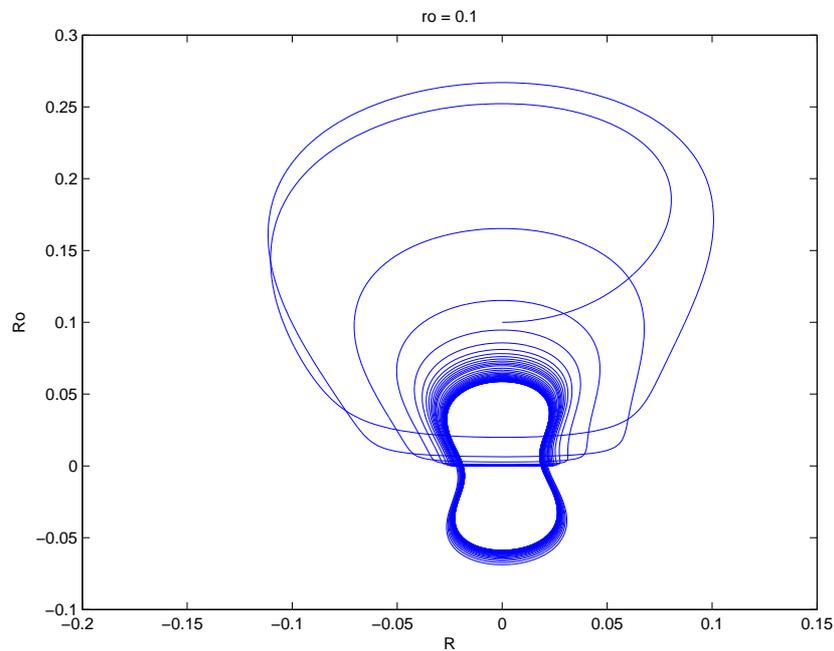


Figura 6.52: *Amplitud = 0,4*.

Amplitud 0.5

Tomando como valor de $\rho = 0,1$, de momento angular inicial 0.005 y como amplitud 0.5, obtenemos el siguiente resultado:

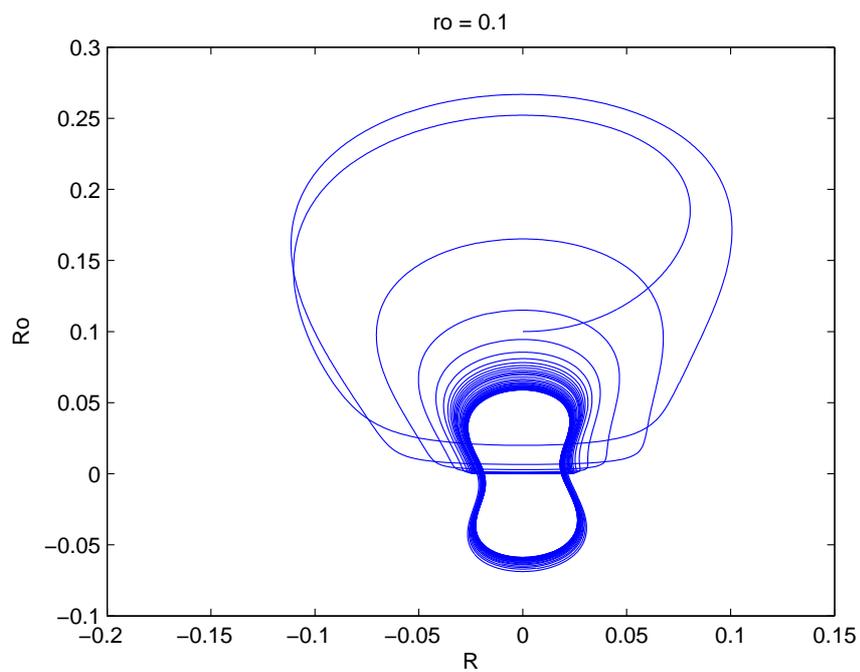
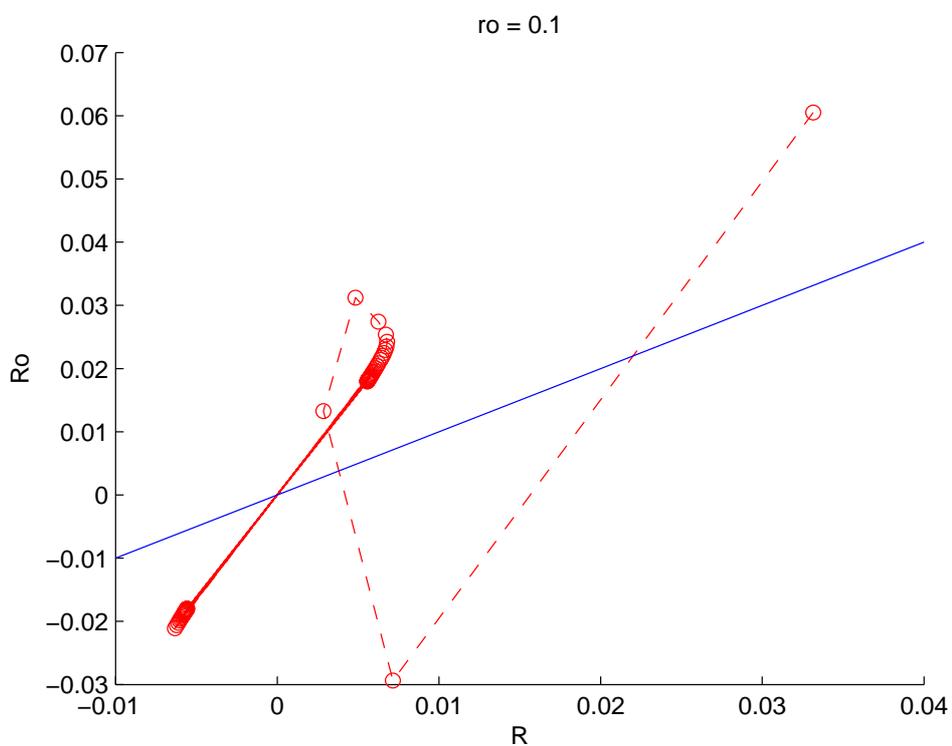


