

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se estudia el efecto que la resonancia produce en un sistema dinámico conservativo, formado por dos péndulos acoplados mediante un mecanismo biela-manivela.

Una razón de ser de las matemáticas aplicadas es el aporte que brindan, con apoyo de las ecuaciones diferenciales, a una extensa variedad de situaciones de las ciencias en sus distintas disciplinas clasificadas como ciencias naturales. Dentro de éstas podemos mencionar a las biológicas, químicas y económicas; aunque nos referimos, con especial énfasis por su valiosa aportación sobre la tecnología, a la física. Es en esta última área en donde regularmente se encuentran algunos fenómenos mecánicos y eléctricos (por mencionar sólo dos clases) modelados por esta clasificación de ecuaciones diferenciales, tomando claramente en cada caso los ajustes pertinentes para la simplificación de tales modelos. Precisamente este proyecto trata de un tema enmarcado en el contexto de las matemáticas aplicadas, concretamente se trata de un sistema de la física.

Definimos algunos conceptos que usaremos durante el presente proyecto:

- *Período:*

Una señal que repite el mismo patrón en el tiempo se llama periódica y el período es el tiempo que abarca un ciclo o repetición de la misma.

- *Resonancia:*

Según la Real Academia de Lengua Española la resonancia es el fenómeno de ampliación de las oscilaciones que se presentan en un oscilador armónico, cuando la frecuencia de las excitaciones exteriores es muy próxima a la frecuencia propia del oscilador. En cambio, en nuestro caso no existe excitación externa, refiriéndonos a la resonancia propia del sistema, es decir, al cociente de números enteros dado por la relación que guardan las frecuencias de los modos de vibración ω_i :

$$Resonancia = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Donde las ω_i son las partes imaginarias de los autovalores conjugados imaginarios puros de nuestro sistema.

De la misma forma los períodos, como veremos en el transcurso del presente proyecto, también guardan la misma proporción que las frecuencias, al estar relacionado el período con su frecuencia de la forma siguiente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- *Péndulo:*

El péndulo más simple es un cuerpo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida por una barra de masa despreciable. Cuando se toma la masa y se la separa hacia un lado de su posición de equilibrio soltándola a continuación, el péndulo comienza a oscilar en un plano vertical por la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Nótese que el período es independiente de la masa de la partícula suspendida. Por lo general se considera como un sistema con un solo grado de libertad. Los péndulos de nuestro caso serán péndulos simples formados cada uno de ellos por una varilla de masa despreciable de la que cuelga una masa puntual.

El desarrollo de los péndulos ha estado ligado con el desarrollo de los relojes desde que en el año 1600 cuando Galileo Galilei enuncia la "Ley del Péndulo"; gracias a esta ley, el matemático y físico holandés Christian Huyghens en el año 1650 aplica el péndulo en los relojes de pared con curva cicloidal. Posteriormente, este péndulo cicloidal, perfeccionado y en combinación con un instrumento meridiano, sería el medidor principal del tiempo de un observatorio.

La curva cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto p ubicado en el borde de una circunferencia de radio a cuando esta se translada a la vez que rota sin deslizar a lo largo de una línea recta como muestra la siguiente figura.

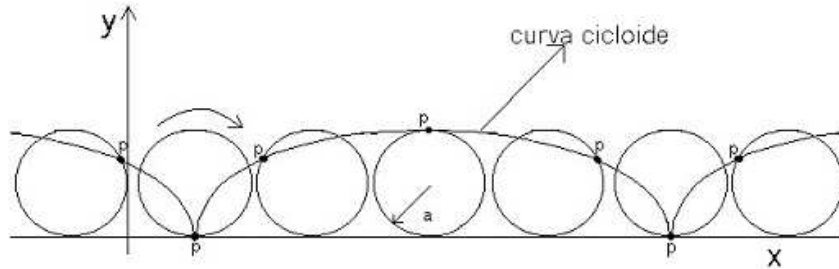


Figura 1.1: Formación de la curva cicloide a través del punto p ubicado en la circunferencia que está rotando.

Una propiedad muy interesante de esta curva fue descubierta por Johannes Bernoulli en 1727, quien demostró que para hacer llegar una bola dejándola rodar desde un punto A a un punto B ubicado más abajo sobre una línea vertical distinta de la que pasa por A en un tiempo mínimo, se necesita hacer rodar la bola sobre una curva cicloidal como se muestra en la siguiente figura:

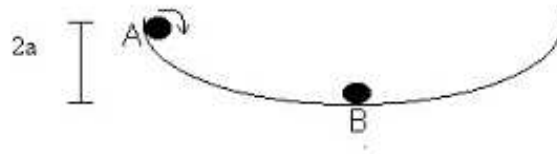


Figura 1.2: Desplazamiento de una bola a través de una curva cicloide.

Siendo $2a$ la diferencia de alturas entre A y B y 2 veces el radio del círculo con el que se creó la curva cicloidal.

