

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada II

PROYECTO FIN DE CARRERA

**Inestabilidad inducida por
rozamiento en un péndulo esférico
invertido sometido a una vibración
vertical.**

Realizado por D. José Luis Bermejo Calero

Director del proyecto: Dr. D. Emilio Freire Macías

Sevilla, Mayo de 2005

Quiero dedicar este proyecto a mis padres y hermana por su paciencia, apoyo y la fé que han depositado en mí, a mi novia por su comprensión en los momentos difíciles, al resto de mi familia y en especial a mi abuelo, el cual se que se sentiría muy orgulloso de mí, y por último, a todos mis compañeros/as de la escuela por su ayuda y por su compañía haciendo así, más amenos y divertidos mis últimos años de estudiante.

Mis más sinceros agradecimientos a mi director de proyecto D. Emilio Freire Macías por su dedicación y por saber entender las necesidades de los alumnos y a D. Fernando Fernández Sánchez por su ayuda constante en los problemas que me fueron surgiendo. Mostrar también toda mi gratitud a todas aquellas personas que han contribuido, en mayor o menor medida, a que este proyecto se haga realidad y en particular a mi compañero y amigo Emilio García Falantes por su inestimable ayuda y tardes de entretenimiento.

*De todo corazón, **Gracias A Todos***

Índice general

1. Introducción.	1
1.1. Antecedentes.	1
1.2. Descripción del modelo sin fricción	2
1.2.1. Caso plano.	2
1.2.2. Caso espacial.	6
1.3. Descripción del modelo con fricción.	10
1.4. Objetivos del proyecto.	11
2. Coordenadas del sistema.	12
2.1. Vector posición y vector velocidad	12
2.1.1. Coordenadas esféricas	12
2.1.2. Coordenadas estereográficas	14
2.1.3. Coordenadas estereográficas polares	16
3. Energías	18
3.1. Cálculo de la energía cinética	18
3.1.1. Coordenadas esféricas	18
3.1.2. Coordenadas estereográficas	19
3.2. Cálculo de la energía potencial	20
3.2.1. Coordenadas esféricas	20
3.2.2. Coordenadas estereográficas	20
3.3. Energía disipativa	21
3.3.1. Coordenadas esféricas	21
3.3.2. Coordenadas estereográficas	21
4. Ecuaciones de Movimiento.	22
4.1. Coordenadas esféricas	22
4.1.1. Función de Lagrange	22
4.1.2. Ecuaciones de Lagrange	22
4.2. Coordenadas estereográficas	24
4.2.1. Función de Lagrange	24

4.2.2. Ecuaciones de Lagrange	25
4.3. Consideraciones previas al análisis.	27
4.3.1. Introducción	27
4.3.2. Modificación de las ecuaciones	28
4.3.3. Singularidad del sistema	29
5. Dynamics Solver.	30
5.1. Introducción.	30
6. Análisis de resultados.	39
6.1. Problema Inicial.	39
6.2. Problema plano	40
6.2.1. Variaciones de ρ	40
6.2.2. Variaciones de la amplitud.	49
6.3. Problema espacial.	54
6.3.1. Momento angular inicial $\Theta = 0,002$	54
6.3.2. Momento angular inicial $\Theta = 0,005$	70
6.3.3. Momento angular inicial $\Theta = 0,01$	73
7. Conclusiones.	74
Bibliografía	78

Índice de figuras

1.1.	Diagrama de bifurcaciones para $\mu = 0,01$.	3
1.2.	Diagrama de bifurcaciones para $\mu = 0,1$.	4
1.3.	Conjunto de bifurcaciones del sistema.	5
1.4.	Conjunto de bifurcaciones de la continuación en Θ para $A=0.19$ y $\mu = 0,01$.	8
1.5.	Variación del LP con Θ y A .	9
1.6.	Péndulo esférico invertido.	10
2.1.	Coordenadas esféricas.	13
2.2.	Coordenadas estereográficas.	14
2.3.	Sección vertical.	15
2.4.	Coordenadas estereográficas polares.	16
4.1.	Coordenadas estereográficas polares.	25
5.1.	Definición del tipo de problema.	31
5.2.	Elección de la variables.	32
5.3.	Definición de los parámetros.	33
5.4.	Introducción de la ecuaciones.	34
5.5.	Valores Iniciales.	35
5.6.	Cuadro de gráficos.	36
5.7.	Valores iniciales en gráficos.	37
5.8.	Listas y tablas de valores.	38
6.1.	Sección de Poincaré $\rho - R$.	40
6.2.	Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.	41
6.3.	Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.	42
6.4.	Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.	42
6.5.	Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.	43
6.6.	Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.	43
6.7.	Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.	44
6.8.	Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.	44

6.9. Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.	45
6.10. Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.	46
6.11. Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.	46
6.12. Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.	47
6.13. Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.	47
6.14. Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.	48
6.15. Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.	48
6.16. <i>Amplitud</i> = 0,2.	49
6.17. <i>Amplitud</i> = 0,25.	50
6.18. <i>Amplitud</i> = 0,3.	50
6.19. <i>Amplitud</i> = 0,4.	51
6.20. <i>Amplitud</i> = 0,5.	51
6.21. <i>Amplitud</i> = 0,2.	52
6.22. <i>Amplitud</i> = 0,25.	52
6.23. <i>Amplitud</i> = 0,3.	53
6.24. <i>Amplitud</i> = 0,4.	53
6.25. <i>Amplitud</i> = 0,5.	54
6.26. Evolución de $\rho - R$.	55
6.27. Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.	56
6.28. Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.	56
6.29. Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.	57
6.30. Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.	57
6.31. Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.	58
6.32. Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.	58
6.33. Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.	59
6.34. Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.	60
6.35. Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.	60
6.36. Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.	61
6.37. Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.	61
6.38. Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.	62
6.39. Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.	62
6.40. Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.	63
6.41. <i>Amplitud</i> = 0,2.	64
6.42. <i>Amplitud</i> = 0,25.	64
6.43. <i>Amplitud</i> = 0,3.	65
6.44. <i>Amplitud</i> = 0,4.	65
6.45. <i>Amplitud</i> = 0,5.	66
6.46. <i>Amplitud</i> = 0,2.	66
6.47. <i>Amplitud</i> = 0,25.	67
6.48. <i>Amplitud</i> = 0,3.	67
6.49. <i>Amplitud</i> = 0,4.	68

6.50. <i>Amplitud</i> = 0,5.	68
6.51. <i>Amplitud</i> = 0,5.	69
6.52. <i>Amplitud</i> = 0,4.	70
6.53. <i>Amplitud</i> = 0,5.	71
6.54. <i>Amplitud</i> = 0,5.	72
6.55. <i>Amplitud</i> = 0,5.	73
7.1. Conjunto de bifurcaciones de la continuación en Θ para $A=0.19$ y $\mu = 0,01$	75
7.2. Variación del LP con Θ y A	76
7.3. <i>Amplitud</i> = 0,5.	77

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Antecedentes.

El péndulo es uno de los elementos más antiguos sometidos a investigación científica a lo largo de la historia. Una de las propiedades más destacable del péndulo fue descubierta en 1908 por Andrew Stephenson, el cual demostró que es posible estabilizar un péndulo plano en su posición invertida sometiendo su pivote a una vibración vertical a alta frecuencia.

Precisamente es esta propiedad del péndulo la que ha hecho posible el análisis de posteriores situaciones como la del proyecto que nos ocupa.

En el siguiente texto vamos a tratar de analizar el sistema formado por un péndulo esférico invertido sometido a una vibración vertical en su base, todo ello condicionado por el fenómeno de la fricción.

Para desarrollar este proyecto nos hemos basado en un Proyecto Fin de Carrera anterior, denominado *Estabilización del péndulo esférico invertido mediante vibración del punto de apoyo*. En este último proyecto se busca investigar la estabilización de la posición invertida del péndulo esférico sometido a vibración en el punto de apoyo, y más en concreto, ver como deben ser los parámetros de esa vibración para conseguir que sea estable; todo ello en ausencia de rozamiento.

Para una mejor comprensión de los datos que se expondrán en este documento, pasaremos primeramente a explicar o describir de una forma más o menos breve, el modelo sin fricción y posteriormente entraremos en profundidad sobre el caso que nos ocupa.

1.2. Descripción del modelo sin fricción

Para este caso se ha hecho un estudio analítico de las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema mediante formulación Hamiltoniana y usando coordenadas estereográficas polares. La razón de que se eligiese la formulación Hamiltoniana es que Auto2000 usa ecuaciones diferenciales de primer orden, como son las hamiltonianas. Y se usan coordenadas estereográficas polares porque se pretende eliminar el momento angular y usando estas coordenadas aparece de forma explícita en las ecuaciones.

Este proyecto se divide a su vez en dos partes bien diferenciadas, una que analiza el caso plano y otra que analiza el caso espacial. A continuación pasaremos a describir cada uno de los casos de forma separada.

1.2.1. Caso plano.

En este apartado se va a estudiar el caso en el que el momento cinético es nulo, y por tanto el movimiento del péndulo permanece en un plano puesto que se anula la velocidad angular.

Además vamos a determinar para qué valores de los parámetros de la vibración existen soluciones periódicas, estudiando también su estabilidad.

Todo este análisis se realizó con Auto2000, por lo que conviene que definamos algunos conceptos, relacionados con la continuación numérica, antes de exponer los resultados que obtenidos.

- Punto límite o pliegue (LP) Es el punto en el cual se unen una órbita periódica estable y otra inestable, para desaparecer a continuación.
- Punto de bifurcación (BP) Es el punto a partir del cual nace una nueva rama de órbitas cuyo periodo es igual al de las órbitas de la rama de la que parte.
- Punto de bifurcación de periodo (PD) Es el punto de una rama de órbitas periódicas a partir del cual nace una nueva rama de órbitas periódicas cuyo periodo es el doble del de las órbitas de la rama de la que parte.

Las ecuaciones que se usaran para el caso plano son las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (1 + \rho^2)^2 R \\ \dot{R} &= -2\rho(1 + \rho^2) R^2 + (\mu + 2\ddot{u}) \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

siendo $\ddot{u} = A \cos(t)$, ρ es la coordenada estereográfica polar que viene dada por $\rho = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ y $R = \dot{\rho}$.

Como podemos observar los únicos parámetros de estas ecuaciones son μ y A . En el desarrollo de este proyecto se fijan dos valores de μ y para cada uno de ellos se va a ir variando la amplitud A hallando así el diagrama de bifurcaciones, el cual muestra las diversas ramas de órbitas periódicas estables e inestables representadas por la distancia a la posición vertical $L_2 - Norm(\rho)$ en función de A .

Así los diagramas que se obtiene para las dos frecuencias usadas $\mu = 0,01$ y $\mu = 0,1$ son los que se representan en las Figuras 1.1 y 1.2.

Analizando el caso $\mu = 0,01$ obtenemos la Figura 1.1 y las posteriores conclusiones:

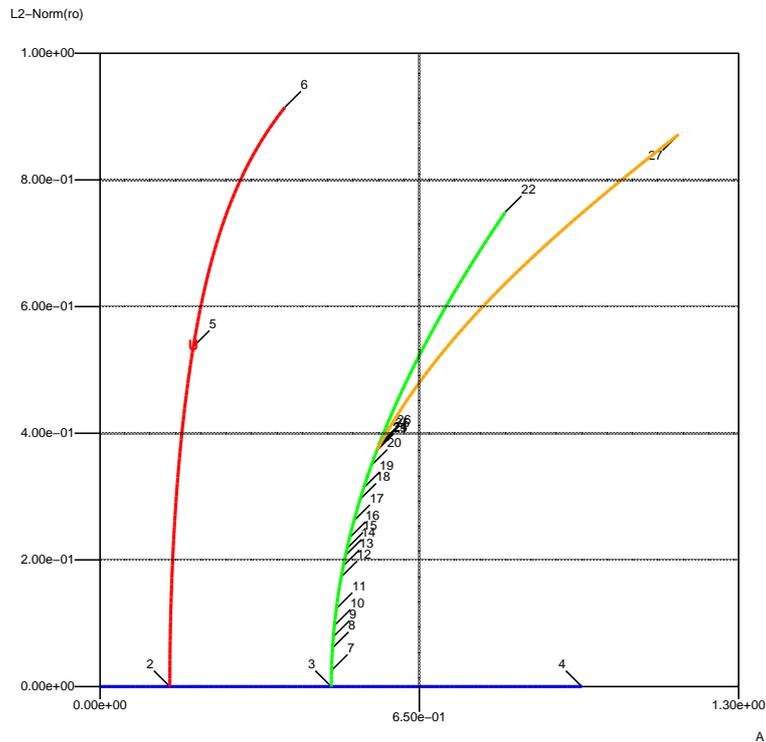


Figura 1.1: Diagrama de bifurcaciones para $\mu = 0,01$.

La solución vibratoria vertical, representada en azul en el diagrama, sólo es estable entre sus puntos de bifurcación BP y PD (2 y 3 en la figura respectivamente). La rama que parte del BP (en rojo) es de soluciones inestables. La que parte del PD (en verde) es de soluciones de periodo doble, estables hasta la BP que presenta; las posteriores son inestables. De esta última BP parte la rama naranja, de órbitas estables hasta un punto PD no detectado por Auto, después son inestables.

El diagrama en el caso $\mu = 0,1$ Figura 1.2 es totalmente análogo aunque con valores distintos.

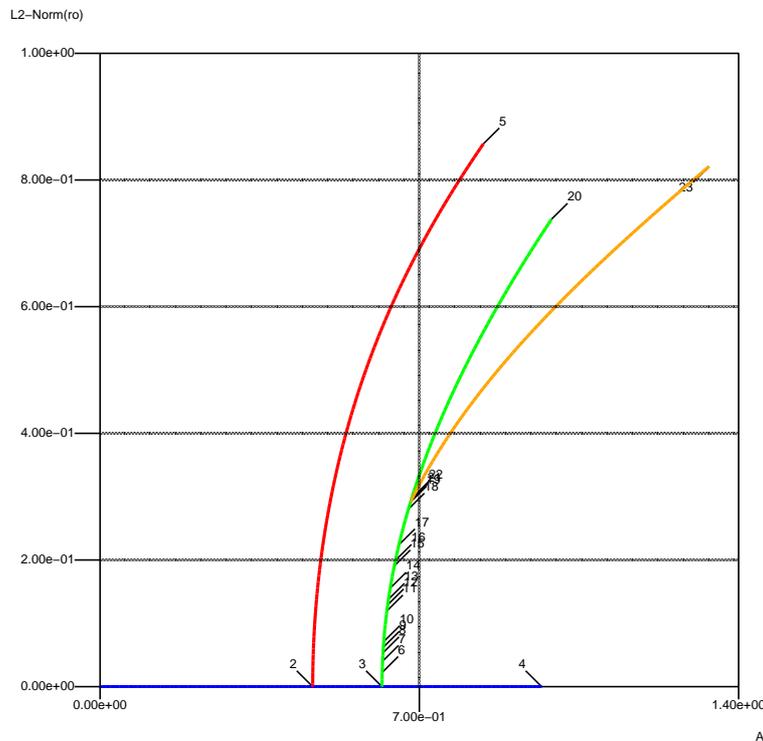


Figura 1.2: Diagrama de bifurcaciones para $\mu = 0,1$.

La rama representada en color azul muestra la primera de las continuaciones, donde el péndulo no se separaba de la posición vertical ($\rho = 0$). La etiqueta 2 representa un punto de bifurcación BP, y la número 3 un punto PD. En esta rama sólo hay estabilidad entre esas dos órbitas.

La rama roja es la segunda obtenida, que parte del punto BP y se separa de la vertical. Las soluciones que la componen son todas inestables.

La tercera continuación está representada en verde y es la rama de órbitas periódicas de periodo doble que se separa de la posición vertical en la PD. Esta rama presenta una bifurcación BP en la etiqueta 19. Las soluciones son estables hasta esa órbita BP, después son inestables.

La rama que parte de esta última BP es la de color naranja en el diagrama. Sus soluciones son estables hasta un valor aproximado del parámetro A de 0.69, donde hay una bifurcación PD no detectada por Auto; las órbitas posteriores son inestables.

Se puede ver que la zona de órbitas estables que requiere menor amplitud de excitación para cada frecuencia es la zona de la solución vibratoria vertical delimitada por los puntos de bifurcación BP y PD. Para ver cómo evoluciona esa región en función de la frecuencia y la amplitud de forzamiento, se ha realizado una continuación en dos parámetros de los puntos de bifurcación. Así se obtiene el conjunto de bifurcaciones del sistema, representado en la Figura 1.3.

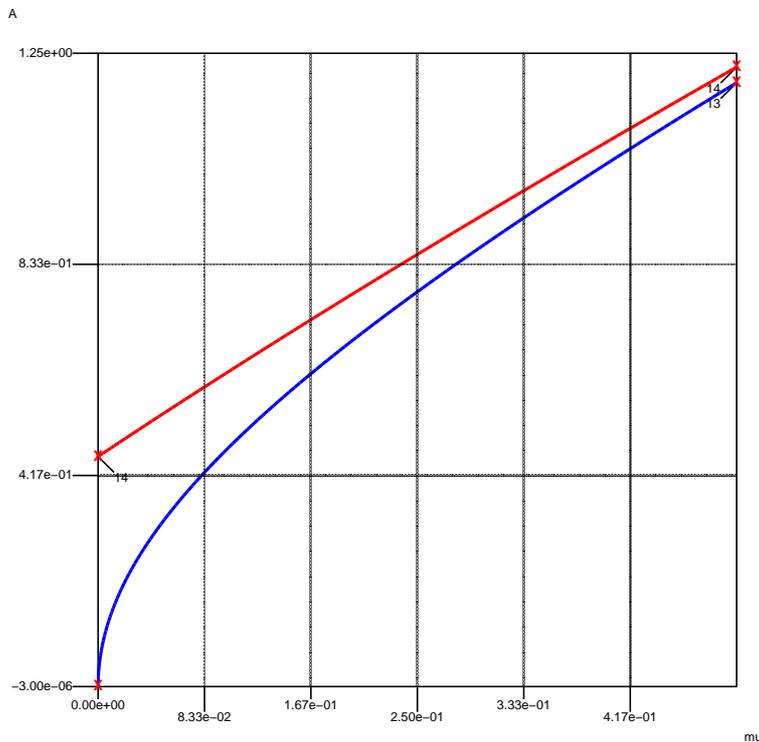


Figura 1.3: Conjunto de bifurcaciones del sistema.

En la anterior figura se observa que la línea azul muestra la variación de la BP, y la roja, la de la PD. La zona comprendida entre ambas es la franja de estabilidad.

Además podemos observar que cuanto menor es la frecuencia de la excitación (mayor μ), mayor es la amplitud necesaria para estabilizar el péndulo en su posición vertical, y menor es el rango de valores de dicha amplitud con los que se consiguen soluciones estables.

Se sabe que para valores mayores de la amplitud existen sucesivas zonas de estabilidad, aunque de tamaño reducido.

1.2.2. Caso espacial.

En esta sección se estudia el caso de momento cinético no nulo. En este supuesto el movimiento es tridimensional ya que no se anula la velocidad angular. En este caso, al no existir rozamiento, se deduce que el valor del momento angular permanece constante, por lo que puede ser considerado un parámetro en las ecuaciones del sistema.

Aquí se hará un seguimiento de los parámetros de la vibración armónica forzante y del momento angular, para los que existen soluciones periódicas, estudiando su estabilidad ante perturbaciones externas.

Al igual que en el caso plano se sigue utilizando la formulación hamiltoniana en coordenadas estereográficas polares. Así, las ecuaciones que se usan serán:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (1 + \rho^2)^2 R \\ \dot{R} &= -2\rho(1 + \rho^2) R^2 + \frac{1 - \rho^4}{\rho^3} \Theta^2 + (\mu + A \cos t) \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} \\ \dot{\theta} &= (1 + \rho^2)^2 \frac{\Theta}{\rho^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

A la hora de realizar el estudio de soluciones periódicas mediante continuación numérica de parámetros, se puede prescindir de la tercera ecuación y estudiar sólo el movimiento radial con las dos primeras ecuaciones.

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= (1 + \rho^2)^2 R \\ \dot{R} &= -2\rho(1 + \rho^2) R^2 + \frac{1 - \rho^4}{\rho^3} \Theta^2 + (\mu + A \cos t) \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Se tienen por tanto tres parámetros, la frecuencia, la amplitud y el momento angular.

Para estudiar las órbitas periódicas que describe el péndulo en su movimiento tridimensional, se usará el programa de continuación numérica Auto como en el caso plano. Sin embargo, el programa necesita, además de las ecuaciones del movimiento, una solución inicial desde la que iniciar el proceso.

Se dispone de la solución vibratoria vertical para iniciar la continuación al igual que en el caso plano. Sin embargo, Auto da problemas con esta solución ya que en las ecuaciones de movimiento espacial aparece ρ en el denominador, y en la posición vertical sucede que $\rho = 0$. Esto no supone ninguna incoherencia física puesto que en esta posición $\Theta = 0$ y se anula ese sumando, sin embargo Auto no acepta esta solución y nos muestra un error.

Por esta razón se recurre al uso del programa de simulación Dynamics Solver. En este programa introducimos las ecuaciones de movimiento, el valor de los parámetros y un valor inicial para cada variable. Utilizando todos estos datos como punto de partida, el programa simula una órbita donde la evolución de las variables viene marcada por las ecuaciones.

En este caso lo que se busca es encontrar una solución periódica en las variables ρ y R . Se busca una solución periódica cercana de una de las halladas en el caso plano. Por ejemplo se escoge la órbita etiquetada con el número 5 en la continuación con $\mu = 0,01$, que pertenece a la rama que parte del punto de bifurcación BP, como se puede observar en la Figura 1.1. Esta es una solución inestable cuya amplitud es $A = 0,19$.

Así introduciendo todos estos valores en Dynamics Solver encontramos que los valores de los parámetros de la solución son:

$$\begin{aligned} A &= 0,19 \\ \mu &= 0,01 \\ \Theta &= 0,002 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Con el mismo programa podemos obtener las representaciones de ρ y R en función del tiempo, a partir de las cuales podemos obtener expresiones analíticas aproximadas de las variables:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= 0,1595 - 0,0305 \cos(t) \\ R(t) &= 0,029 \sin(t)\end{aligned}\tag{1.5}$$

Así fijando los parámetros $\mu = 0,01$ y $A = 0,19$, mediante Auto se obtiene el diagrama de bifurcaciones de la Figura 1.4.

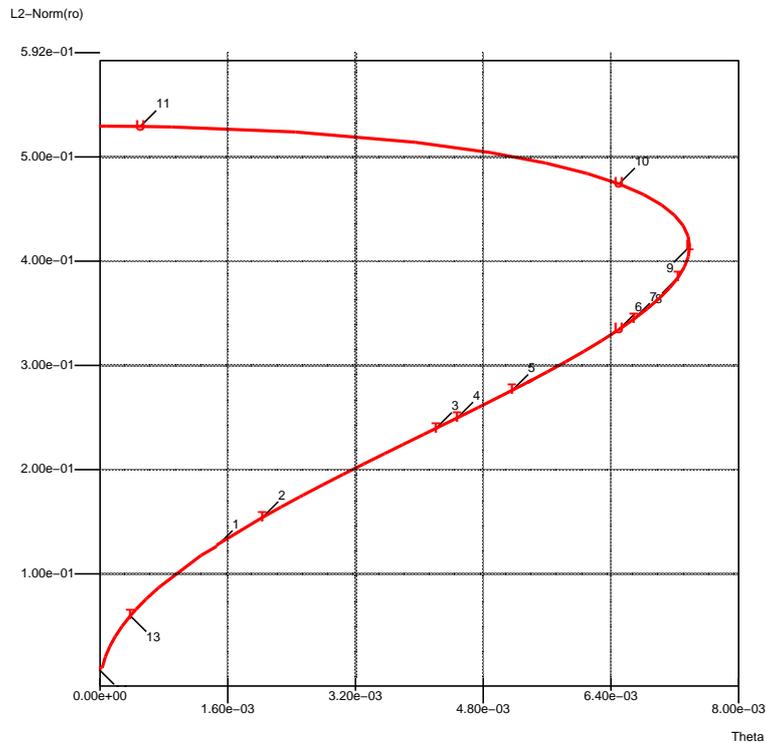


Figura 1.4: Conjunto de bifurcaciones de la continuación en Θ para $A=0.19$ y $\mu = 0,01$.

