

Capítulo 2

Estudio analítico del sistema

En este capítulo, se va realizar como su propio nombre indica el estudio analítico del sistema, cuyo modelo se presenta seguidamente:

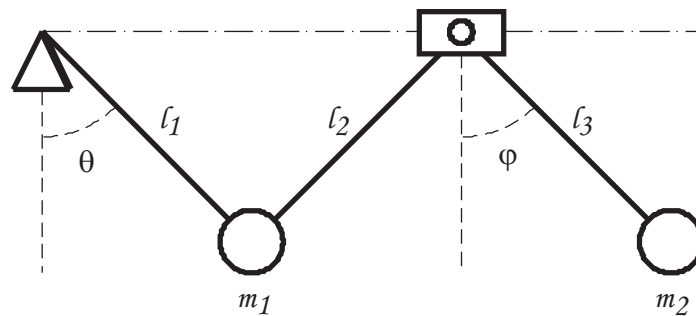


Figura 2.1: Modelo del sistema.

En la figura pueden verse las distintas coordenadas y parámetros que usaremos en nuestro estudio, para la determinación de las ecuaciones que regirán el movimiento del sistema.

2.1. Modelo del sistema.

El modelo escogido para nuestro estudio consta de dos grados de libertad θ y φ , teniendo en cuenta que ambas variables dependerán a su vez del tiempo.

En primer lugar se ha presentado en dos dimensiones el esquema gráfico del modelo (Figura 2.1), en éste se pueden observar los distintos parámetros que se van a emplear para describir las ecuaciones de movimiento del sistema objeto de nuestro estudio.

En el sistema, situado en su totalidad en el plano vertical, se representa el sistema pendular(péndulo) y el mecanismo biela-manivela al que se le acopla.

Está formado por tres barras de longitudes inicialmente distintas ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 , que experimentan sendos movimientos de rotación; dos masas, de pesos distintos, m_1 y m_2 , la primera de ellas situada en el punto de unión de las barras ℓ_1 y ℓ_2 que permite el giro entre ellas y la segunda en el extremo de la barra ℓ_3 ; la corredera, con movimiento de traslación en una única dirección, en la que se dará la unión entre las barras ℓ_2 y ℓ_3 ; y un punto fijo(Δ) en el que se fija el extremo libre de la barra ℓ_1 , fijando así nuestro sistema.

En nuestro modelo, tomaremos como hipótesis de partida que las masas, m_1 y m_2 , son puntuales y que ninguna de las barras tiene masa, lo cuál simplificará en gran medida el estudio de nuestro problema.

Como ya fue señalado con anterioridad, nuestro sistema viene definido por dos grados de libertad θ y φ , los cuáles definen respectivamente los ángulos que separan la barra ℓ_1 y la barra ℓ_3 de la vertical.

2.2. Relación de longitudes.

Primeramente con la idea de simplificar las ecuaciones, vamos a estudiar el efecto que tiene sobre la resonancia la relación entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 .

2.2.1. Vector de posición.

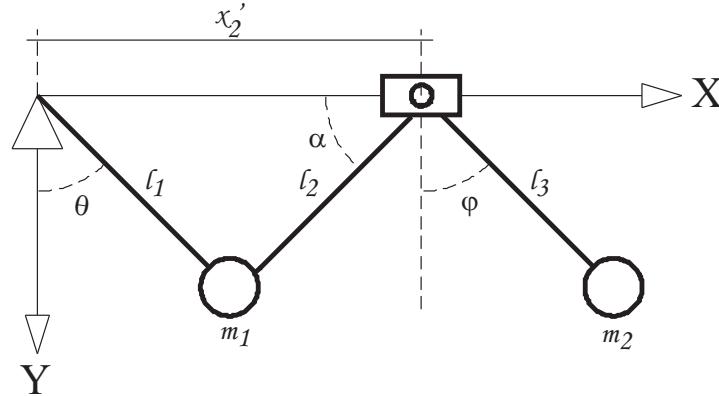


Figura 2.2: Modelo general.

Basándonos en los ejes cartesianos señalados en el esquema anterior, definimos los vectores de posición de cada una de las masas m_1 y m_2 .