Seguidamente comparamos muy brevemente el péndulo cicloidal con el péndulo simple. En el péndulo cicloidal el período es el mismo independientemente de la amplitud, por tanto, es isócrono; además será igual al período del péndulo simple cuando tengan la misma longitud y estén

oscilando en pequeñas amplitudes. Por lo que podemos concluir que el periodo del péndulo cicloidal no depende de la amplitud angular, mientras que el período del péndulo simple, si lo hace.

- *Mecanismo biela-manivela:*

El mecanismo biela-manivela es un mecanismo compuesto por un elemento giratorio llamado manivela, que va conectado a un barra rígida llamada biela, la cual se desplaza describiendo un movimiento de vaivén arrastrada por la manivela. Así se consigue que el movimiento de giro que produce la manivela se transforme en el movimiento rectilíneo alternativo que produce la biela. Es un mecanismo reversible, es decir, la manivela mueve la biela o a la inversa. Este mecanismo es ampliamente utilizado, principalmente en las máquinas de émbolos, tanto en motores de vapor (poco utilizados hoy en día), de explosión y de combustión interna, como en compresores.

La idea del presente proyecto proviene de un fenómeno físico que aparece con frecuencia en la literatura científica mecánica (específicamente en el tema de las oscilaciones pequeñas); se trata de la modelación y comportamiento de movimientos oscilatorios acoplados, que en diversas situaciones consiste en dos péndulos acoplados; por tanto, tendremos en todas las situaciones un sistema con dos grados de libertad, siendo éstos los ángulos que definen la posición en todo instante de cada uno de los péndulos que forman el sistema.

Existen diferentes formas de realizar el acoplamiento de dos péndulos. El caso más sencillo es el péndulo doble que se muestra en la figura 1.3, donde podemos ver que el segundo péndulo acopla el extremo libre de su varilla a la masa que cuelga en el primer péndulo; otro caso de acoplamiento, mostrado en el lado derecho de la figura 1.3, sería el de un resorte colocado entre las varillas de cada uno de los péndulos.

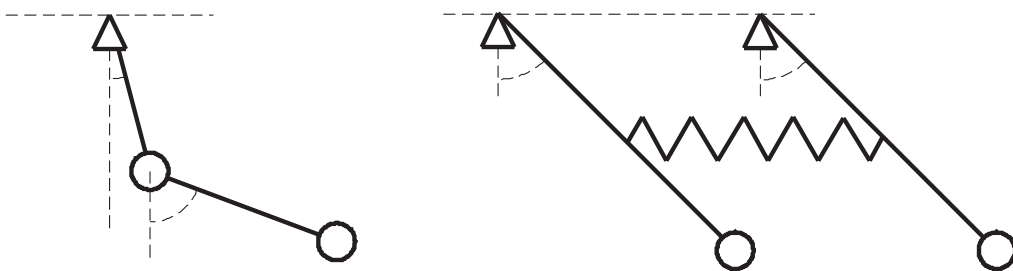


Figura 1.3: Ejemplos de péndulos acoplados.

Para el presente proyecto hemos escogido una nueva variante del acoplamiento de dos péndulos, Fig. 1.4, realizando dicho acoplamiento mediante un

mecanismo biela-manivela, ya que en una primera fase del mismo, búsqueda de información, no hemos sido capaces de encontrar literatura científica que tratará un modelo como en el que pretendemos estudiar.

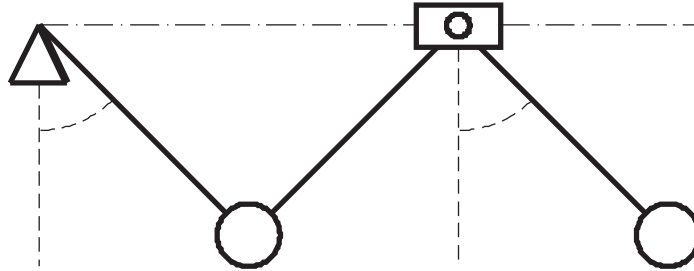


Figura 1.4: Modelo del sistema.

Objetivos del proyecto.

En el estudio de nuestro sistema habrá dos partes bien diferenciadas, una parte analítica y otra numérica; nos centraremos en esta última, ya que debido a la complejidad de las ecuaciones mediante métodos analíticos podemos llegar a conclusiones cualitativas más que cuantitativas.

Los objetivos del presente proyecto son los siguientes:

- En la parte analítica:
 - Estudiar el efecto que tiene sobre la resonancia la relación entre las longitudes del sistema de accionamiento, mecanismo biela-manivela.
 - Obtener las ecuaciones de movimiento del sistema definido por nuestro modelo, Fig 1.4, utilizando la formulación lagrangiana.
 - A partir de las ecuaciones de movimiento obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema, así como las posiciones de equilibrio correspondientes.
 - Cálculo de la curva representativa de resonancia 2:1 en nuestro sistema.
- En la parte numérica:
 - Aprender el manejo del software de continuación numérica AUTO2000.

-
- Mediante el software señalado realizar un estudio de las situaciones de equilibrio correspondientes de nuestro sistema, estudiando la estabilidad en cada uno de ellas.
 - A partir de una posición de equilibrio estable obtener soluciones periódicas estables e inestables, representando gráficamente su evolución en función de las coordenadas cartesianas.