Figura 6.53: *Amplitud = 0,5*.

Para verlo de una forma más clara representamos a continuación la sección de Poincaré para este último caso.

Figura 6.54: *Amplitud = 0,5.*

Aquí podemos observar la misma tendencia hacia la solución vibratoria que vimos para el caso en el que el momento angular inicial era nulo.

6.3.3. Momento angular inicial $\Theta = 0,01$.

Igualmente representamos la evolución para una amplitud de $A = 0,5$ y para un único valor de $\rho = 0,1$ ya que los resultados obtenidos son casi análogos al caso anteriormente mostrado.

Obtenemos el siguiente resultado:

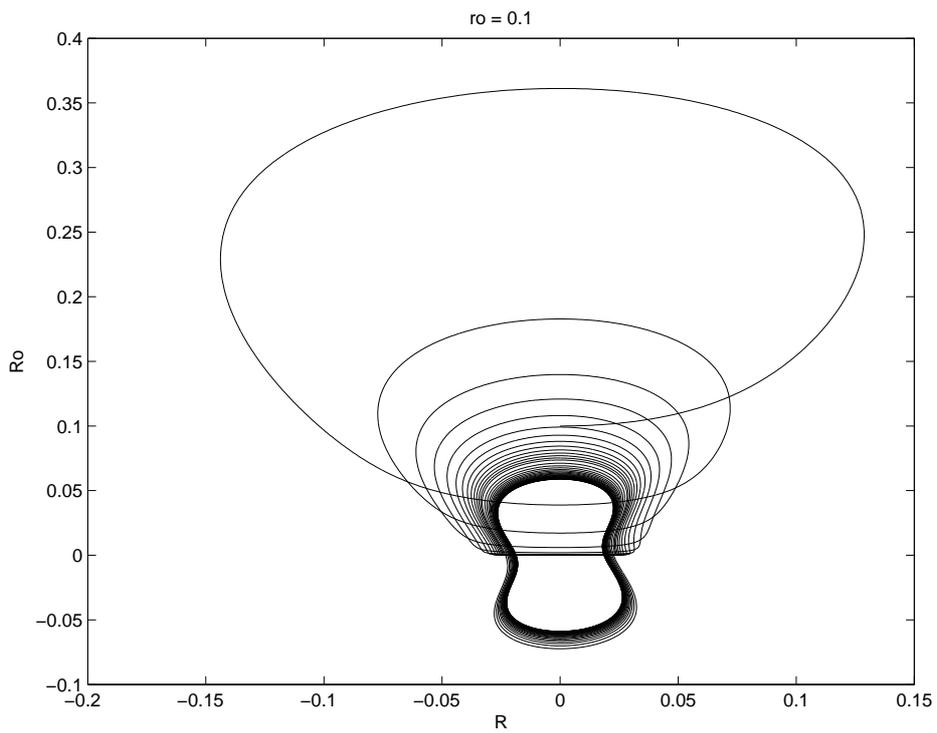


Figura 6.55: *Amplitud = 0,5.*