En esta figura se observa que existe un punto límite LP, etiquetado como 9, que marca la separación entre las órbitas estables, rama inferior, y las inestables, rama superior. También representa el máximo momento cinético para el que se puede estabilizar el péndulo sin variar los parámetros de la vibración del punto de apoyo.

Para ver cómo se conectan el movimiento plano y el espacial del péndulo, hay que señalar que los dos puntos con $\Theta = 0$ de la Figura 1.4 se corresponden: el inferior, con la solución vibratoria vertical para $A = 0,19$ y $\mu = 0,01$; y el superior, con la órbita 5 de la rama que partía de la BP de la Figura 1.1.

Por último, para estudiar la variación del punto de cambio de estabilidad LP se ha realizado una continuación del mismo en dos parámetros (A y Θ), dicha evolución se representa en la Figura 1.5.

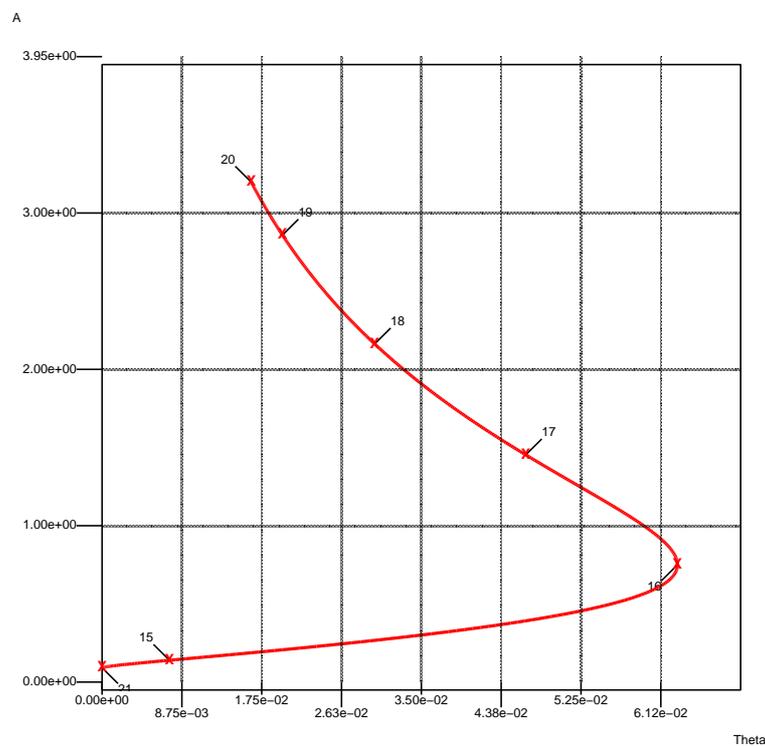


Figura 1.5: Variación del LP con Θ y A .

Podemos observar que la gráfica de variación del LP tiene a su vez un punto de pliegue LP, etiquetado como 16 en la figura anterior.

Se puede comprobar que el punto LP para momento angular nulo de la figura se corresponde con el punto de bifurcación BP de la solución vibratoria vertical. Por tanto quedan conectados los casos de movimiento plano y tridimensional.

1.3. Descripción del modelo con fricción.

El sistema objeto de estudio en el presente proyecto viene definido en la siguiente figura:

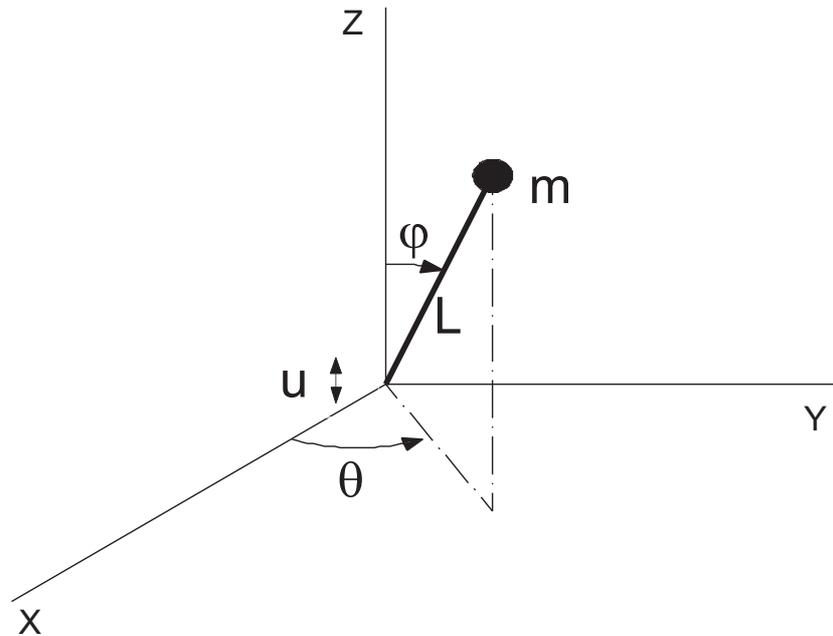


Figura 1.6: Péndulo esférico invertido.

Consideraciones de nuestro sistema:

- La varilla tiene longitud l y su masa se considerará despreciable frente a la masa situada en el extremo del péndulo.
- La masa situada en el extremo de la varilla tiene valor M .
- El rozamiento en la rótula que debiera existir en el punto inferior de la varilla se considera despreciable.
- Se considera el rozamiento con el aire.

La excitación a la que sometemos nuestro sistema en su base supondremos que es de la forma:

$$u = a \cdot \cos(\omega t) \quad (1.6)$$

1.4. Objetivos del proyecto.

El estudio del presente proyecto, constará de dos parte bien diferenciadas, una parte analítica y otra numérica, la cual se llevará a cabo con el programa de simulación numérica Dynamics Solver.

Los objetivos de nuestro proyecto se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Obtener las ecuaciones de movimiento del sistema definido por nuestro modelo de la Figura 2.1, utilizando la formulación lagrangiana.
- Aprender a usar el programa de simulación numérica Dynamics Solver, el cual nos servirá para analizar las ecuaciones obtenidas en los puntos anteriores.
- Mediante el software de continuación numérica escogido, analizar el tipo de movimiento que sigue nuestro sistema, así como el estudio de los posibles soluciones periódicas que se obtuvieran.

Capítulo 2

Coordenadas del sistema.

En este capítulo pasaremos a describir las coordenadas que van a definir nuestro sistema.

En principio tomaremos distintos tipos de coordenadas para definir nuestro sistema y posteriormente elegiremos las coordenadas más apropiadas para el posterior análisis del movimiento.

Describiremos los vectores de posición y velocidad en todos los sistemas de coordenadas elegidos.

2.1. Vector posición y vector velocidad

2.1.1. Coordenadas esféricas

El sistema consta de dos grados de libertad, los cuales en coordenadas esféricas vienen representados por los ángulos φ y θ , los cuales se muestran en la siguiente figura:

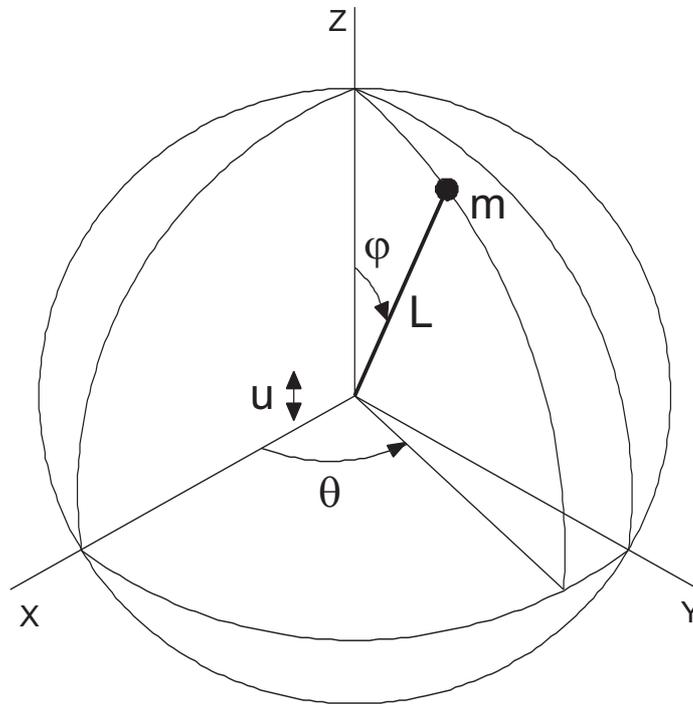


Figura 2.1: Coordenadas esféricas.

Vector posición

La posición de la masa en el sistema cartesiano de la figura 2.1 viene dado por:

$$\begin{aligned}x &= l \cos(\theta) \sin(\varphi) \\y &= l \sin(\theta) \cos(\varphi) \\z &= u + l \cos(\varphi)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Vector velocidad

Si se derivan las expresiones 2.1 con respecto al tiempo, se obtiene el vector velocidad, en cuyo caso sería:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l(-\dot{\theta} \sin(\theta) \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos(\theta) \cos(\varphi)) \\ \dot{y} &= l(\dot{\theta} \cos(\theta) \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\varphi)) \\ \dot{z} &= \dot{u} - l\dot{\varphi} \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.2}$$

2.1.2. Coordenadas estereográficas

Para definir los dos grados de libertad de nuestro sistemas usamos las coordenadas estereográficas x_s e y_s , las cuales mostramos en la Figura 2.2.

Para obtener dichas coordenadas basta con prolongar la línea que une el polo inferior de la esfera con la masa situada en el extremo del péndulo hasta que corte a un plano horizontal situado en el polo superior de la esfera.

Así obtendríamos x_s e y_s ; para relacionar dichas coordenadas con las cartesianas se usan las relaciones trigonométricas sacadas de la Figura 2.3 que se muestran en las expresiones (2.3):

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \rho^2 &= x_s^2 + y_s^2 \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) &= \frac{2l}{\rho} \end{aligned} \quad (2.3)$$

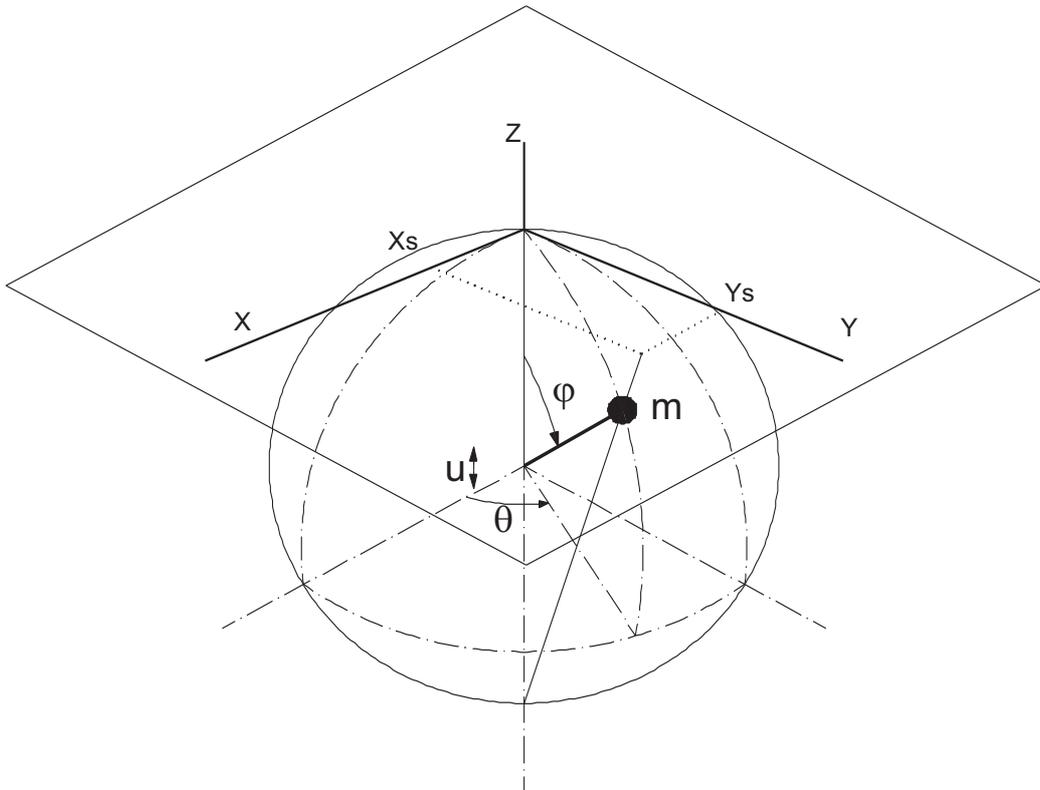


Figura 2.2: Coordenadas estereográficas.

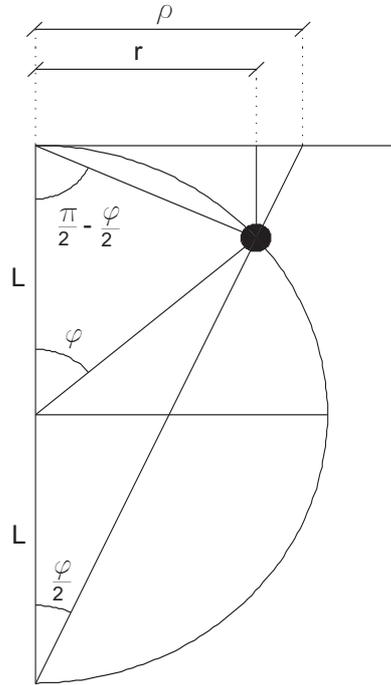


Figura 2.3: Sección vertical.

Vector de posición

Teniendo en cuenta que la posición de nuestra masa m sobre los ejes cartesianos serían:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos(\theta) \\
 y &= r \sin(\theta) \\
 z &= u - \frac{r}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Si aplicamos las relaciones (2.3) a estas últimas ecuaciones (2.4), obtenemos el vector de posición en las coordenadas estereográficas:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{r}{\rho} x_s \\
 y &= \frac{r}{\rho} y_s \\
 z &= u - \frac{r\rho}{2l}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Vector velocidad

Derivando las expresiones (2.5) con respecto al tiempo obtenemos el vector velocidad:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2}x_s + \frac{r}{\rho}\dot{x}_s \\ \dot{y} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2}y_s + \frac{r}{\rho}\dot{y}_s \\ \dot{z} &= \dot{u} - \frac{\dot{r}\rho + r\dot{\rho}}{2l}\end{aligned}\quad (2.6)$$

2.1.3. Coordenadas estereográficas polares

Estas nuevas coordenadas se obtienen igual que las anteriores prolongando la línea de unión entre el polo inferior de la esfera y el extremo superior del péndulo, con la salvedad de que ahora para describir el punto que se obtiene en el plano que pasa por el polo superior a la esfera se usan coordenadas polares (ρ, θ) y no cartesianas (x_s, y_s) como en el caso anterior.

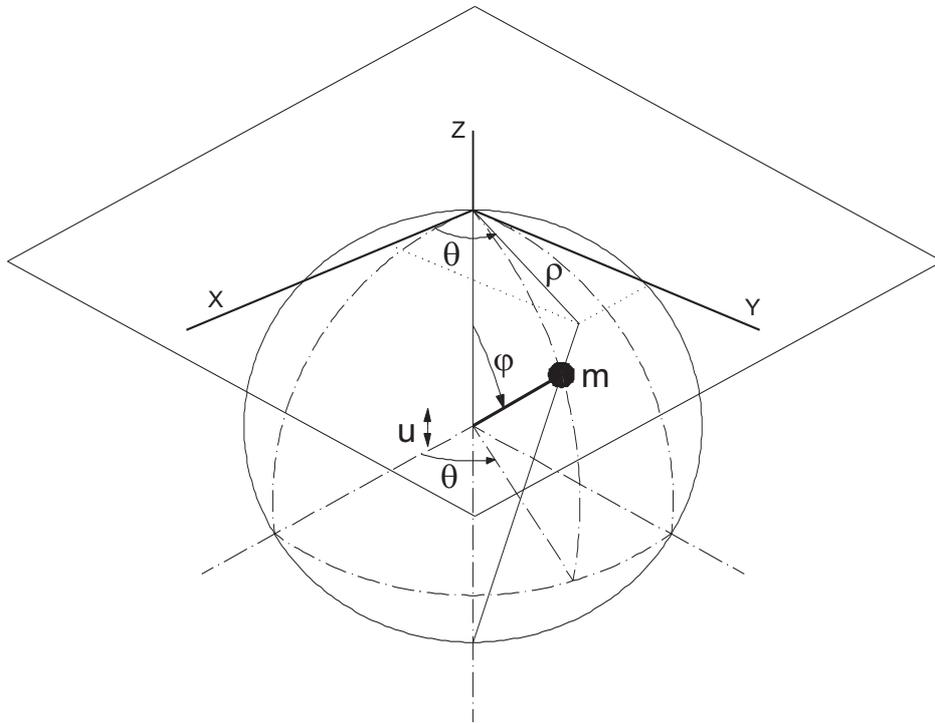


Figura 2.4: Coordenadas estereográficas polares.

Vector posición

Por tanto si observamos la Figura 2.4 vemos que para obtener el vector posición en estas nuevas coordenadas basta con realizar el cambio:

$$\begin{aligned}x_s &= \rho \cos(\theta) \\ y_s &= \rho \sin(\theta)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Vector velocidad

Derivando las expresiones (2.7) con respecto al tiempo obtenemos el vector velocidad:

$$\begin{aligned}\dot{x}_s &= \dot{\rho} \cos(\theta) - \rho \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y}_s &= \dot{\rho} \sin(\theta) + \rho \dot{\theta} \cos(\theta)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Capítulo 3

Energías

3.1. Cálculo de la energía cinética

En este capítulo vamos a calcular las expresiones que definen la energía cinética para cada uno de los sistemas de coordenadas definidos en el capítulo anterior.

3.1.1. Coordenadas esféricas

La energía cinética de nuestro sistema viene dada por la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

siendo la masa m la correspondiente a la masa situada en el extremo del péndulo, ya que se ha considerado la masa de la varilla despreciable frente a ésta. La velocidad v será la que cambie según los distintos sistemas de coordenadas elegidos, así para el caso de las coordenadas esféricas tendremos que:

$$v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= l^2(\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi) \\ \dot{y}^2 &= l^2(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi) \\ \dot{z}^2 &= \dot{u}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - 2l\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sustituyendo las expresiones (3.3) en la ecuación de la energía cinética y realizando algunas operaciones obtenemos la expresión final de la energía

cinética en coordenadas esféricas:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - ml\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3.4)$$

3.1.2. Coordenadas estereográficas

En estas nuevas coordenadas, al igual que en el caso anterior se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2}x_s + \frac{r}{\rho}\dot{x}_s \\ \dot{y} &= \frac{\dot{r}\rho - r\dot{\rho}}{\rho^2}y_s + \frac{r}{\rho}\dot{y}_s \\ \dot{z} &= \dot{u} - \frac{\dot{r}\rho + r\dot{\rho}}{2l} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sumando las expresiones anteriores llegamos a:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{\dot{r}\rho^2 - r^2\dot{\rho}^2}{\rho^2} + \frac{r^2}{\rho^2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \dot{u}^2 + \frac{(\dot{r}\rho + r\dot{\rho})^2}{4l^2} - \frac{\dot{u}}{l}(\dot{r}\rho + r\dot{\rho}) \quad (3.6)$$

Usando un calculo matemático sencillo a través de la relación del ángulo doble y teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas dadas por las expresiones (3.7) obtenemos las expresiones de r y \dot{r} en función de l y ρ .

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{r}{l} \\ \tan \frac{\varphi}{2} &= \frac{\rho}{2l} \\ \sin \varphi &= 2 \tan \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Así las expresiones de r y \dot{r} son:

$$\begin{aligned} r &= \frac{4\rho l^2}{4l^2 + \rho^2} \\ \dot{r} &= \frac{4l^2(4l^2 - \rho^2)}{(4l^2 + \rho^2)^2} \dot{\rho} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sustituyendo las expresiones (3.8) en la expresión (3.6) obtenemos el término de la velocidad en función de las coordenadas estereográficas:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{16l^4}{(4l^2 + \rho^2)^2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \dot{u} - \frac{32l^3\dot{u}}{(4l^2 + \rho^2)^2}\rho\dot{\rho} \quad (3.9)$$

Por último sustituyendo la expresión (3.9) en la expresión (3.1) obtenemos la energía cinética en función de las coordenadas estereográficas:

$$T = \frac{8ml^4}{(4l^2 + \rho^2)^2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - \frac{16ml^3\dot{u}}{(4l^2 + \rho^2)^2}\rho\dot{\rho} \quad (3.10)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x_s^2 + y_s^2 \\ \rho\dot{\rho} &= x_s\dot{x}_s + y_s\dot{y}_s \end{aligned}$$

3.2. Cálculo de la energía potencial

3.2.1. Coordenadas esféricas

La energía potencial de nuestro sistema es debida al campo gravitatorio. Tomando como origen de potenciales el punto O representado en la Figura 2.1, la energía potencial vendría dada por la siguiente expresión:

$$U = mgh$$

siendo h la vertical desde el punto O hasta la masa m ; representando dicha altura en función de nuestra coordenada z , obtendríamos la energía potencial del sistema en coordenadas esféricas.

$$U = mgl(\cos \varphi - 1) + mgu \quad (3.11)$$

3.2.2. Coordenadas estereográficas

Al igual que en el caso anterior, para obtener la energía potencial en las nuevas coordenadas basta con representar la altura h en función de éstas. Para este nuevo caso tomamos como origen de coordenadas el punto O representado en la Figura 2.2. Además la coordenada z viene dada ahora por:

$$z = u - \frac{2l\rho^2}{4l^2 + \rho^2}$$

y siendo $h=z-l$, nos resulta que la energía potencial será:

$$U = mgu - \frac{2mgl\rho^2}{4l^2 + \rho^2} \quad (3.12)$$

3.3. Energía disipativa

Para poder modelar el efecto del rozamiento en los sistemas se incluye un nuevo término, en las ecuaciones de Lagrange, cuya expresión es de la forma:

$$Fr = \frac{1}{2}cv^2$$

donde c es un coeficiente de rozamiento que varía según en el medio donde nos encontremos.

3.3.1. Coordenadas esféricas

Para obtener el término disipativo en estas coordenadas basta con expresar la velocidad v en coordenadas esféricas. Como vimos anteriormente la velocidad en esféricas podemos obtenerla usando las expresiones (3.3) mediante:

$$v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Con todo esto obtendríamos que el término disipativo viene dado por la siguiente expresión:

$$Fr = \frac{1}{2}cl^2(\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}c\dot{u}^2 - cl\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3.13)$$

3.3.2. Coordenadas estereográficas

En estas coordenadas la velocidad venia dada por la expresión (3.6). Teniendo en cuenta esta expresión la energía disipativa en dichas coordenadas vendrá dado por:

$$Fr = \frac{8cl^4}{(4l^2 + \rho^2)^2}(x_s^2 + y_s^2) + \frac{1}{2}c\dot{u}^2 - \frac{16cl^3\dot{u}}{(4l^2 + \rho^2)^2}\rho\dot{\rho} \quad (3.14)$$

Capítulo 4

Ecuaciones de Movimiento.

4.1. Coordenadas esféricas

4.1.1. Función de Lagrange

Para hallar las ecuaciones de movimiento del sistema vamos a usar la formulación lagrangiana. Para esto calculamos primeramente la función de Lagrange, la cual se define como:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i) \quad (4.1)$$

donde q_i y \dot{q}_i son las coordenadas generalizadas y velocidades generalizadas respectivamente.

Así la función de Lagrange en coordenadas esféricas vendrá dado por:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) - ml\dot{\varphi} \sin \varphi - mgl(\cos \varphi - 1) + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - mgu \quad (4.2)$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones (3.4) y (3.11) obtenidas en el capítulo anterior.

4.1.2. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.3)$$

Como nuestro sistema consta de dos grados de libertad, tendremos que aplicar dichas ecuaciones por separado para cada uno de ellos con lo que obtendremos las dos ecuaciones de movimiento que definen a nuestro problema.

Grado de libertad θ

Obtenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \dot{\theta} \sin^2 \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2 \ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} &= cl^2 \dot{\theta} \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la expresión (4.3) obtenemos la primera ecuación de movimiento del sistema:

$$ml^2 \ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2ml^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi + cl^2 \dot{\theta} \sin^2 \varphi = 0 \quad (4.4)$$

Grado de libertad φ

Obtenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \dot{\varphi} - ml\dot{u} \sin \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= ml^2 \ddot{\varphi} - ml\ddot{u} \sin \varphi - ml\dot{u} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -ml^2 \dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi + ml\dot{u} \dot{\varphi} \cos \varphi - mgl \sin \varphi \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} &= cl^2 \dot{\varphi} - cl\dot{u} \sin \varphi\end{aligned}$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la expresión (4.3) obtenemos la segunda ecuación de movimiento del sistema:

$$ml^2 \ddot{\varphi} - ml^2 \dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi - ml(\ddot{u} \sin \varphi + g \sin \varphi) + cl^2 \dot{\varphi} - cl\dot{u} \sin \varphi = 0 \quad (4.5)$$

siendo

$$\ddot{u} = -a\omega^2 \cos \omega t$$

4.2. Coordenadas estereográficas

4.2.1. Función de Lagrange

Sustituyendo las expresiones (3.10) y (3.12) en la definición del lagrangiano, la cual viene dada por la expresión (4.1) que vimos anteriormente, obtenemos la expresión de la función de Lagrange en coordenadas estereográficas:

$$L = \frac{8ml^4}{(4l^2 + \rho^2)^2} (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) - \frac{16ml^3\dot{u}}{(4l^2 + \rho^2)^2} \rho\dot{\rho} + \frac{2mgl\rho^2}{4l^2 + \rho^2} + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 - mgu \quad (4.6)$$

Debido a la complicación de dicha expresión, a continuación vamos a adimensionalizar dicha expresión, usando unas nuevas variables para hacerlo. Dichas variables serán x'_s, y'_s y u'_s . Así tenemos:

$$x_s = 2lx'_s$$

$$y_s = 2ly'_s$$

$$u_s = 2lu'_s$$

Igualmente para poder adimensionalizar el tiempo definimos otro parámetro τ , tal que:

$$\tau = \omega t$$

con esta nueva variable convertimos las derivadas temporales en derivadas con respecto a esta nueva variable de modo que:

$$\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}$$

Si introducimos estos cambios en la expresión (4.6) y adoptando una nomenclatura sencilla evitando los subíndices y las tildes, nos resulta la siguiente expresión del lagrangiano:

$$L = 4ml^2\omega^2 \left[\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{\mu\rho^2}{1 + \rho^2} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\mu u \right] \quad (4.7)$$

en esta última expresión cabe notar que se ha introducido un nuevo parámetro μ el cual representa la relación que existe entre el cuadrado de la frecuencia de caída del péndulo debida a la gravedad y el cuadrado de la frecuencia de la excitación armónica aplicada en la base.

$$\mu = \frac{g}{\omega^2 l}$$

A continuación adimensionalizando obtenemos la expresión del lagrangiano y de la energía disipativa también adimensionalizada, que serán las que posteriormente se usarán para obtener las ecuaciones de Lagrange.

$$\mathbf{L} = \frac{L}{4ml^2\omega^2}$$

$$\mathbf{F} = \frac{F}{4ml^2\omega^2}$$

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{\mu\rho^2}{1 + \rho^2} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\mu u \quad (4.8)$$

$$F = \frac{c}{m} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} \right) \quad (4.9)$$

4.2.2. Ecuaciones de Lagrange

Antes de aplicar las ecuaciones de Lagrange vamos a pasar de las coordenadas estereográficas a las coordenadas estereográficas polares, las cuales se diferencian de las anteriores en que éstas describen el punto de intersección, en el plano que pasa por el polo superior de la esfera, mediante coordenadas polares y no cartesianas. Según podemos observar en la figura siguiente:

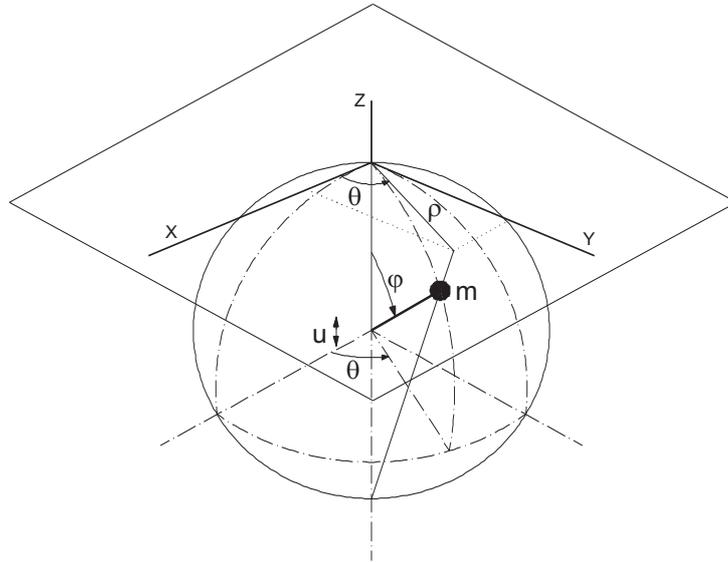


Figura 4.1: Coordenadas estereográficas polares.

Así, si aplicamos el cambio (4.10), a la ecuación del lagrangiano expresada en el apartado anterior (4.8)

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \\y &= \rho \operatorname{sen} \theta\end{aligned}\quad (4.10)$$

Obtenemos la función de Lagrange:

$$L = \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{\mu\rho^2}{2(1 + \rho^2)} + \frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{1}{2}\mu u \quad (4.11)$$

Aplicando el mismo cambio a la ecuación de la energía disipativa obtenemos:

$$F = \frac{c}{m} \left(\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}{2(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} \right) \quad (4.12)$$

Aplicando a estas últimas expresiones las ecuaciones de Lagrange definidas por la expresión (4.3), obtendremos las ecuaciones de movimiento asociadas a cada uno de nuestros grados de libertad.

Grado de libertad ρ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\dot{\rho} - 2\dot{u}\rho}{(1 + \rho^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = \frac{\ddot{\rho} - 2\dot{u}\dot{\rho} - 2\ddot{u}\rho}{(1 + \rho^2)^2} - (\dot{\rho} - 2\dot{u}\rho) \frac{4\rho\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{\rho\dot{\rho}^2}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\rho^3\dot{\theta}^2}{(1 + \rho^2)^3} - \frac{2\dot{\rho}\dot{u}}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{8\dot{u}\rho^2\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^3} + \frac{\mu\rho}{1 + \rho^2} - \frac{\mu\rho^3}{(1 + \rho^2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\rho}} = \frac{c}{m} \left(\frac{\dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{u}\rho}{(1 + \rho^2)^2} \right)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.3), se obtiene la primera ecuación de movimiento:

$$\ddot{\rho} = \frac{4\rho\dot{\rho}^2}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\rho^3\dot{\theta}^2}{1 + \rho^2} + \rho\dot{\theta}^2 + (2\ddot{u} + \mu)\rho - \frac{c}{m}(\dot{\rho} - 2\dot{u}\rho) \quad (4.13)$$

Grado de libertad θ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1 + \rho^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\rho^2 \ddot{\theta}}{(1 + \rho^2)^2} + \dot{\theta} \left(\frac{2\rho \dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{4\rho^3 \dot{\rho}}{(1 + \rho^2)^3} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = \frac{c}{m} \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1 + \rho^2)^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.3), se obtiene la segunda ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} = \frac{4\rho \dot{\rho} \dot{\theta}}{(1 + \rho^2)^2} - \frac{2\dot{\rho} \dot{\theta}}{\rho} - \frac{c}{m} \dot{\theta} \quad (4.14)$$

4.3. Consideraciones previas al análisis.**4.3.1. Introducción**

Una vez hemos obtenido todas las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema, tanto en coordenadas esféricas como en coordenadas estereográficas polares, hemos de decidir sobre que sistema realizaremos nuestro análisis. Dicho análisis se hará tomando las coordenadas estereográficas polares debido a la facilidad con la cual se puede identificar en ellas el momento angular, para poder interpretar los resultados físicamente, que a priori no podríamos observar en otro tipo de coordenadas.

4.3.2. Modificación de las ecuaciones

Vamos a modificar las ecuaciones de movimiento obtenidas en el apartado anterior de forma que en ellas aparezca el momento angular.

Partiendo de las parciales obtenidas para la coordenada θ podemos identificar el momento angular, el cual vendría definido como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1 + \rho^2)^2} = \Theta \quad (4.15)$$

Introduciendo este cambio en la ecuación de movimiento de la coordenada θ 4.13, se obtiene una nueva ecuación en función del momento angular.

$$\dot{\Theta} = -\frac{c}{m}\Theta \quad (4.16)$$

Igualmente si introducimos dicho cambio en la ecuación de movimiento dada por la coordenada ρ (4.14), se obtiene la segunda ecuación de movimiento en función del momento angular:

$$\ddot{\rho} = \frac{4\rho\dot{\rho}^2}{1 + \rho^2} - \frac{2\Theta^2(1 + \rho^2)^3}{\rho} + \frac{\Theta^2(1 + \rho^2)^4}{\rho^3} + (2\ddot{u} + \mu)\rho - \frac{c}{m}(\dot{\rho} - 2\dot{u}\rho) \quad (4.17)$$

Para facilitar la resolución de nuestro sistema de ecuaciones introduciremos un cambio de variable (4.18), para poder convertir nuestra ecuación (4.14) en una ecuación diferencial de primer orden.

$$\dot{\rho} = R \quad (4.18)$$

Así obtenemos el sistema de ecuaciones que finalmente tendremos que resolver será:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= -\frac{c}{m}\Theta \\ \dot{R} &= \frac{4\rho R^2}{1 + \rho^2} - \frac{2\Theta^2(1 + \rho^2)^3}{\rho} + \frac{\Theta^2(1 + \rho^2)^4}{\rho^3} + (2\ddot{u} + \mu)\rho - \frac{c}{m}(R - 2\dot{u}\rho) \\ \dot{\rho} &= R \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3.3. Singularidad del sistema

Nuestro sistema posee una característica un tanto especial la cual nos va a obligar a analizar el movimiento del sistema con el programa **Dynamic Solver** y no con **Auto2000** como en un principio se había pensado. La característica, a la cual nos referimos, es la forma que presenta la solución en $\Theta(t)$, de la expresión (4.16), donde podemos observar que se trata de una exponencial decreciente y que por tanto no oscilará para ninguna vibración que le apliquemos.

La característica anterior, conlleva a que nos planteemos que las posibles soluciones del sistema se encuentren, o bien en la vertical nula, o bien que se establezcan una vez se extinga el movimiento de rotación proporcionado por el momento angular, es decir que el sistema termine oscilando en un plano.

El hecho de analizar las soluciones del sistema con **Dynamic Solver** y no con **Auto2000** se debe a que este último solamente realiza la continuación numérica de soluciones de equilibrio ó periódicas y nosotros estamos interesados en el régimen transitorio de carácter exponencial que presenta el momento angular.

Capítulo 5

Dynamics Solver.

5.1. Introducción.

Dynamics Solver es un programa pensado para resolver problemas para sistemas dinámicos:

- Ecuaciones diferenciales simples ordinarias de orden arbitrario.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Ecuaciones diferenciales-funcionales y sistemas de ecuaciones.
- Cualquier problema que pueda ser escrito en las formas mencionadas.

A continuación pasamos a describir, mediante unos pasos sencillos, como se usa dicho programa.

Con dicho programa no es necesario saber programar, todo se lleva acabo con los cuadros de diálogo de fácil uso; los resultados pueden ser fácilmente y rápidamente obtenidos

I. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Una vez iniciamos el programa, lo primero que debemos indicar es el tipo de problema que queremos resolver. Para esto debemos desplegar la barra **Type** dentro del menu **Edit** del programa. Una vez hecho esto nos aparece un menu como el representado en la Figura 5.1. Aquí, en nuestro proyecto en cuestión seleccionaremos "System of ODEs" para indicarle a Dynamic Solver que vamos a resolver un sistema de ecuaciones. Introduciremos también la dimensión de nuestro sistema que en nuestro caso aunque debiera ser tres pondremos cuatro y añadiremos

una ecuación al sistema(4.19), para poder así controlar el momento angular y el ángulo θ con el Dynamics Solver. La ecuación adicional que introducimos es la del cambio de variable que realizamos en la sección anterior para hacer aparecer el momento angular.

$$\frac{\rho^2 \dot{\theta}}{(1 + \rho^2)^2} = \Theta$$

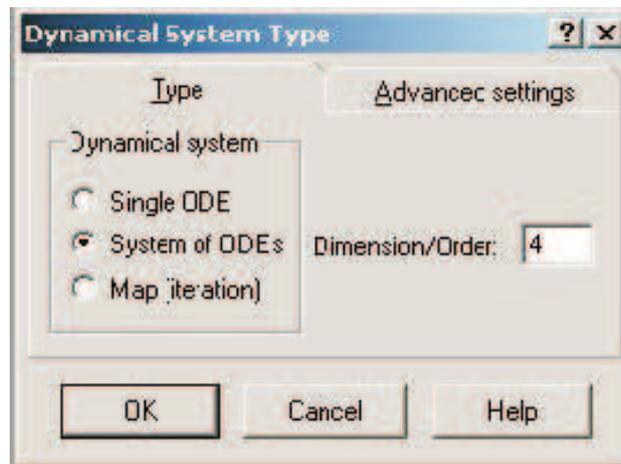


Figura 5.1: Definición del tipo de problema.

II. DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES

Para determinar las variables de nuestro problema seleccionamos el comando **Variables** incluido en la barra **Edit**. Entonces se mostrará una ventana como la Figura 5.2; aquí se puede observar como se introducen fácilmente tanto la variable independiente como las variables independientes, que en nuestro caso serán:

- a) Como variable independiente tomaremos el tiempo t .
- b) Y como variables dependientes tendremos a ρ , R y Θ

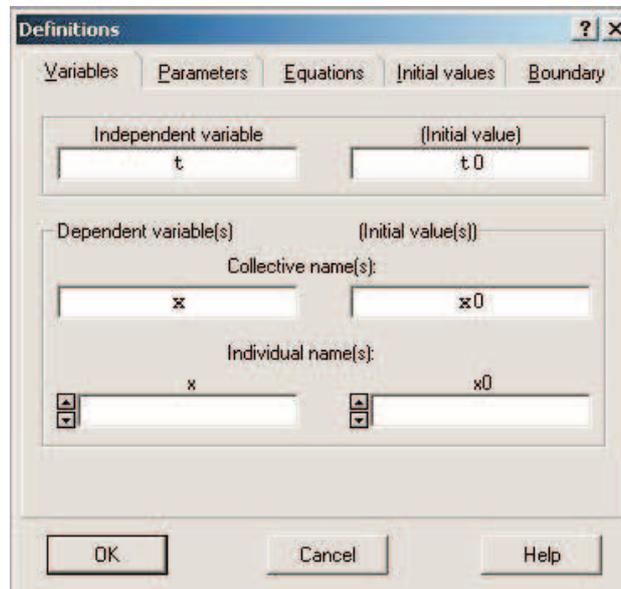


Figura 5.2: Elección de la variables.

III. ELECCIÓN DE LOS PARÁMETROS

Una vez definidas las variables del problema debemos indicar cuales van a ser los parámetros que vamos a usar. Para hacerlo seleccionamos el comando **Parameters**, dentro también del menu **Edit**, apareciendo un menu como el mostrado en la Figura 5.3. Para nuestro problema los parámetros que introduciremos serán:

- a) La amplitud A .
- b) La relación entre la frecuencia de caída del péndulo debida a la gravedad y la frecuencia de la excitación armónica aplicada en la base, dada por μ .
- c) El rozamiento adimensional $\lambda = \frac{c}{m}$.

Los valores que daremos a dichos parámetros inicialmente serán $A = 0,19$, $\mu = 0,01$ y $\lambda = 0,2$.

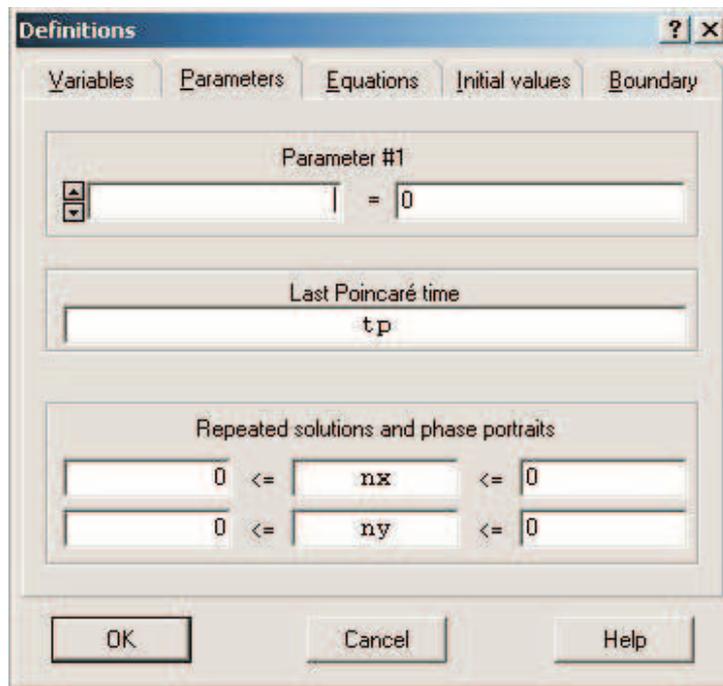


Figura 5.3: Definición de los parámetros.

IV. INTRODUCCIÓN DE LAS ECUACIONES

Para introducir el sistema de ecuaciones (4.19) a Dynamics Solver, basta con seleccionar el menú **Equations**, dentro de la barra de menú **Edit**, con lo que se mostrará por pantalla la Figura 5.4 donde podemos introducir fácilmente nuestras ecuaciones.

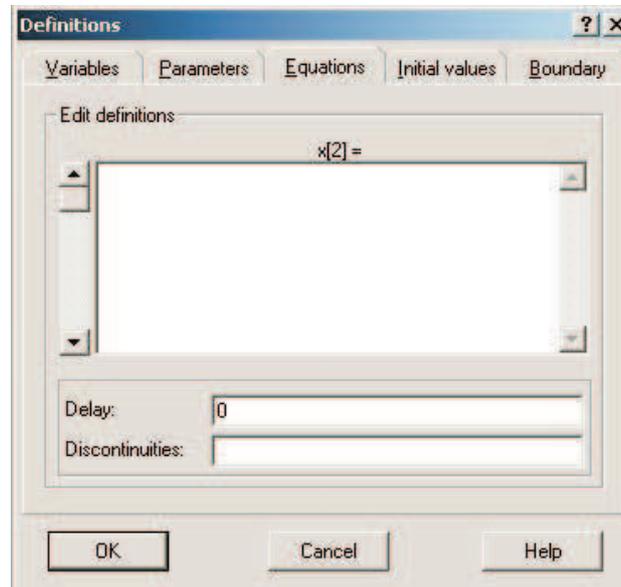


Figura 5.4: Introducción de la ecuaciones.

V. VALORES INICIALES

También es necesario proporcionarle a Dynamics Solver unos valores iniciales para todas las variables de nuestro sistema tanto la independiente como para las dependientes. Esto lo hacemos dentro de la barra **Edit** seleccionando el comando **Initial Values**, hecho esto aparece un menu emergente como el mostrado en la Figura 5.5, donde podemos observar el lugar en el cual hemos de indicar los valores iniciales tanto para la variable independiente como para el resto de variables dependientes de nuestro problema. Los valores iniciales que introduciremos para nuestro caso concreto irán variando según el caso que estemos estudiando, ya que al ir variando éstos seremos capaces de averiguar o intuir el movimiento de nuestro sistema.

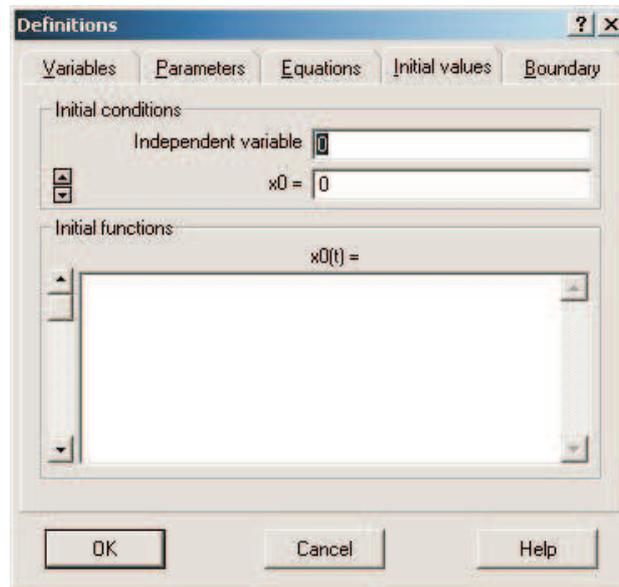


Figura 5.5: Valores Iniciales.

VI. CREACIÓN DE GRÁFICOS

Una vez tenemos definido nuestro problema sólo queda pedir a Dynamics Solver que nos de la información que necesitamos. Esta información puede ser de dos tipos, o bien pedimos que nos muestre una lista con los valores de las variables que nos interesen, o bien le pedimos que nos represente dichos valores mediante gráficos.

Para crear gráficos debemos abrir, en el menú **Output**, el comando **New graph windows**. Hecho esto nos aparece en pantalla la Figura 5.6 en la cual podemos indicar los siguientes aspectos:

- El título con el que vamos a denominar a nuestra gráfica.
- Las coordenadas que vamos a representar, tanto en el eje horizontal como en el vertical. Además debemos también indicar el rango en el que se representarán dichas variables.
- En el caso de estar interesados no en encontrar todos los puntos solución sino sólo aquellos que satisfacen una condición adicional, debemos seleccionar la casilla **Poincaré section**. La condición debemos indicarla en la sección **condition**. En esta casilla escribiremos la expresión que tendrán que satisfacer nuestros puntos, dicha condición se cumplirá cuando sea haga nula dicha expresión.

Además de esto puede también que sólo nos interesen los puntos que provienen de una dirección determinada, es decir, solo queremos los valores que anulan nuestra condición siempre que el valor de la variable antes de la solución fuese negativo y a partir de la solución sean positivos. Para este caso debemos marcar la casilla **Increasing**. Si por el contrario queremos los valores que van decreciendo, es decir son positivos antes de llegar al cero y luego son negativos entonces marcaremos **Decreasing**. También es posible quedarnos con ambas casillas marcadas.

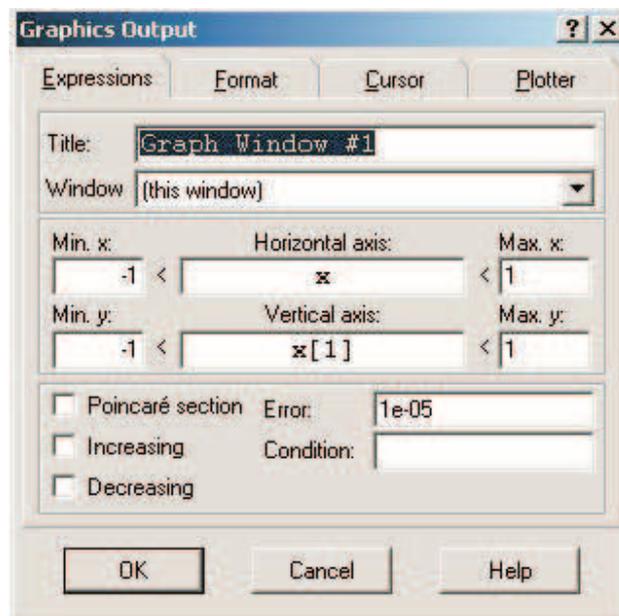


Figura 5.6: Cuadro de gráficos.

- d) Lo único que queda por indicar a Dynamics Solver para que nos muestre el gráfico requerido son unos valores iniciales para las variables que vamos a representar en nuestros ejes. Esto lo hacemos en la pestaña **Cursor** como podemos observar en la Figura 5.7.

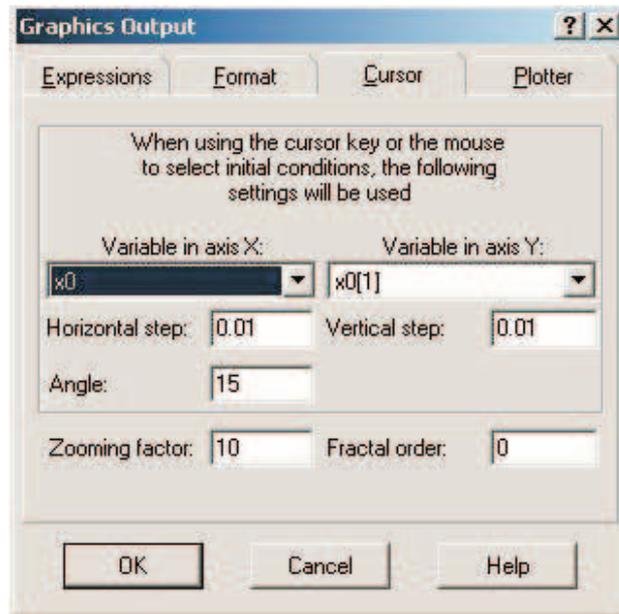


Figura 5.7: Valores iniciales en gráficos.

VII. GENERACIÓN DE LISTAS DE VALORES

El último paso antes de ejecutar el programa es la generación de listas de los valores de las variables que nos interesan en nuestro análisis. Para generar estas listas se procede de forma casi análoga a la generación de un gráfico. Para esto abrimos en el menú **Output** la herramienta **New Text windows**, entonces se mostrará por pantalla la Figura 5.8.

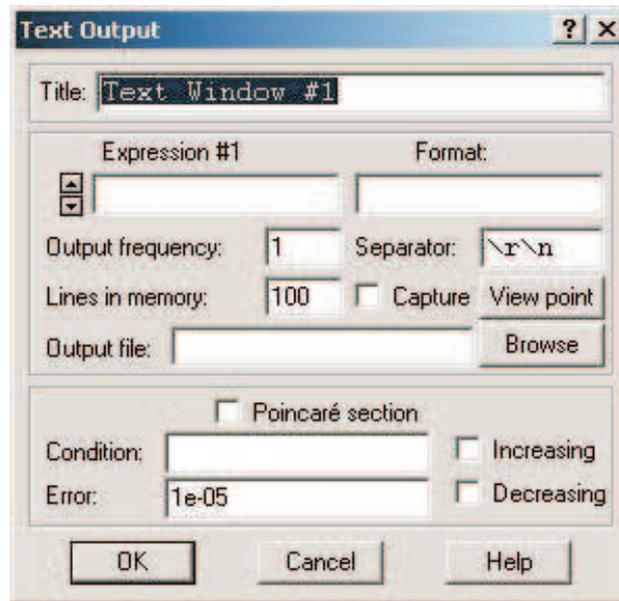


Figura 5.8: Listas y tablas de valores.

En dicha ventana deberemos indicar:

- a) El título de la lista que vamos a generar.
- b) Las variables o valor de las expresiones que queremos que nos muestre.
- c) El formato de salida de los valores en la lista, es decir, la disposición, el tamaño, el estilo... de los valores obtenidos.
- d) El nombre del archivo donde se guardarán dichos datos, así como la ubicación donde se generará dicho archivo.
- e) Al igual que en el apartado de gráficos, aquí también podemos seleccionar sólo aquellos puntos solución que cumplan una condición, debiendo introducir aquí la condición y marcar la casilla **Poincaré section**.

Capítulo 6

Análisis de resultados.

6.1. Problema Inicial.

Inicialmente para la resolución de nuestro problema nos basamos en los datos obtenidos en la resolución de este mismo sistema pero bajo la hipótesis de rozamiento viscoso nulo, el cual ha sido tratado con anterioridad en el Proyecto Fin de Carrera *Estabilización del péndulo esférico invertido mediante vibración del punto de apoyo*.

En el problema de rozamiento nulo la solución inicial que se obtuvo fue para los siguientes valores:

- Amplitud $A=0.19$
- Radio $\rho = 0,129$
- Momento angular $\Theta = 0,005$.
- La relación entre la frecuencia propia del péndulo debida a la gravedad y la frecuencia de la excitación armónica aplicada en la base, dada por $\mu = 0,01$.
- Velocidad $R=0$.

Empezamos tomando para nuestro problema los valores indicados anteriormente y realizamos luego variaciones en algunos de estos parámetros para ver como se comporta el sistema.

6.2. Problema plano

Por analogía al proyecto sin rozamiento, vamos a analizar también aquí el problema plano pero considerando ahora la existencia del rozamiento. Con esto podremos hacer un mejor análisis y comparación de resultados.

6.2.1. Variaciones de ρ .

Inicialmente representamos en Dynamic Solver la evolución de las variables ρ y R manteniendo constante todos los demás parámetros. Para conseguir dicha evolución se ha obtenido la sección de Poincaré usando el periodo de la excitación que le aplicamos a nuestro sistema. Estas secciones de Poincaré consisten en obtener un punto cada vez que transcurre un ciclo de periodo 2π . Como podremos ver a continuación los resultados obtenidos muestran un punto de silla que aparece para valores mayores a 0.2885 y también aparece un punto estable para $\rho = 0$. Los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

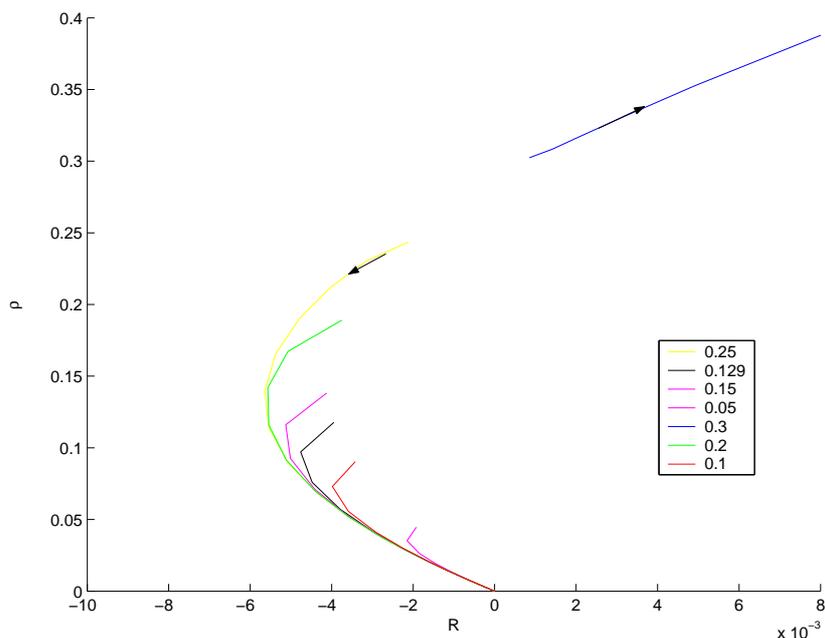


Figura 6.1: Sección de Poincaré $\rho - R$.

En la Figura 6.1 se muestran las distintas evoluciones de ρ y R partiendo de unos valores iniciales distintos en la variable ρ . En dicha figura podemos observar como existe un punto de silla que nos indica el salto de la solución

estable a la solución inestable tal como ocurría en el caso sin fricción. Este cambio se localizó para valores de ρ mayores a 0,2885, como ya indicamos anteriormente.

Para poder ver más claramente la evolución del péndulo, se realizaron diversos experimentos en los no se representan sólo los valores dados por las secciones de Poincaré sino que se hace una evolución completa de las variables. En esta nueva situación los resultados obtenidos se representan, para alguno de los valores analizados, en las Figuras 6.2 a la 6.8.

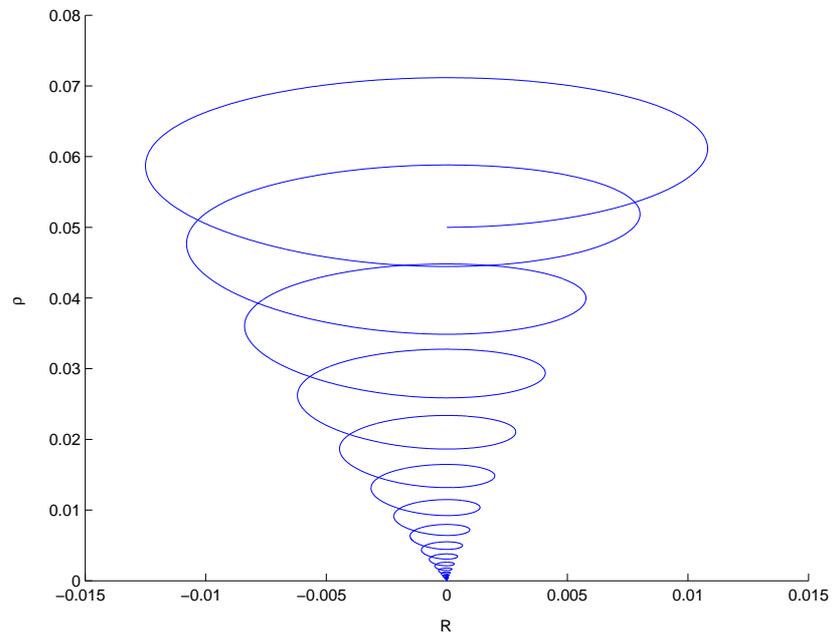
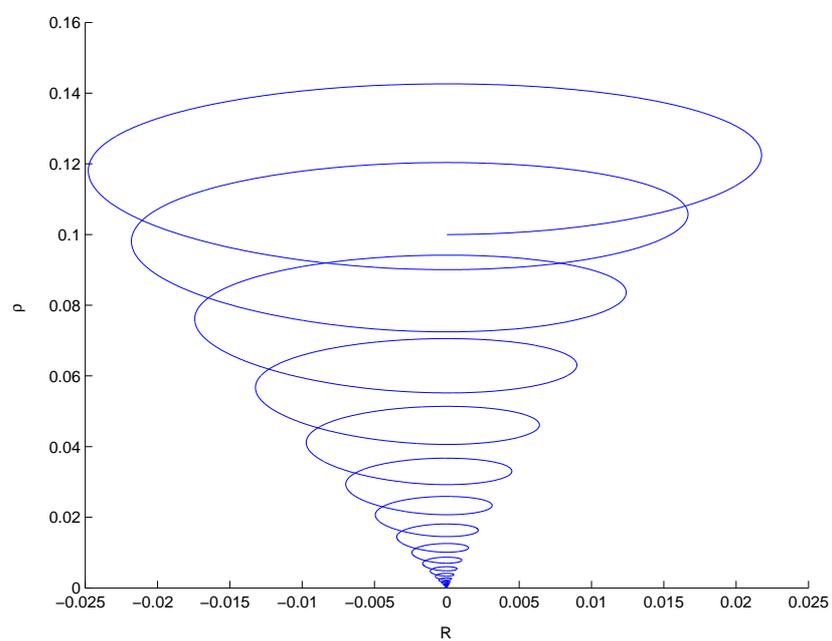
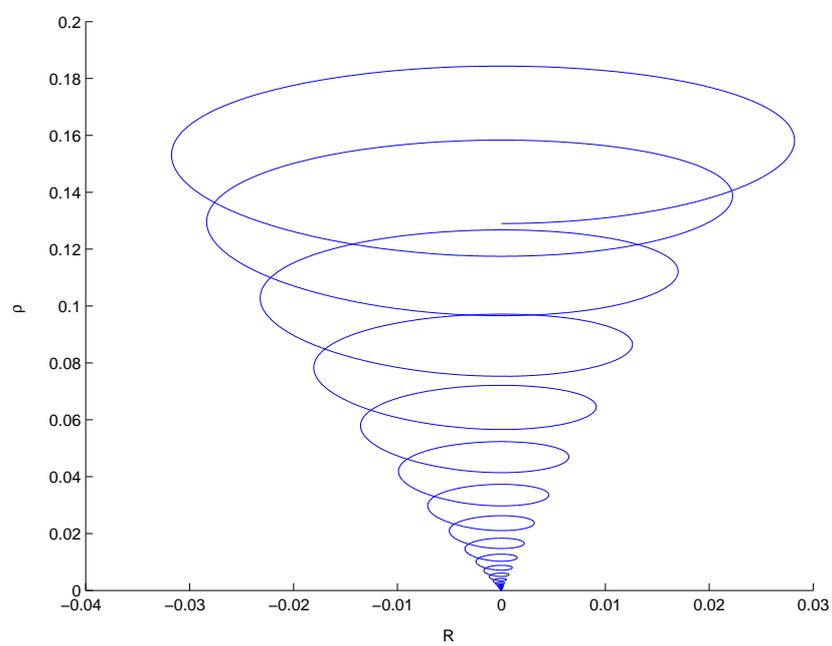
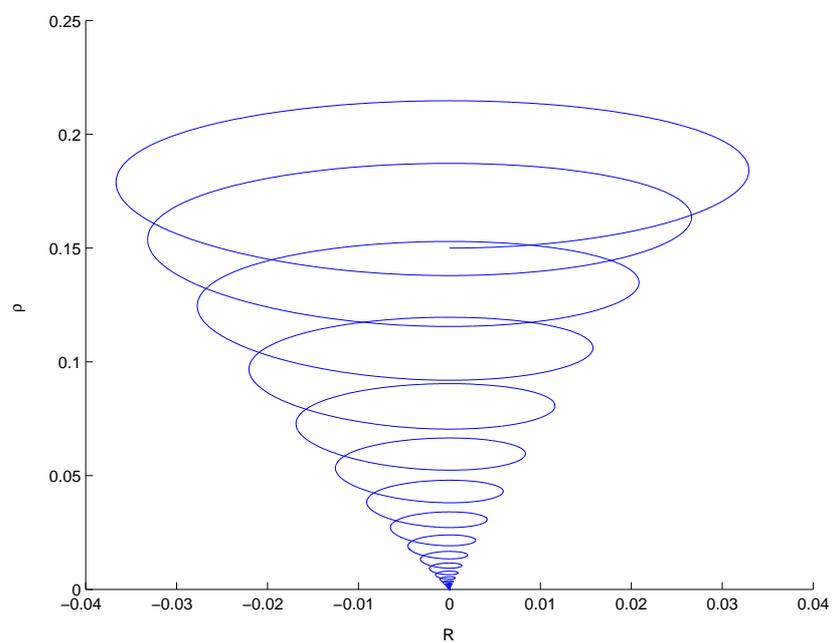
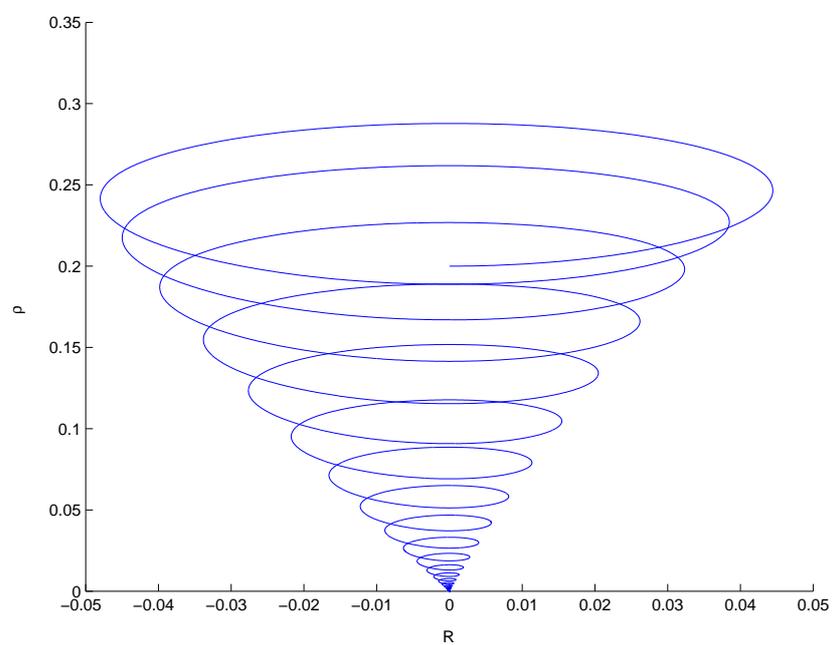
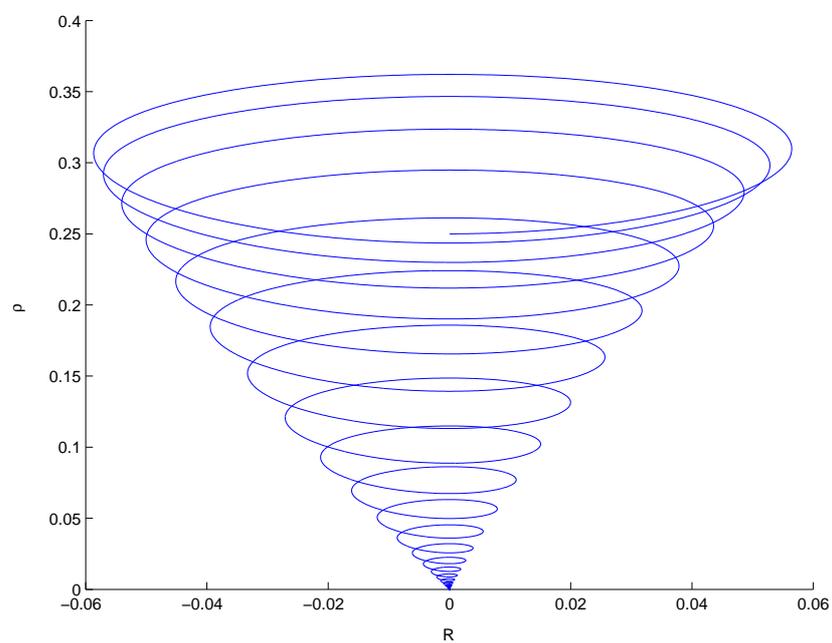
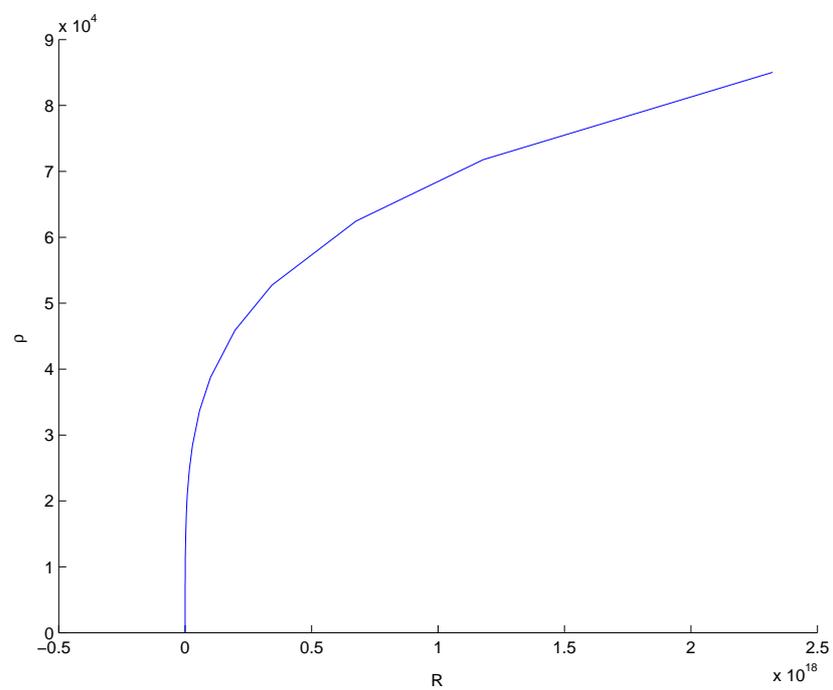


Figura 6.2: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

Figura 6.3: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.Figura 6.4: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

Figura 6.5: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.Figura 6.6: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.

Figura 6.7: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.Figura 6.8: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

En las figuras anteriores se puede observar como para valores de ρ menores a 0,2885 el péndulo tiende a buscar la solución de equilibrio, mientras que para valores mayores se dispara a infinito.

Por último para observar la evolución de esta variable realizamos un seguimiento de la misma representándola frente a ella misma en un instante 2π posterior, para poder seguir su tendencia, esto queda reflejado en las Figuras 6.9 a 6.15.

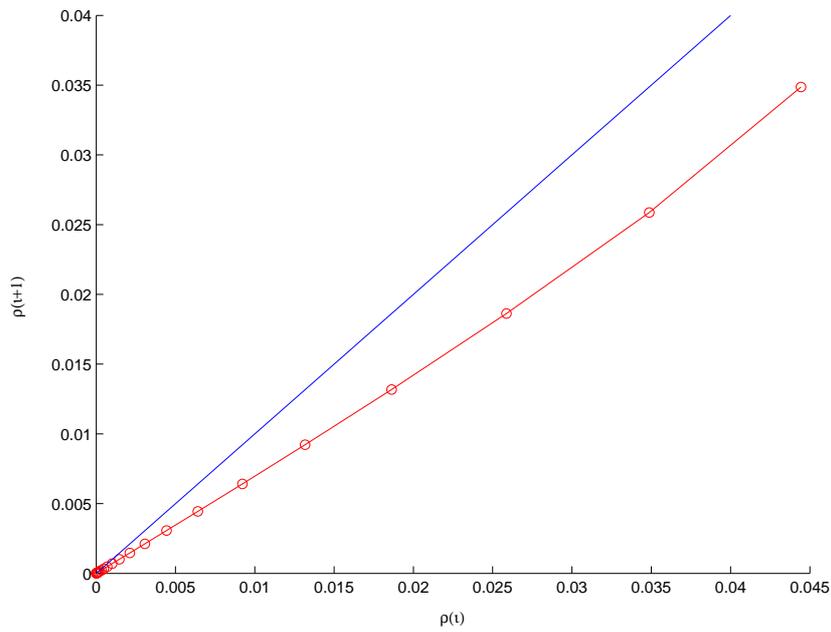
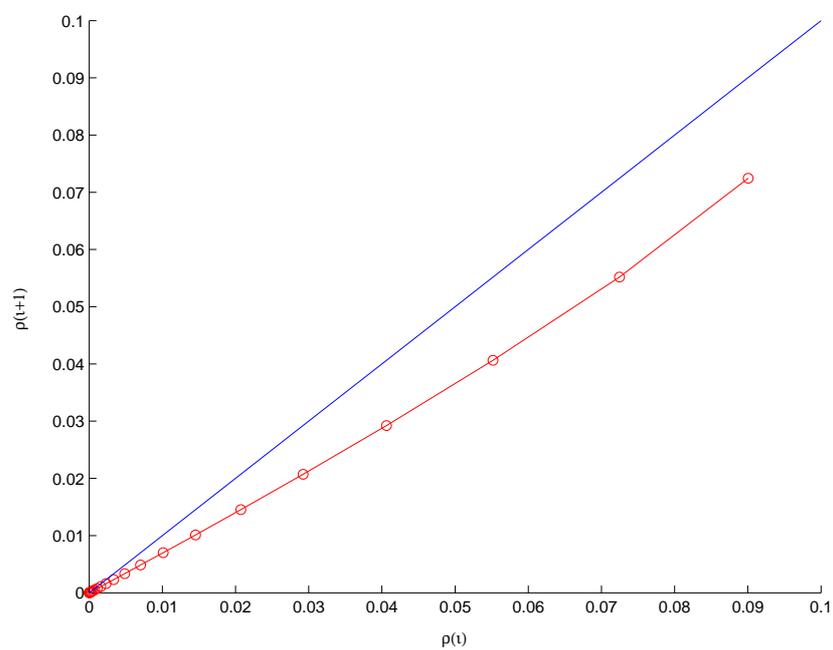
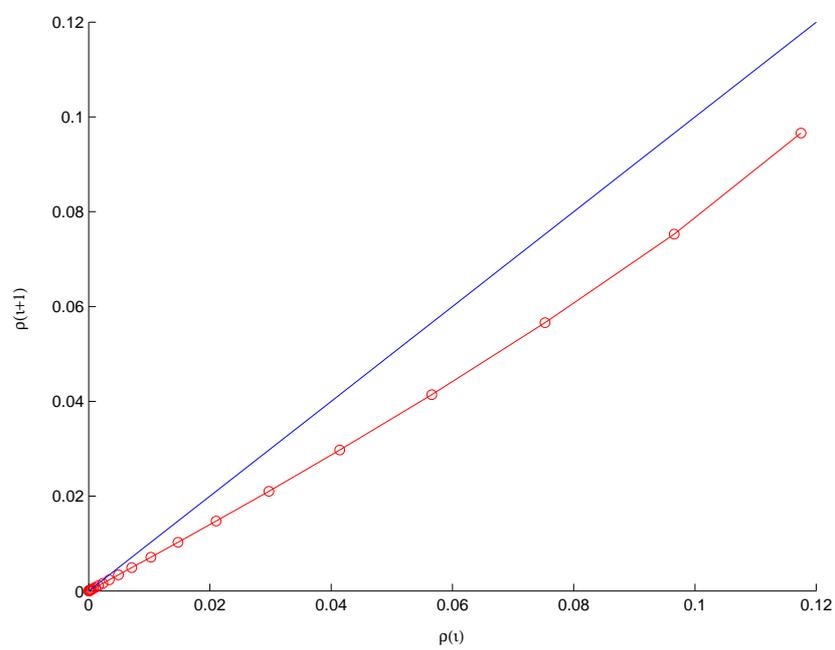
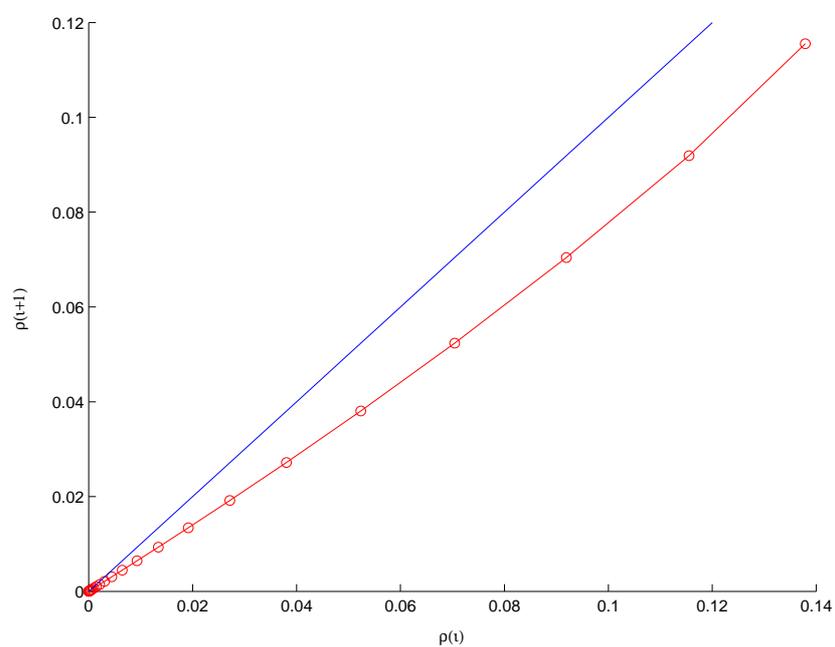
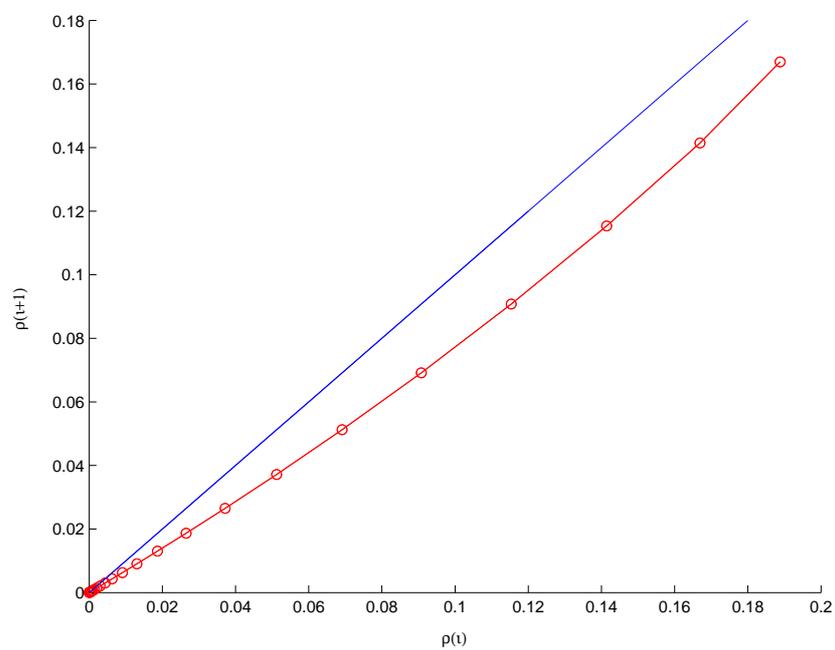
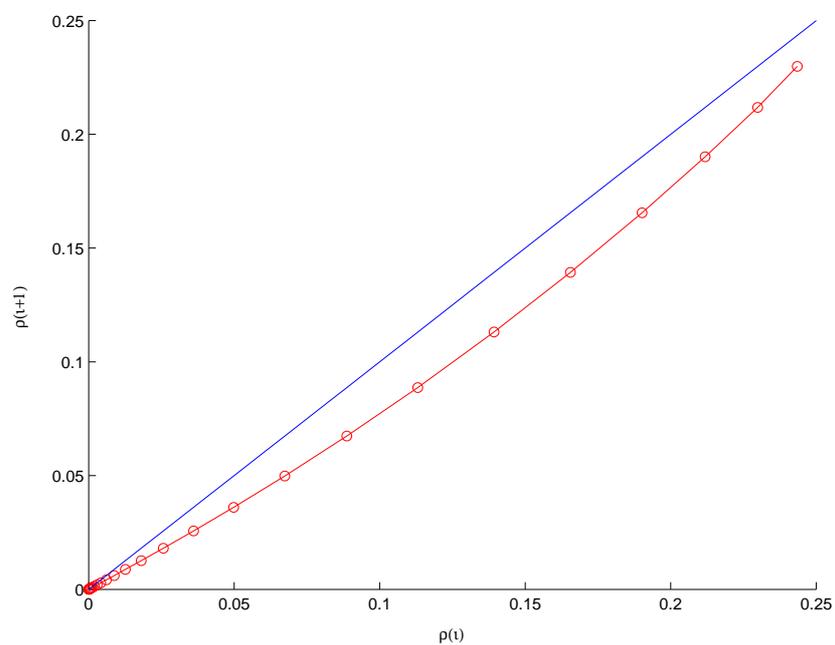
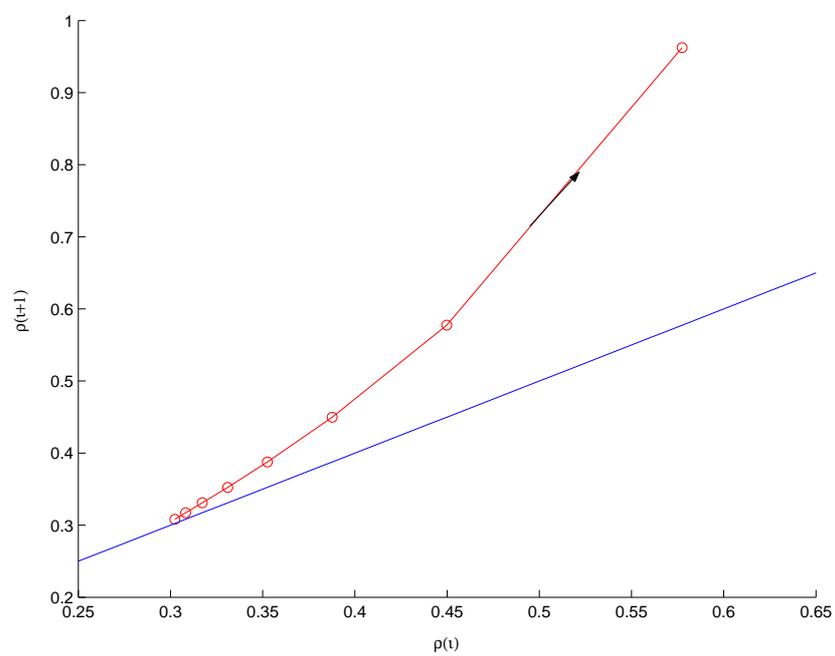


Figura 6.9: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

Figura 6.10: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.Figura 6.11: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

Figura 6.12: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.Figura 6.13: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.

Figura 6.14: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.Figura 6.15: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

En estas últimas gráficas se vuelve a corroborar la tendencia a una solución estable cuando nos movemos con valores iniciales de ρ inferiores a 0,2885.

6.2.2. Variaciones de la amplitud.

A continuación variamos el valor de la amplitud y procederemos a realizar el mismo análisis anterior. A continuación sólo mostramos los análisis realizados para dos únicos valores iniciales de ρ que creemos son los más representativos y además con $R = 0$, pero cabe indicar que este mismo análisis se realizó para un número considerable de valores de este parámetro.

Los gráficos mostrados en la sección anterior son para un valor de la amplitud igual a 0.19 y para un ρ inicial igual a 0.1, a continuación mostramos varias gráficas en la cual se mantiene este valor de ρ y se va variando la amplitud. Hemos de hacer notar que en todo este análisis estamos considerando movimiento plano. De las Figuras 6.16 a la 6.20 se muestran las evoluciones completas del péndulo, de la Figura 6.21 a la 6.25 se muestra la variación del parámetro ρ para los nuevos valores de amplitudes.

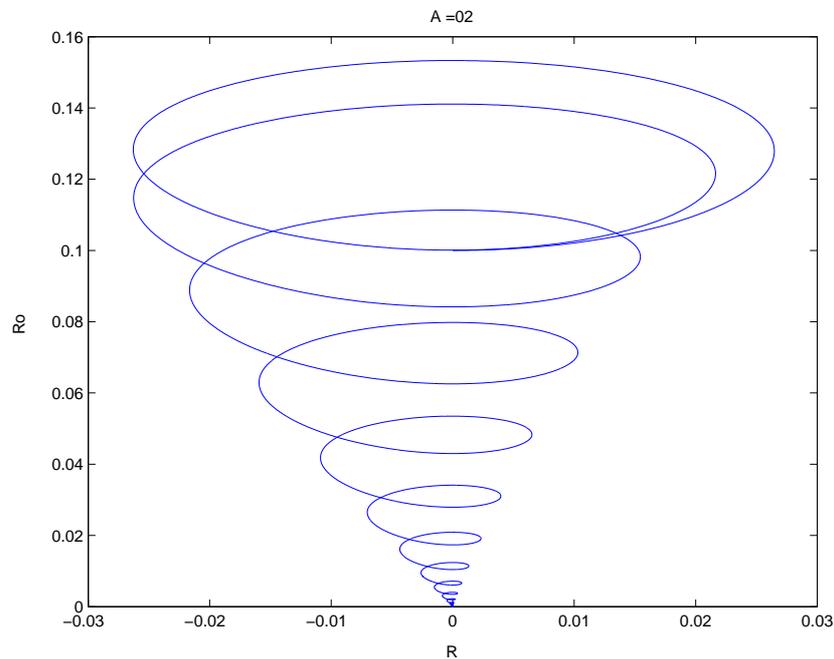
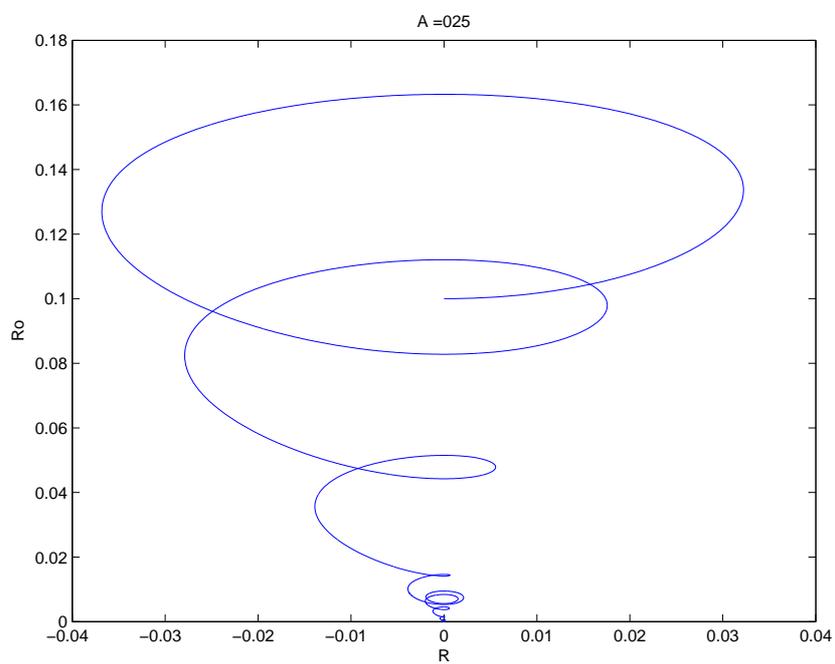
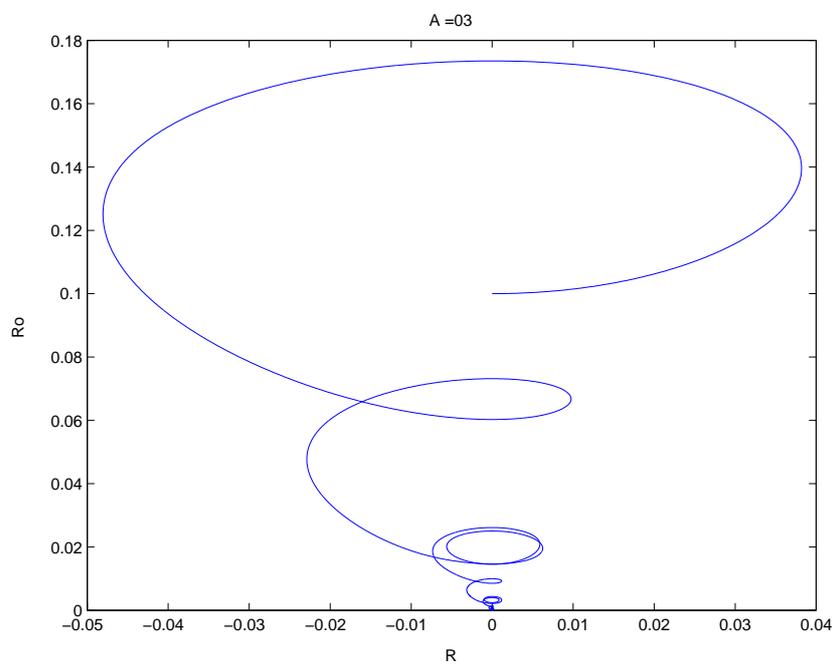
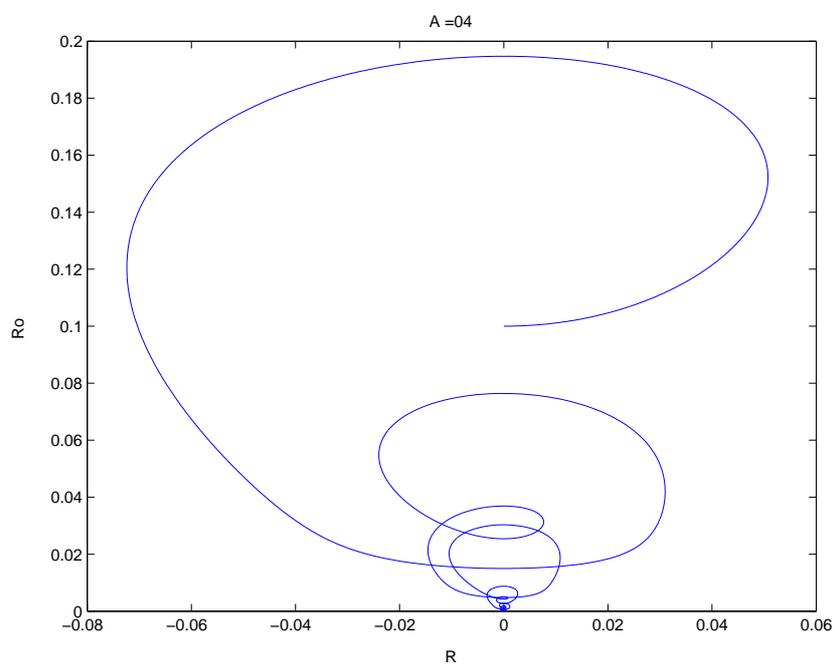
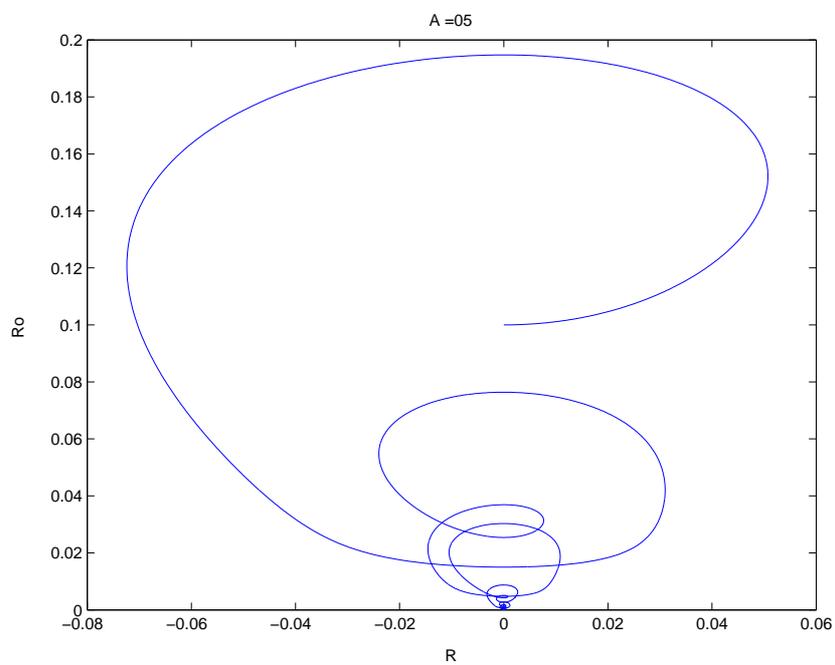
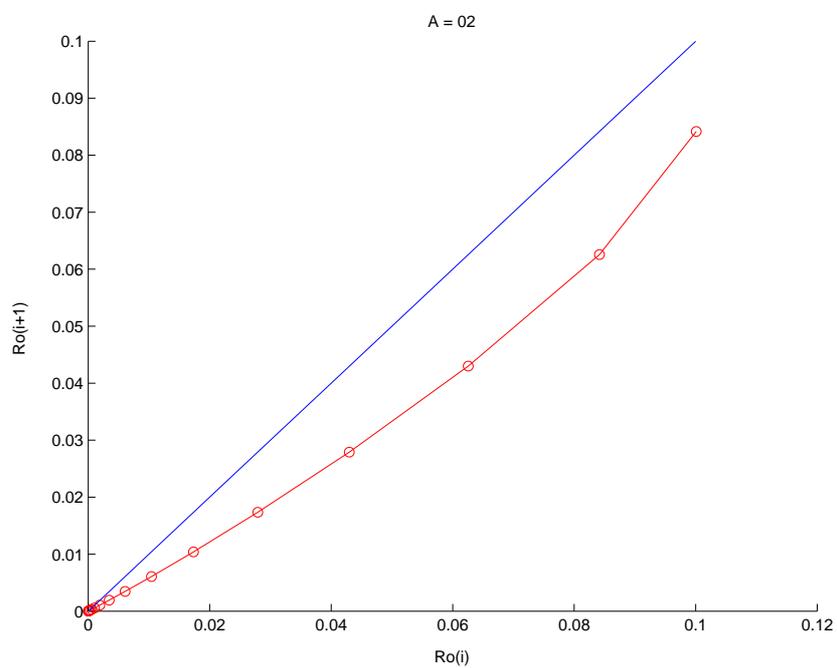
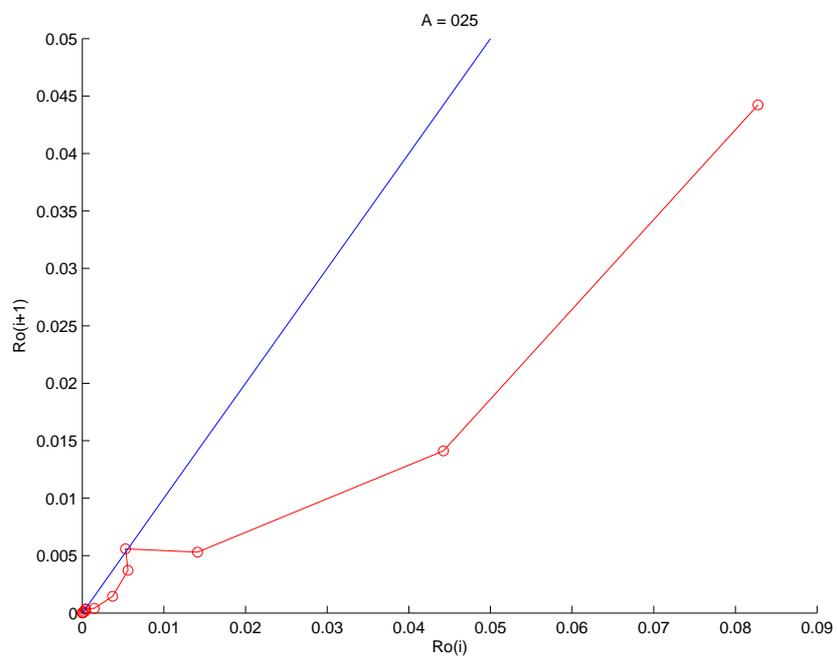
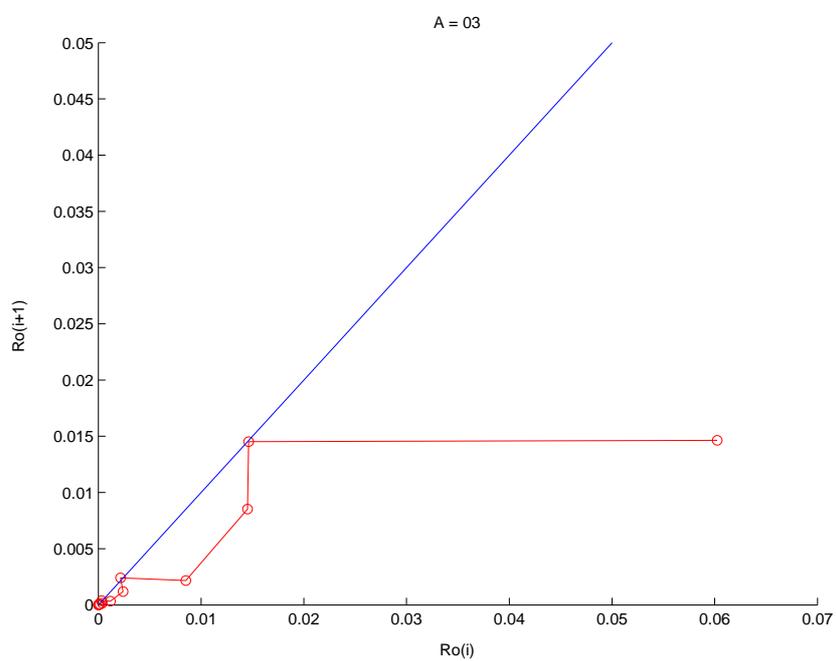
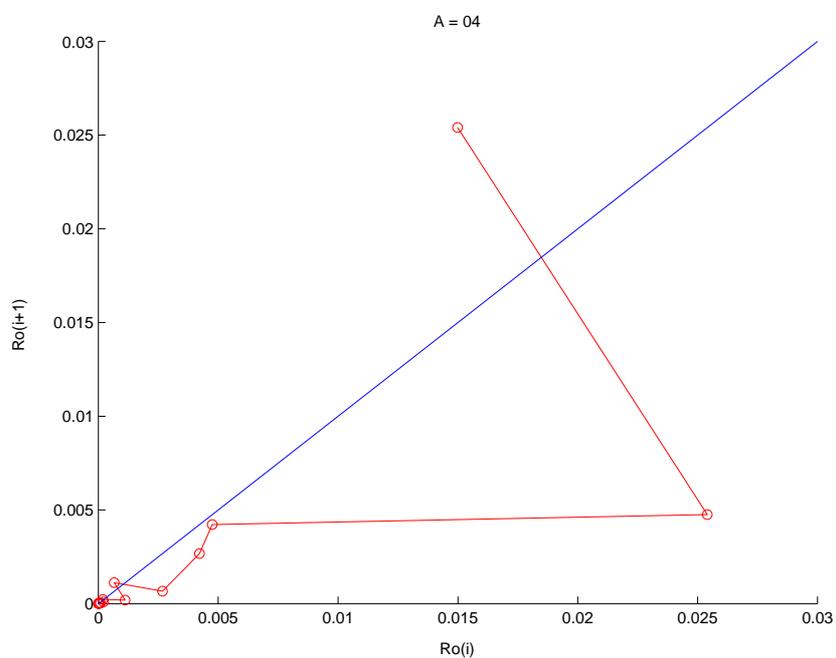


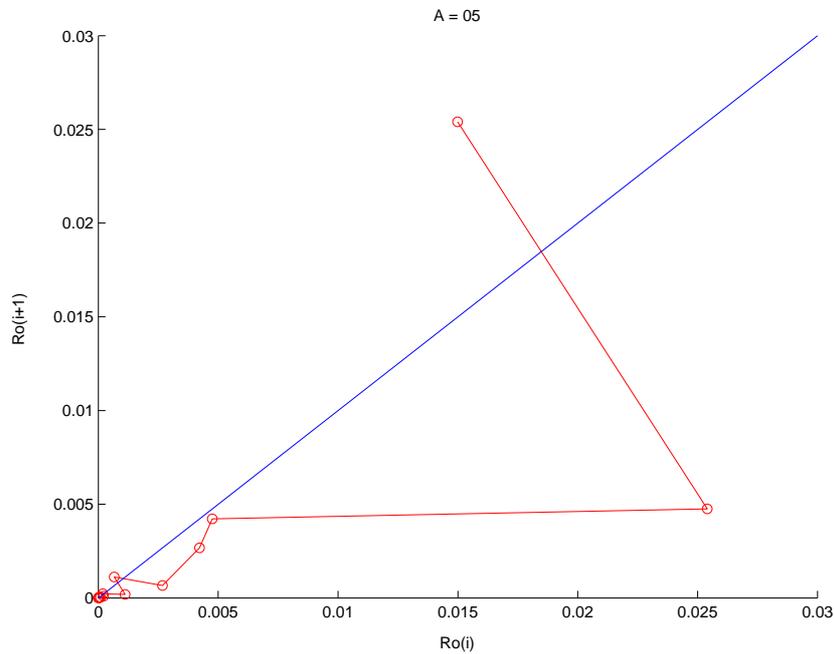
Figura 6.16: *Amplitud* = 0,2.

Figura 6.17: *Amplitud* = 0,25.Figura 6.18: *Amplitud* = 0,3.

Figura 6.19: *Amplitud* = 0,4.Figura 6.20: *Amplitud* = 0,5.

Figura 6.21: *Amplitud* = 0,2.Figura 6.22: *Amplitud* = 0,25.

Figura 6.23: *Amplitud* = 0,3.Figura 6.24: *Amplitud* = 0,4.

Figura 6.25: *Amplitud* = 0,5.

6.3. Problema espacial.

Una vez hemos visto como se comporta nuestro sistema cuando consideramos nulo el momento angular, pasamos a analizar los resultados cuando consideramos un momento angular no nulo.

Para ver el cambio de comportamiento del sistema vamos a analizar el sistema en varias situaciones posibles. primeramente vamos a partir de un momento angular pequeño para ver las modificaciones que esto implica en el sistema y posteriormente analizaremos el sistema para valores mayores de momento angular.

6.3.1. Momento angular inicial $\Theta = 0,002$

Evolución de ρ .

Inicialmente representamos en Dynamic Solver la evolución de la variables ρ , así los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

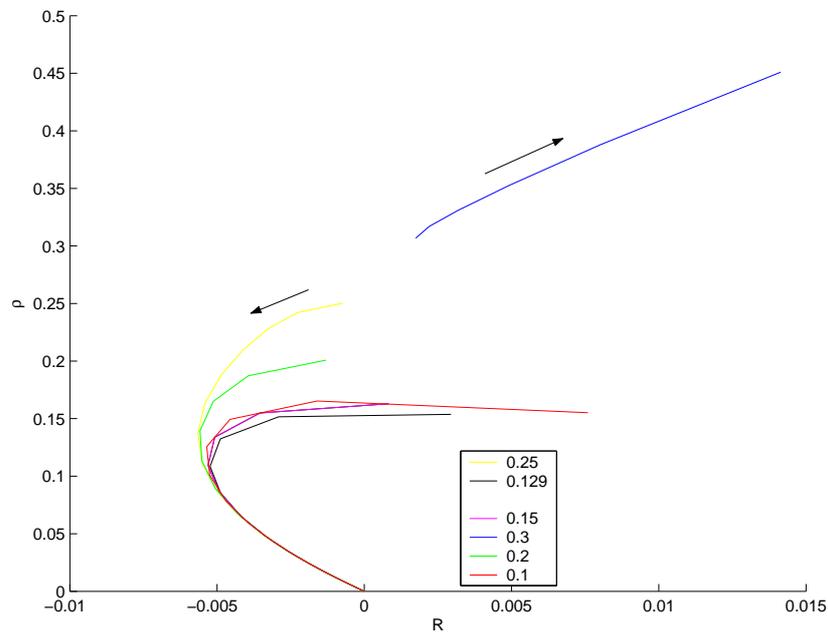


Figura 6.26: Evolución de $\rho - R$.

En la Figura 6.26 podemos observar como existe un punto de silla que nos indica el salto de la solución estable a la solución inestable tal como ocurría en el caso sin fricción. Este cambio se localizó tanto para valores de ρ mayores a 0,281 como para valores inferiores a 0,05999. Estas soluciones a las que nos referimos corresponden a la posición en la cual el péndulo queda en posición vertical y a aquella situación en la que el péndulo queda oscilando en un plano.

Para poder ver más claramente la influencia del parámetro sobre nuestro problema y poder ver de una forma más clara la evolución del péndulo, se realizaron diversos experimentos en los no se representan sólo los valores dados por las secciones de Poincaré sino que se hace una evolución completa de los mismos. En esta nueva situación los resultados obtenidos se representan, para alguno de los valores analizados, en las Figuras 6.27 a la 6.33.

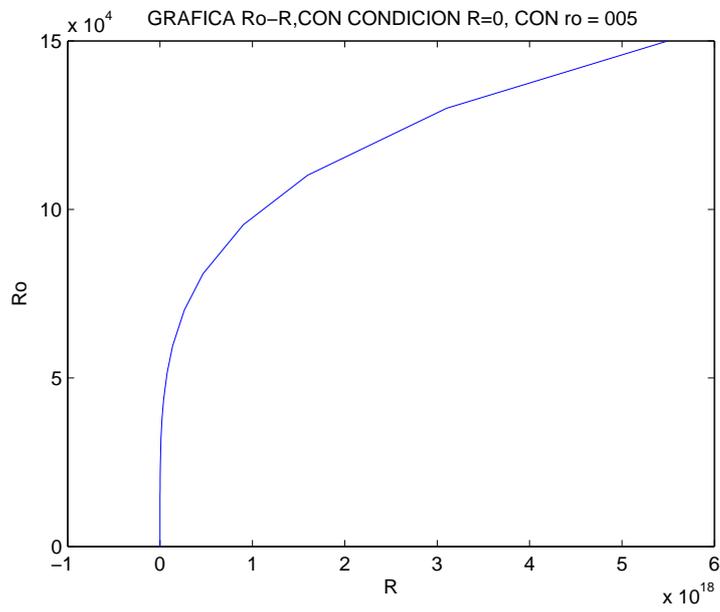


Figura 6.27: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

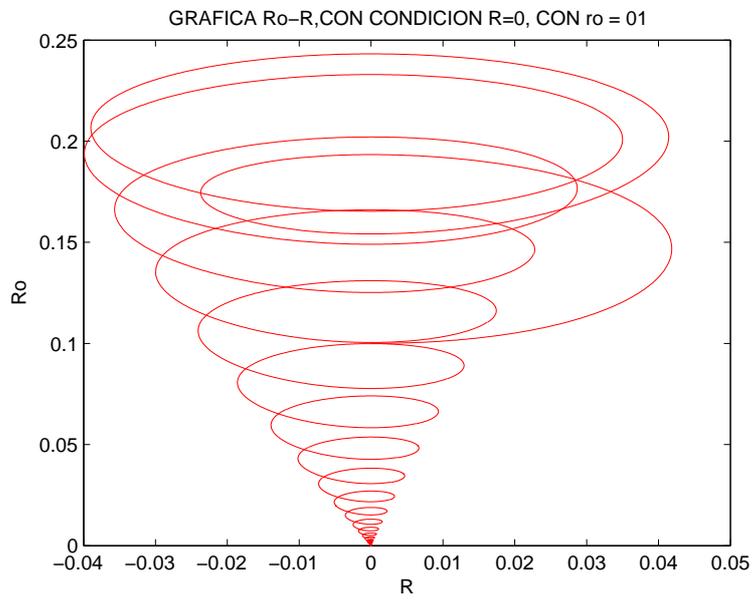
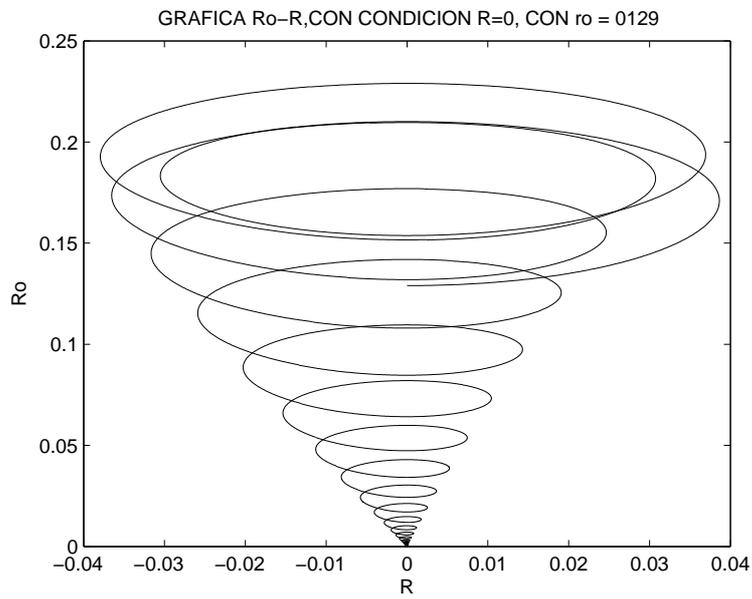
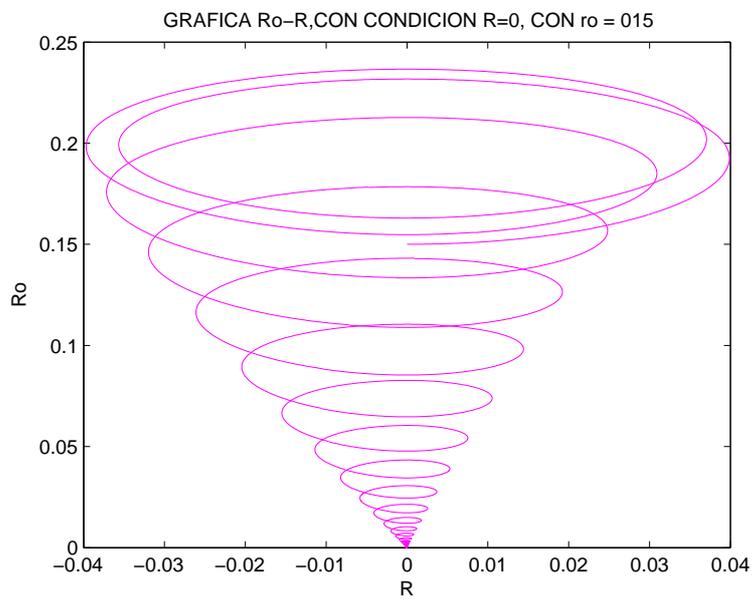
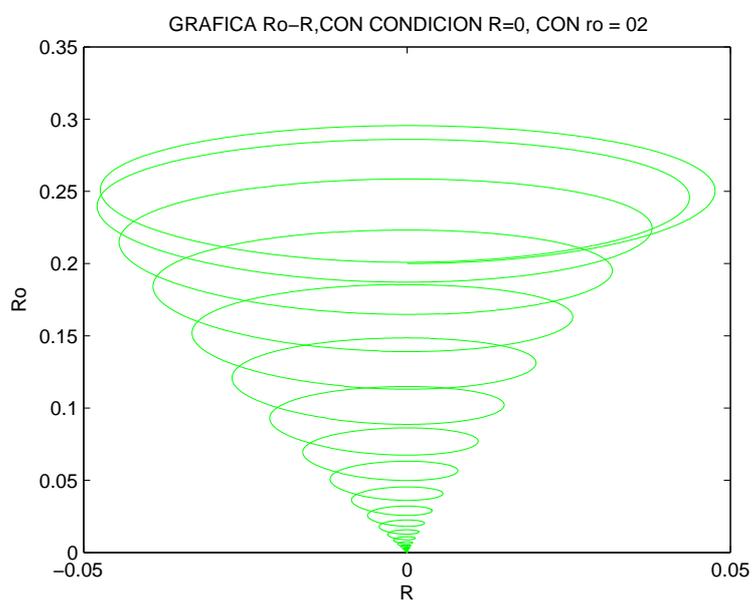
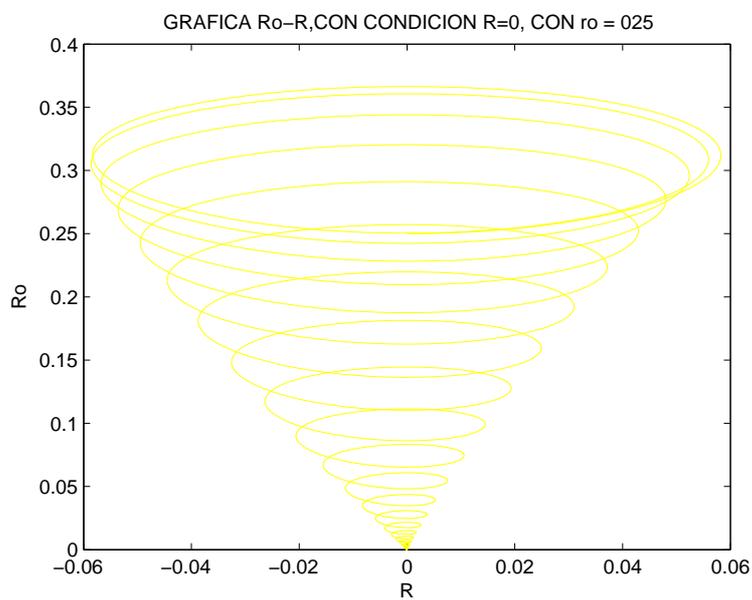
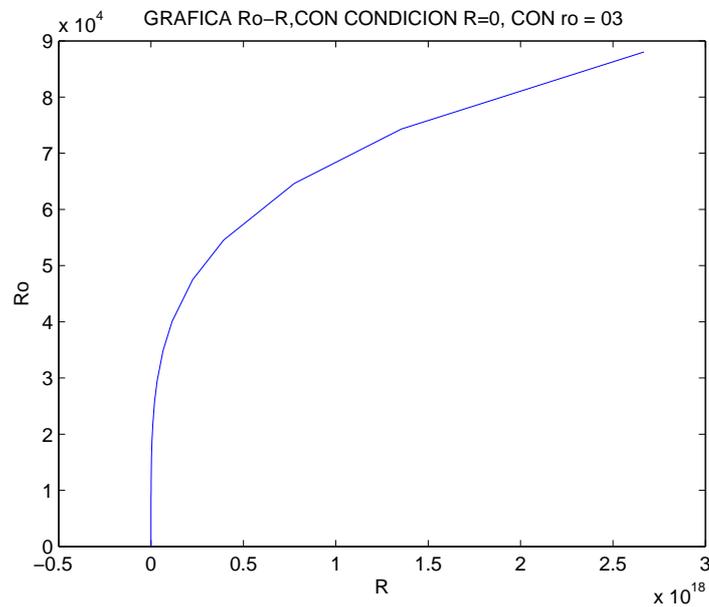


Figura 6.28: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.

Figura 6.29: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.Figura 6.30: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.

Figura 6.31: Condición inicial $\rho_0 = 0,2$.Figura 6.32: Condición inicial $\rho_0 = 0,25$.

Figura 6.33: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

En las figuras anteriores se puede observar como para valores de ρ comprendidos entre 0,0599 y 0,281 el péndulo tiende a buscar la solución de equilibrio, mientras que para valores fuera de este rango se dispara a infinito.

Por último para observar la evolución de este parámetro realizamos un seguimiento del mismo representándolo frente a él mismo en un instante posterior, para poder seguir su tendencia, esto queda reflejado en las Figuras 6.34 a 6.40.

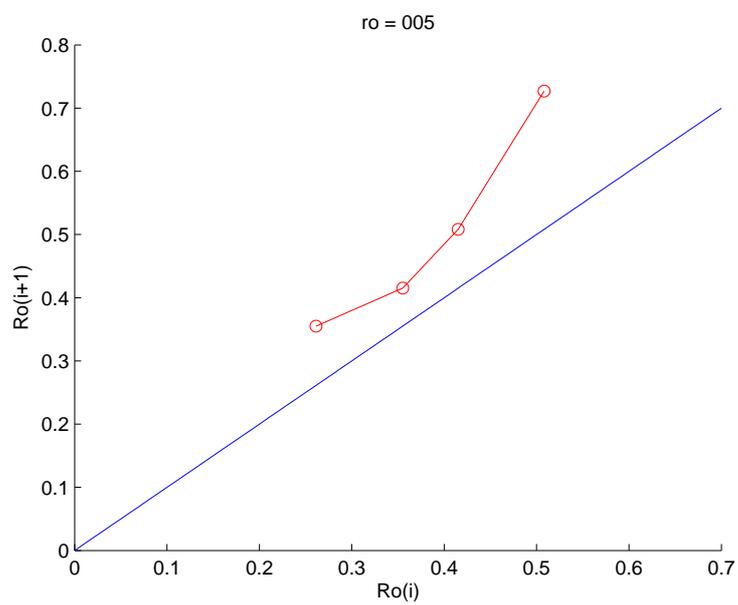


Figura 6.34: Condición inicial $\rho_0 = 0,05$.

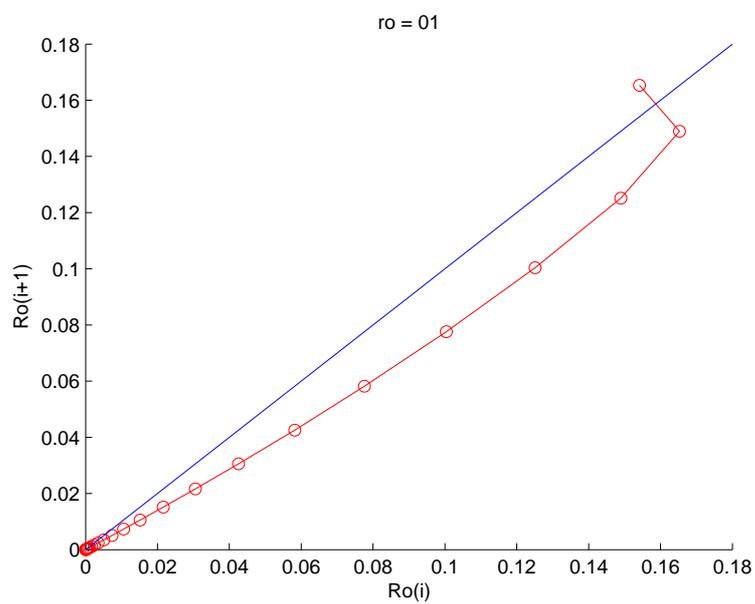


Figura 6.35: Condición inicial $\rho_0 = 0,1$.

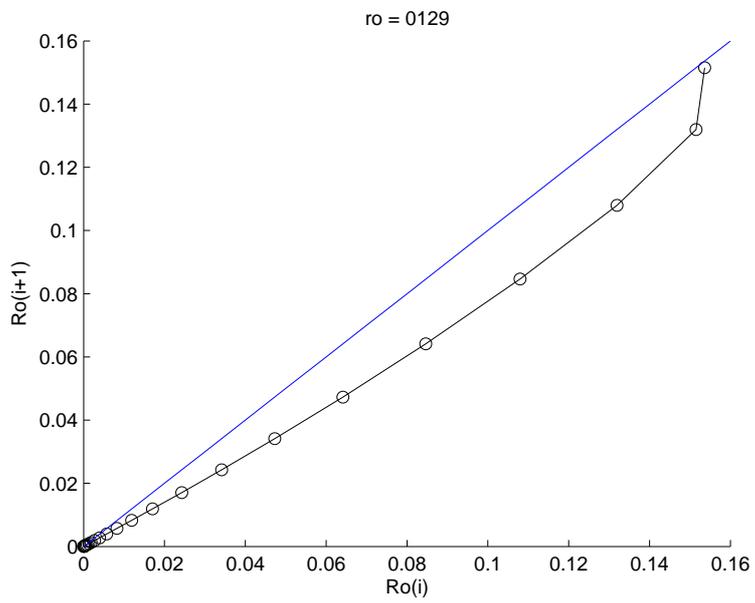


Figura 6.36: Condición inicial $\rho_0 = 0,129$.

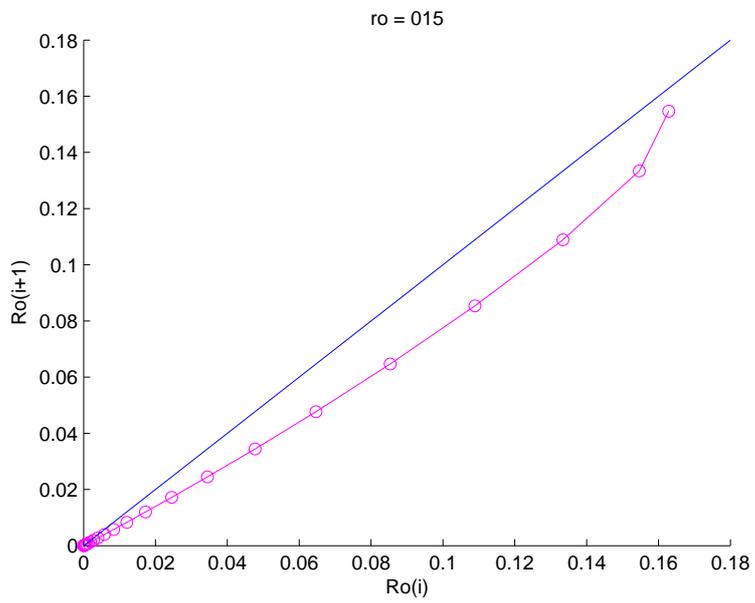
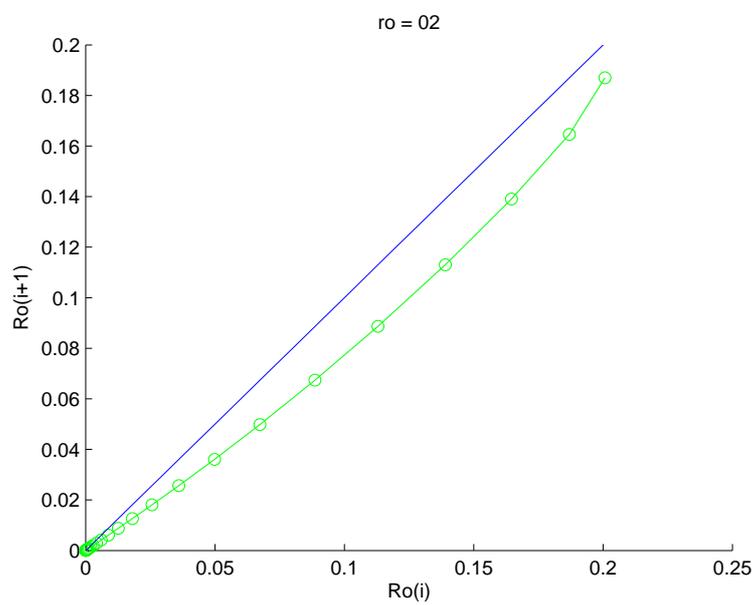
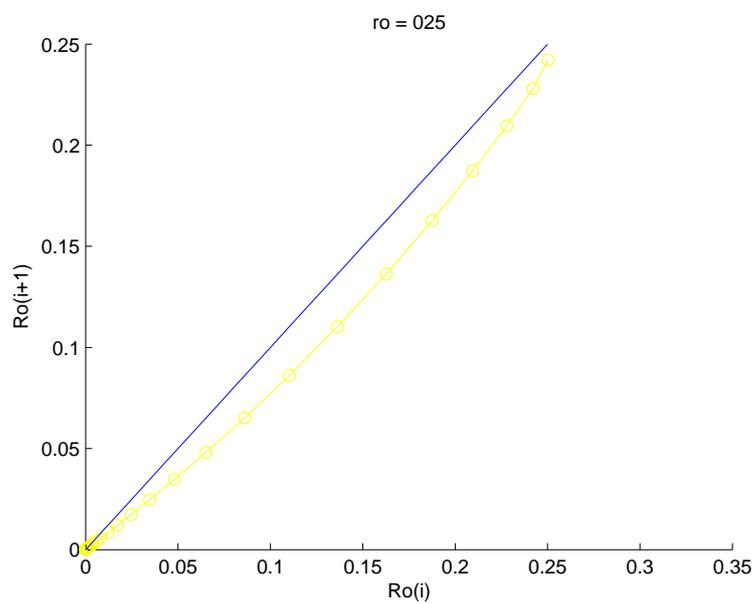


Figura 6.37: Condición inicial $\rho_0 = 0,15$.

Figura 6.38: Condição inicial $\rho_0 = 0,2$.Figura 6.39: Condição inicial $\rho_0 = 0,25$.

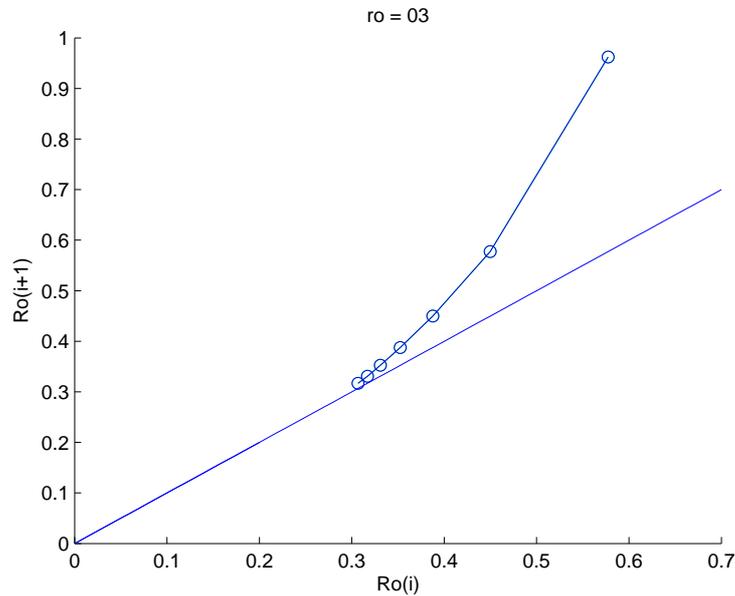


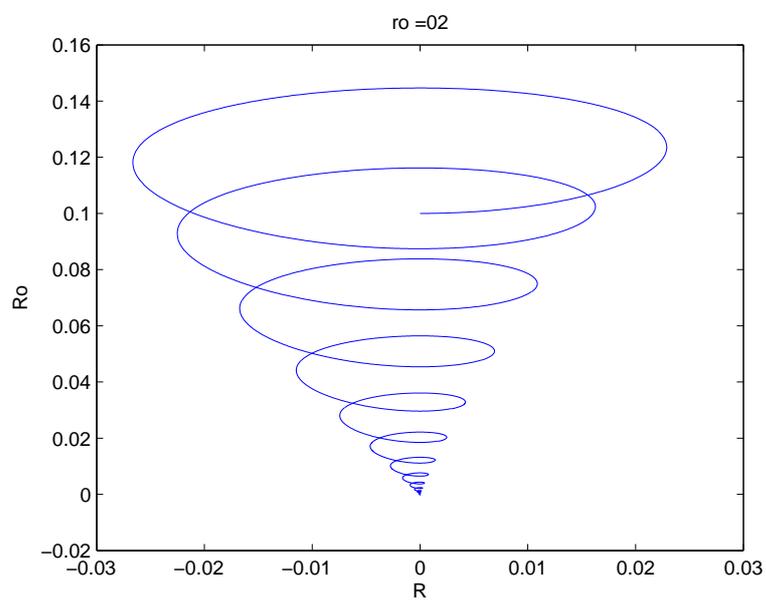
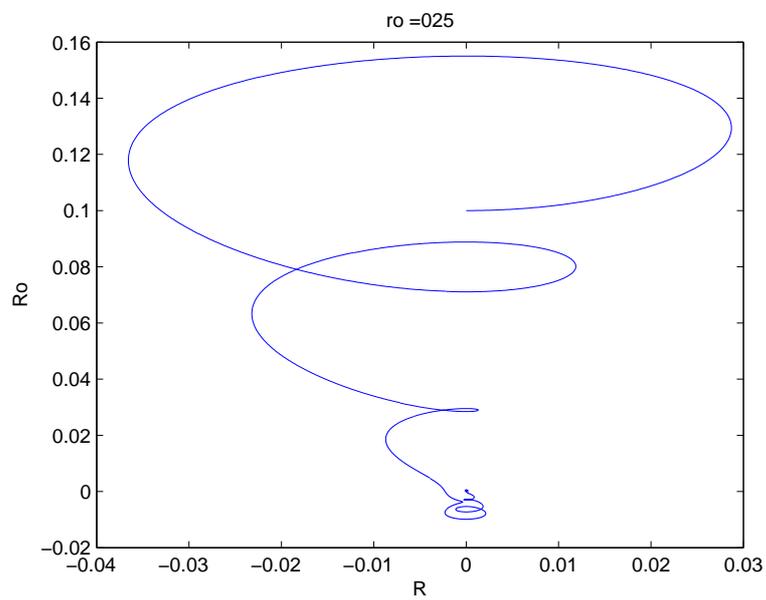
Figura 6.40: Condición inicial $\rho_0 = 0,3$.

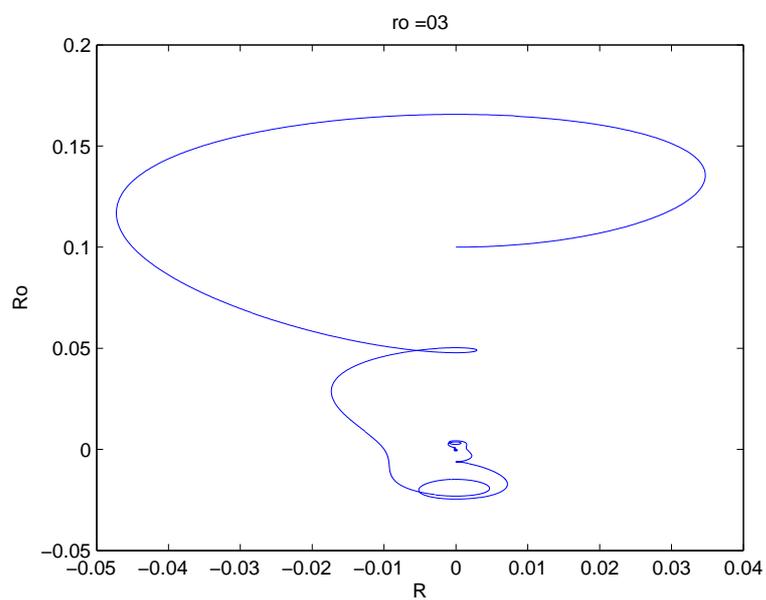
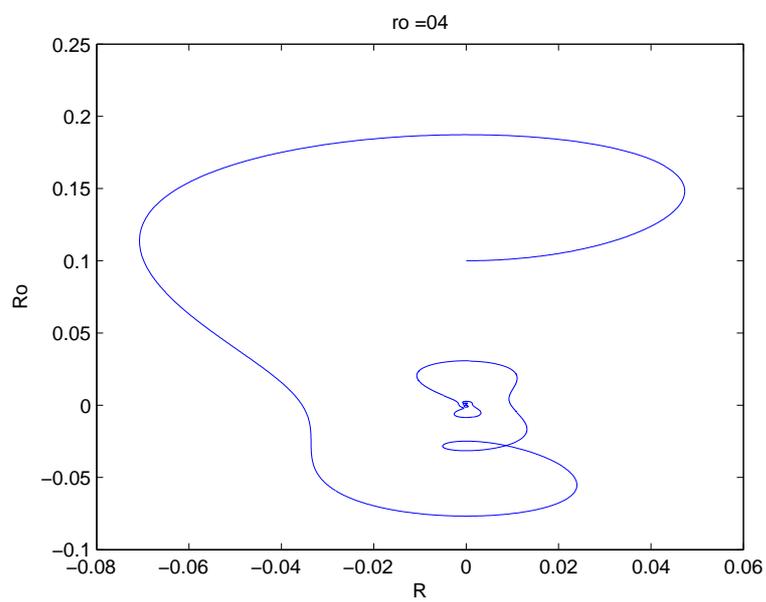
En estas últimas gráficas se vuelve a corroborar la tendencia a una solución estable cuando nos movemos en el intervalo 0,0599 a 0,281.

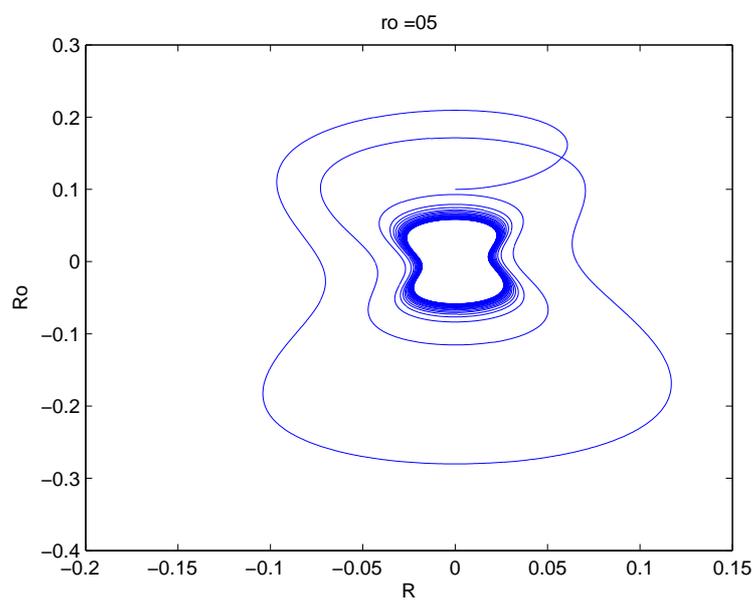
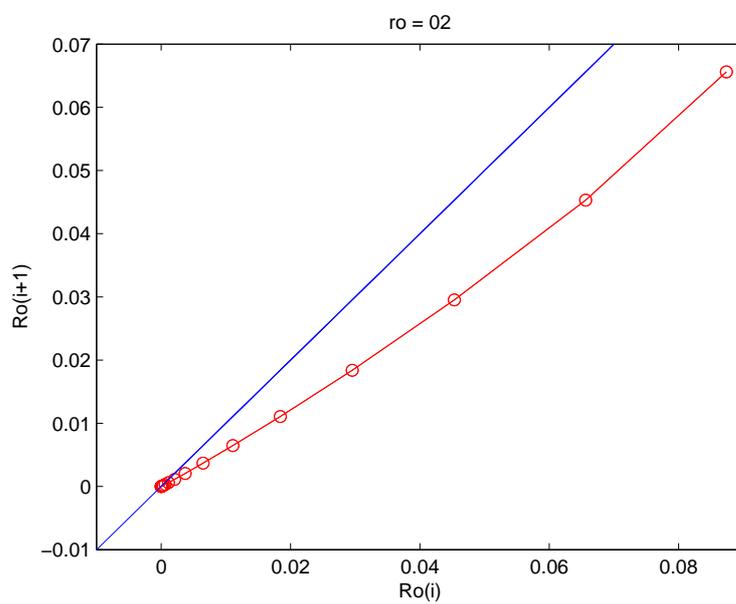
Variaciones de la amplitud.

A continuación variamos el valor de la amplitud y procederemos a realizar el mismo análisis anterior. A continuación sólo mostramos los análisis realizados para dos únicos valores iniciales de ρ que creemos son los más representativos, pero cabe indicar que este mismo análisis se realizó para un número considerable de valores iniciales de este parámetro.

Los gráficos mostrados en la sección anterior son para un valor de la amplitud igual a 0.19 y para un ρ inicial igual a 0.1, a continuación mostramos varias gráficas en la cual se mantiene este valor inicial de ρ y se va variando la amplitud. Además para ver más claros los resultados partiremos de un momento angular inicial muy reducido de 0.002. De las Figuras 6.41 a la 6.45 se muestran las evoluciones completas del péndulo, de la Figura 6.46 a la 6.50 se muestra la variación del parámetro ρ para los nuevos valores de amplitudes.

Figura 6.41: *Amplitud* = 0,2.Figura 6.42: *Amplitud* = 0,25.

Figura 6.43: *Amplitud = 0,3.*Figura 6.44: *Amplitud = 0,4.*

Figura 6.45: *Amplitud = 0,5.*Figura 6.46: *Amplitud = 0,2.*

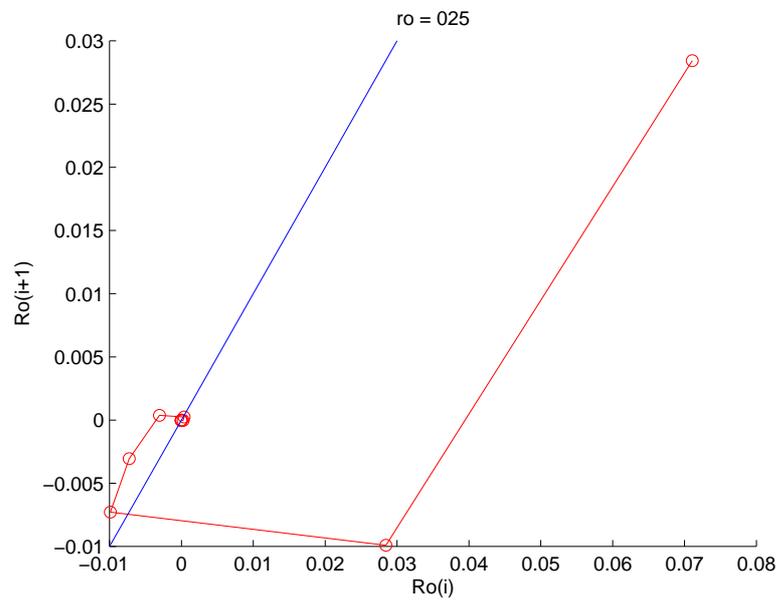


Figura 6.47: *Amplitud* = 0,25.

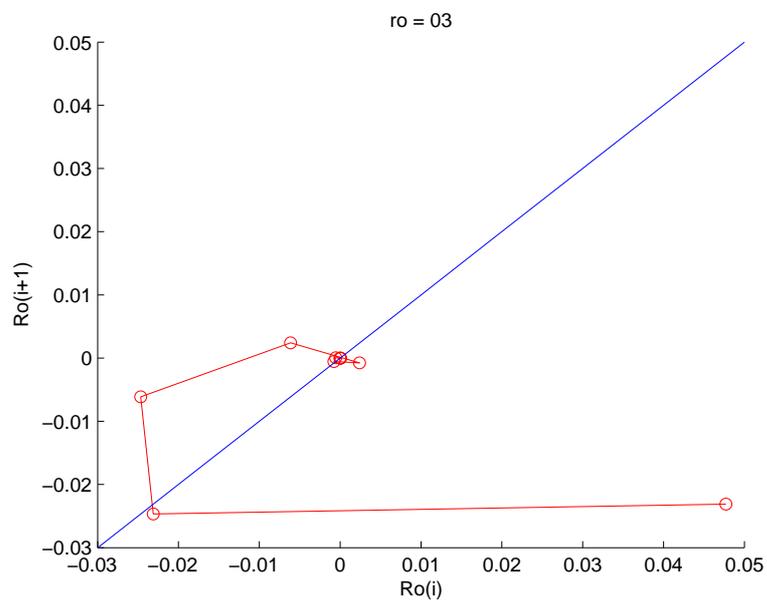


Figura 6.48: *Amplitud* = 0,3.

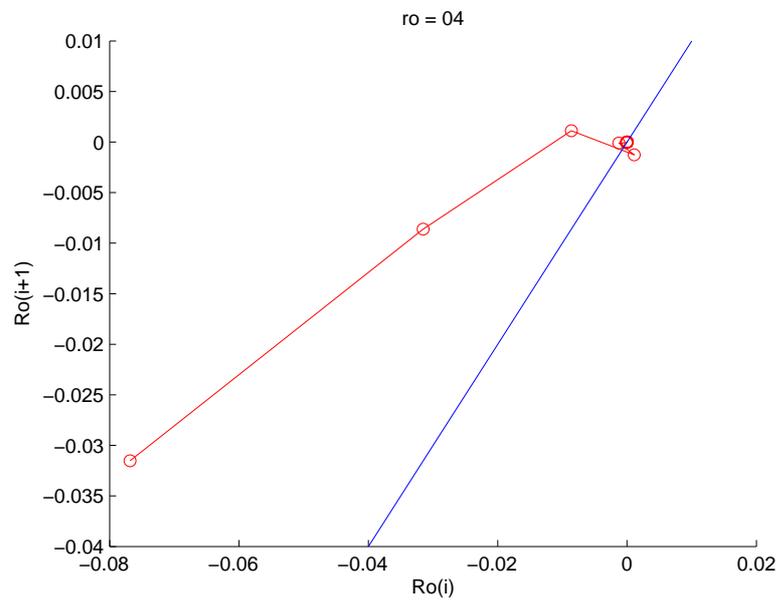


Figura 6.49: *Amplitud* = 0,4.

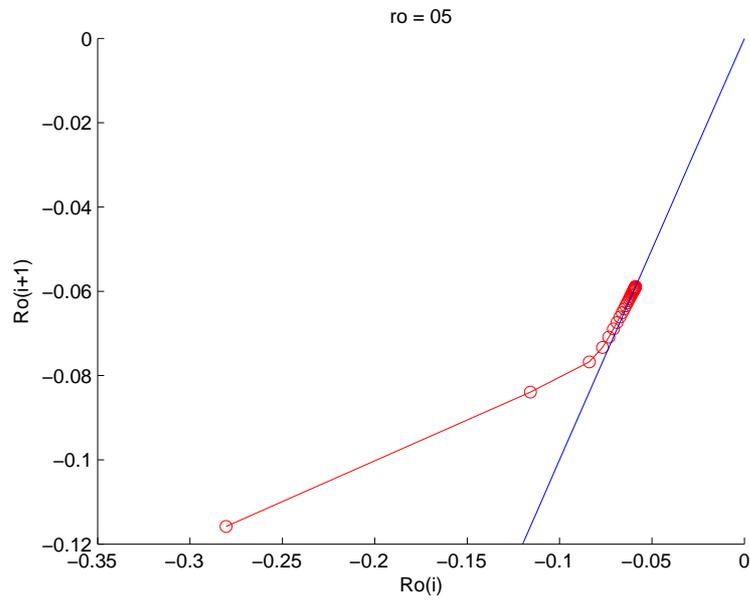


Figura 6.50: *Amplitud* = 0,5.

En estos resultados es donde se pone de manifiesto la existencia de las dos soluciones que planteábamos al principio de este documento, así podemos ob-

servar que para amplitudes menores a 0.05 la solución a la que tiende nuestro sistema es a la solución en el punto inicial que correspondería a la posición vertical del péndulo, y para amplitudes mayores a este valor podemos observar como tendemos a una solución oscilatoria. Para ver más claramente este fenómeno vamos a representar las secciones de Poincaré para una amplitud de 0.05 en la cual observamos claramente esta situación oscilatoria entorno al eje vertical. Esto puede observarse en la Figura 6.51.

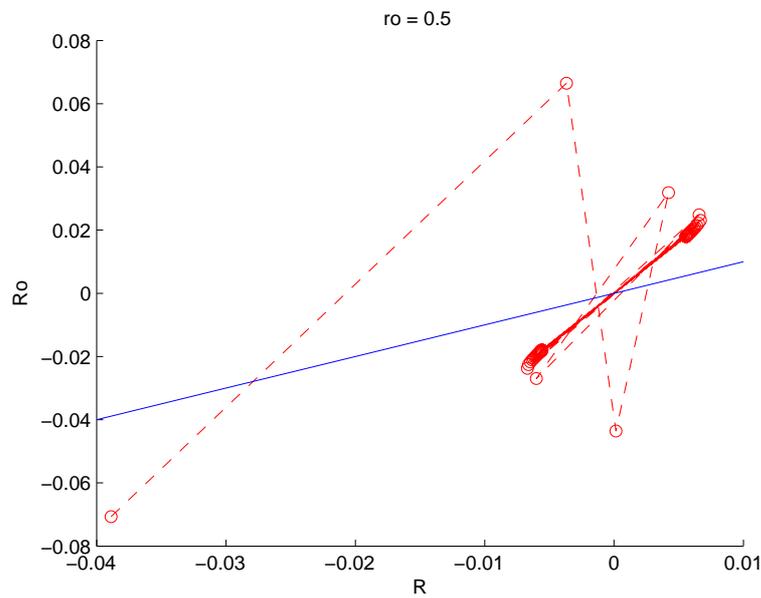


Figura 6.51: *Amplitud* = 0,5.

6.3.2. Momento angular inicial $\Theta = 0,005$.

A modo de resumen mostramos sólo las gráficas correspondientes a dos amplitudes, $A = 0,4$ y $A = 0,5$, y para un único valor de $\rho = 0,1$.

Amplitud 0.4

Tomando como valor de $\rho = 0,1$, de momento angular inicial 0.005 y como amplitud 0.4 , obtenemos el siguiente resultado:

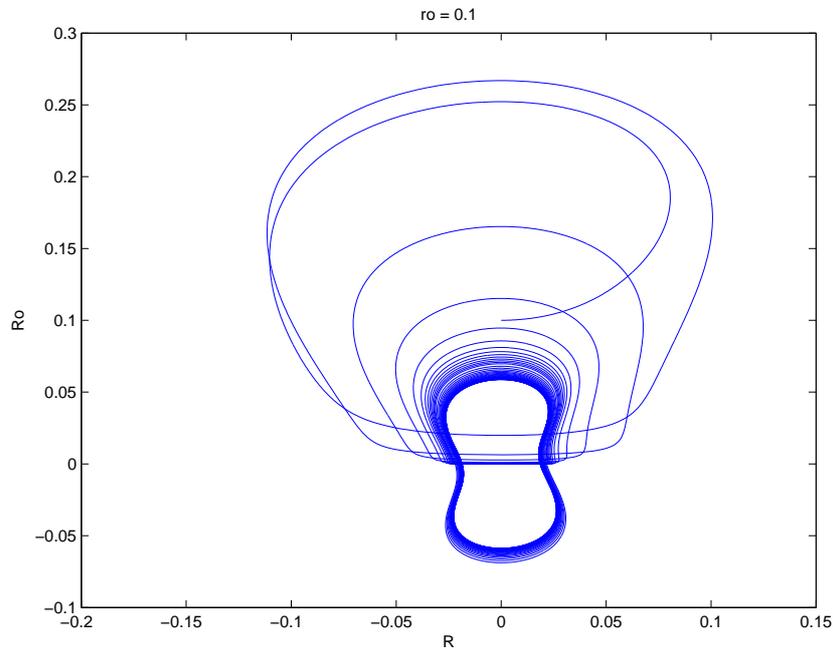


Figura 6.52: *Amplitud = 0,4*.

Amplitud 0.5

Tomando como valor de $\rho = 0,1$, de momento angular inicial 0.005 y como amplitud 0.5, obtenemos el siguiente resultado:

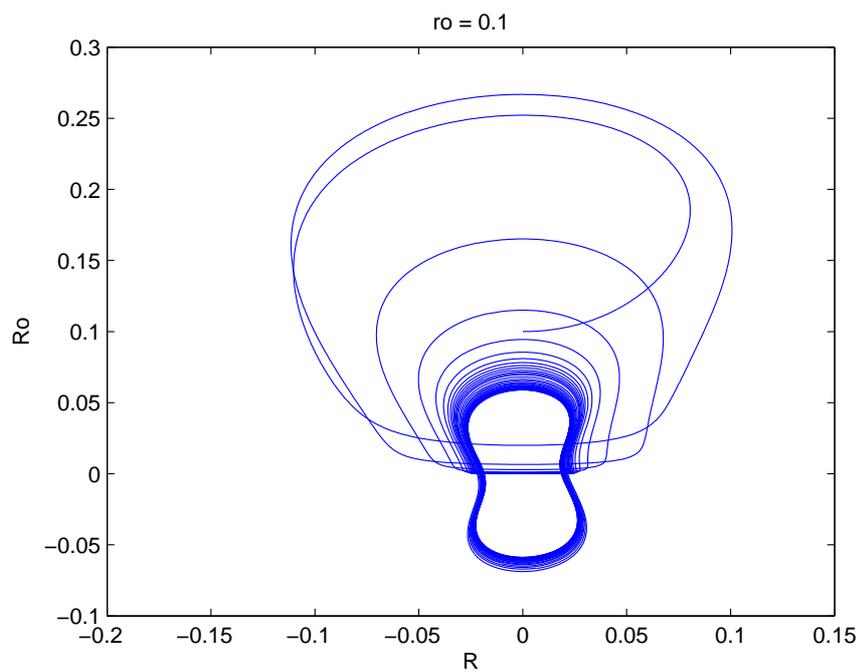
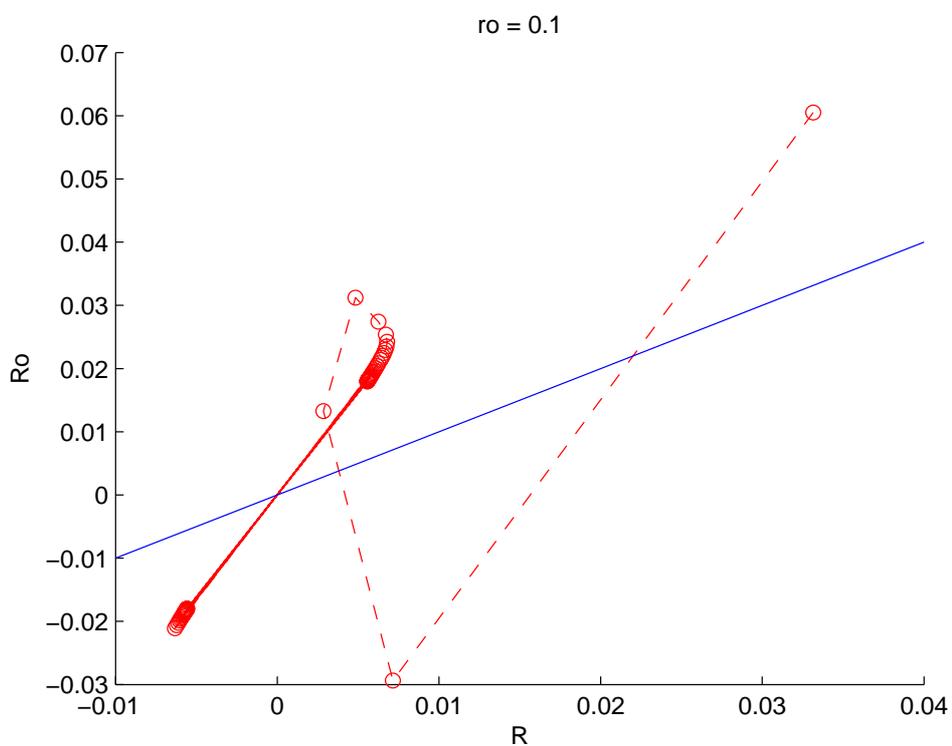


Figura 6.53: *Amplitud = 0,5*.

Para verlo de una forma más clara representamos a continuación la secciones de Poincaré para este último caso.

Figura 6.54: *Amplitud = 0,5.*

Aquí podemos observar la misma tendencia hacia la solución vibratoria que vimos para el caso en el que el momento angular inicial era nulo.

6.3.3. Momento angular inicial $\Theta = 0,01$.

Igualmente representamos la evolución para una amplitud de $A = 0,5$ y para un único valor de $\rho = 0,1$ ya que los resultados obtenidos son casi análogos al caso anteriormente mostrado.

Obtenemos el siguiente resultado:

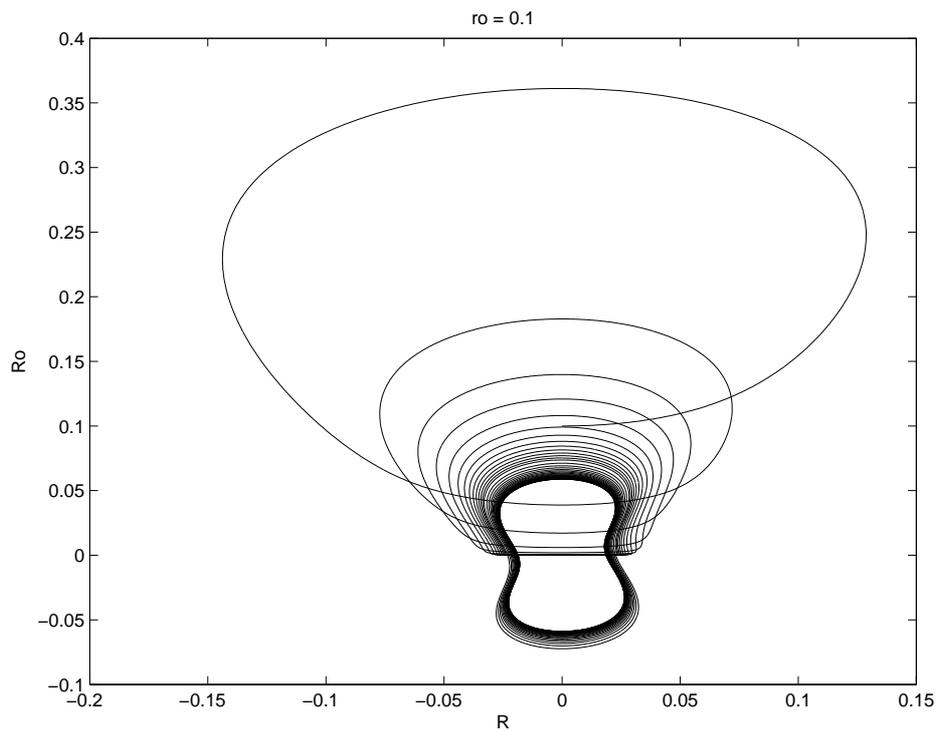


Figura 6.55: *Amplitud = 0,5.*

Capítulo 7

Conclusiones.

El objetivo para el cual se adjudicó este proyecto tenía dos partes bien diferenciadas. Por un lado se pretendía analizar la estabilización de la posición invertida del péndulo esférico sometido a vibración del punto de apoyo, y por otro lado se pretendía buscar los comportamientos periódicos en las cercanías de la posición invertida.

A continuación expondremos los resultados a los cuales se han llegado:

Como datos de partida se tenían los resultados de este mismo sistema pero sin tener en cuenta la fricción con el aire. En este caso fue posible estabilizar el péndulo en su movimiento tridimensional y encontrar el diagrama de bifurcaciones de la continuación en Θ .

El diagrama de bifurcaciones de la continuación en Θ que se obtuvo fue el que viene representado en la Figura 7.1, el cual se muestra a continuación.

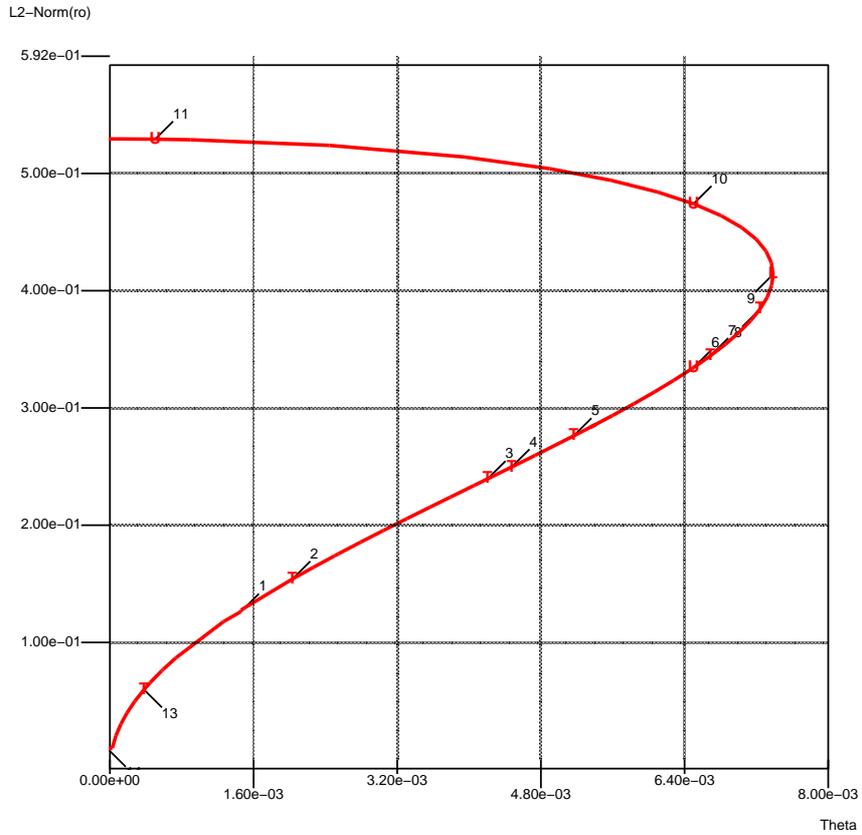


Figura 7.1: Conjunto de bifurcaciones de la continuación en Θ para $A=0.19$ y $\mu = 0,01$.

También fue posible estudiar la variación del punto de cambio de estabilidad, realizando una continuación de dicho punto en dos parámetros (A y Θ). Como puede verse en la siguiente figura:

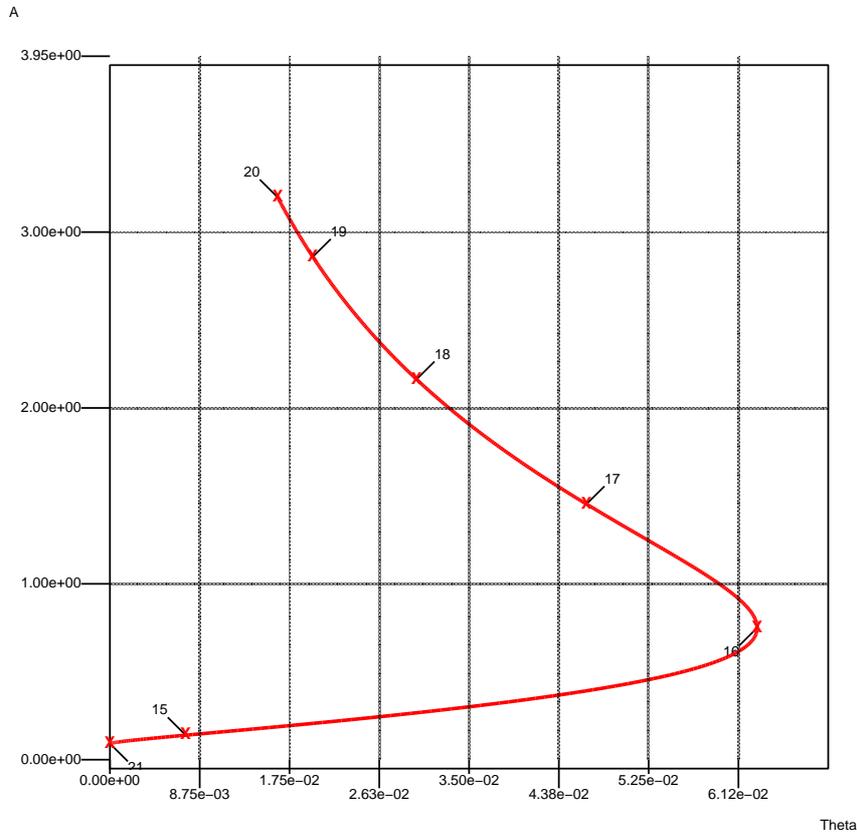


Figura 7.2: Variación del LP con Θ y A .

Era por esto comprensible prever unos resultados parecidos para nuestro caso en cuestión. Sin embargo y en contra de todas las previsiones el sistema se ha demostrado que se comporta de una forma totalmente distinta a lo que se preveía.

En el caso sin fricción se demostró que era posible estabilizar el péndulo en torno a su posición vertical, sin embargo en nuestro caso con fricción se ha comprobado que sólo es posible mantener en equilibrio nuestro péndulo justo en su posición vertical o bien en un plano una vez se extinga el movimiento circular. Esto último se debe a la forma de la ecuación de movimiento (4.16).

$$\dot{\Theta} = -\frac{c}{m}\Theta$$

Al ser esta una ecuación decreciente es imposible conseguir que el sistema se estabilice girando. Es por tanto esta ecuación la responsable de que el sistema se vaya parando hasta quedarse en un plano en el cual ya si se pueda estabilizar aplicando la vibración en la base del péndulo. Este comportamiento lo podemos observar en la figura siguiente:

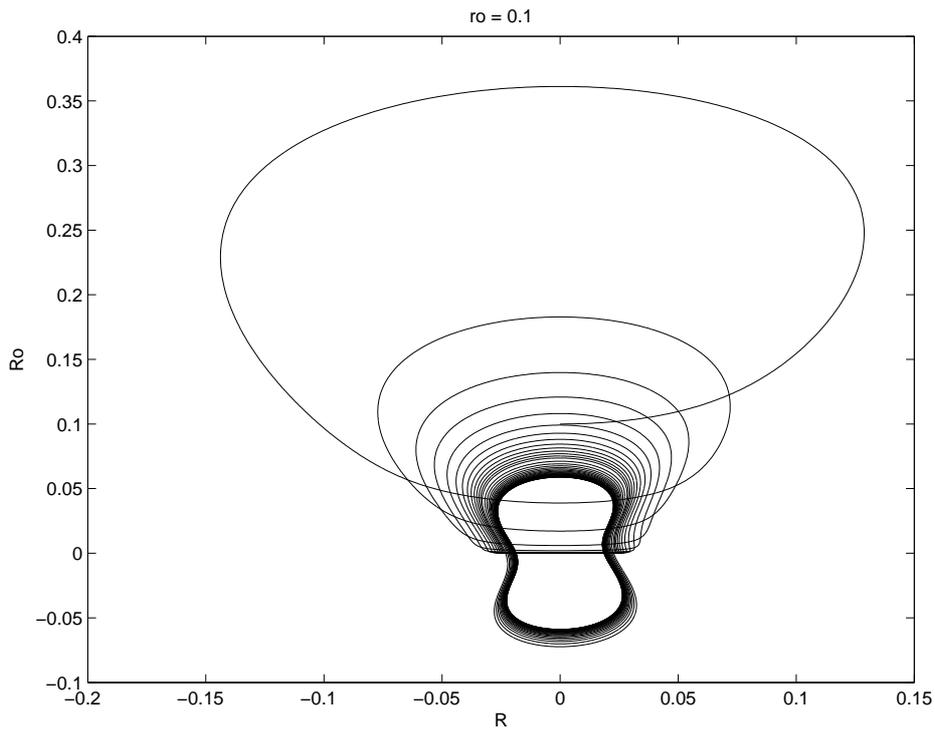


Figura 7.3: *Amplitud = 0,5.*

Aquí puede observarse como el sistema comienza girando hasta que se para en un plano donde se estabiliza entorno a la posición vertical en una oscilación periódica.

Bibliografía

- [1] Sánchez Aguilera, G.: **Estabilización del péndulo esférico invertido mediante vibración del punto de apoyo (Proyecto fin de carrera).**
- [2] Acheson, D.: **From Calculus to Chaos. An Introduction to Dynamics, Oxford University Press.**
Oxford, 1997.
- [3] Lopez Moreno, A.: **Estabilización del péndulo invertido mediante soporte elástico.**
Universidad de Sevilla, Sevilla, 2001
- [4] Pérez Ibañez, M.: **Estudio de la estabilidad de un sistema mecánico autoparamétrico de dos grados de libertad.**
Universidad de Sevilla, Sevilla, 2004
- [5] Rañada, A.: **Dinámica Clásica.**
Alianza Universidad Textos
- [6] Pereira Álvarez, S.: **Estudio de la dinámica de un péndulo esférico en rotación.**
Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003
- [7] Doedel, E.J.; Paffenroth, R.; Champneys, A.; **Auto2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations.**
Junio 2002
- [8] Cascales, B.; Lucas, P.; Mira, J.M.; Pallarés, A.; Hayna I.; Schlegl E.: **Una descripción de \LaTeX 2.**
Noviembre 1998
- [9] Kopka, H.; Daly, P.W.: **A guide to \LaTeX . Document preparation for beginners and advanced Users.**
Edition. Addison.Wesley, 1999.
- [10] Aguirregabiria, Juan M.: **Manual de Dynamics Solver**