Para la masa m_1 :

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell_1 \cdot \sin(\theta) \\ y_1 &= \ell_1 \cdot \cos(\theta)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Para la masa m_2 :

$$\begin{aligned}x_2 &= x'_2 + \ell_3 \cdot \sin(\varphi) \\ y_2 &= \ell_3 \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Donde x'_2 se expresa de la forma siguiente:

$$x'_2 = \ell_1 \cdot \sin(\theta) + \ell_2 \cdot \cos(\alpha)\tag{2.3}$$

2.2.2. Vector de velocidad.

Para obtener la velocidad de ambas masas en coordenadas cartesianas, basta con derivar las expresiones del vector de posición, en cada una de ellas, con respecto al tiempo, resultando:

Para la masa m_1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y}_1 &= -\ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Para la masa m_2 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{x}'_2 + \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{y}_2 &= -\ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Para expresar $\dot{x}'_2$ se hace uso de relación trigonométrica entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 , observando el esquema del modelo general (Figura 2.2), y de la regla de la cadena para la derivación, consiguiendo así eliminar de su expresión la longitud ℓ_2 :

Relación trigonométrica:

$$\frac{\ell_2}{\cos(\theta)} = \frac{\ell_1}{\sin(\alpha)}\tag{2.6}$$

Como puede verse en la relación anterior el ángulo α es función de θ , ($\alpha = \alpha(\theta)$) por lo que vamos a despejar en la ecuación (2.6) el $\sin(\alpha)$ y derivarlo con respecto a θ , aplicando la regla de la cadena:

$$\sin(\alpha) = \frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \cos(\theta) \quad (2.7)$$

Derivando y despejando $\frac{d\alpha}{d\theta}$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cdot \frac{d\alpha}{d\theta} &= -\frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{d\alpha}{d\theta} &= -\frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ya estamos en condiciones de derivar la expresión (2.3) respecto a θ , aplicando la regla de la cadena, resultando:

$$\dot{x}'_2 = \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \ell_2 \cdot \frac{d\alpha}{d\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\alpha) \quad (2.9)$$

Ahora sustituimos en la expresión anterior (2.9), la obtenida en (2.8):

$$\dot{x}'_2 = \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \ell_2 \cdot \left(-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\alpha) \quad (2.10)$$

Finalmente operamos resultando la expresión de $\dot{x}'_2$, que estábamos buscando, ya que se ha conseguido eliminar la longitud ℓ_2 de la misma:

$$\dot{x}'_2 = \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + \ell_1 \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\alpha) \quad (2.11)$$

Además de la expresión vectorial de la velocidad, también calcularemos el cuadrado del módulo de la misma, ya que nos será de utilidad en el cálculo de la energía cinética. Dicho valor viene dado en función de las velocidades cartesianas para cada una de las masas por $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Su valor para cada una de las masas es el siguiente:

Para la masa m_1 :

$$v_1^2 = \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \quad (2.12)$$

Para la masa m_2 :

$$v_2^2 = \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{x}_2'^2 + 2 \cdot \dot{x}_2' \cdot \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \quad (2.13)$$

Y sustituyendo las expresiones (2.7) y (2.11), en la anterior, resulta para la masa m_2 :

$$\begin{aligned} v_2^2 = & \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \ell_1^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_1^4}{\ell_2^2} \cdot \frac{\cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \dot{\theta}^2 \\ & + 2 \cdot \frac{\ell_1^3}{\ell_2} \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} + 2 \cdot \ell_3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \left(\ell_1 \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} \right. \\ & \left. + \frac{\ell_1^2}{\ell_2} \cdot \frac{\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \cdot \dot{\theta} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.2.3. Energía cinética del sistema.

La expresión de la energía cinética viene dada por $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Sustituyendo m y v^2 por las expresiones correspondientes para cada una de las masas m_1 , v_1^2 y m_2 , v_2^2 respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left[\ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \right. \\ & + \ell_1^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_1^4}{\ell_2^2} \cdot \frac{\cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \dot{\theta}^2 + 2 \cdot \frac{\ell_1^3}{\ell_2} \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \\ & \left. + 2 \cdot \ell_3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \left(\ell_1 \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta} + \frac{\ell_1^2}{\ell_2} \cdot \frac{\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \cdot \dot{\theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para ver el efecto que tiene la relación de longitudes, le aplicamos a la expresión de la energía cinética (2.15), la aproximación cuadrática que resulta haciendo:

$$\cos(a) \approx 1$$

$$\sin(a) \approx 0, \text{ con } a \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Con lo que obtenemos la siguiente expresión para la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + 2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\theta} \right) \quad (2.17)$$

Como se puede ver la longitud ℓ_2 no aparece en la expresión de la energía cinética del sistema (2.17) al tener en cuenta la aproximación (2.16), anteriormente señalada, de igual manera tampoco aparecerá en la energía potencial del sistema.

Por lo tanto para este proyecto la relación entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 no será relevante, ya que no influirá en la resonancia que sufre el sistema por lo que no tampoco crea movimientos interesantes para el estudio que en este proyecto desea abordarse.

Por todo lo anterior se toma como relación entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 , para nuestro estudio cinemático, el valor 1.

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = 1 \quad (2.18)$$

2.3. Ecuaciones de movimiento.

En este apartado, hallaremos las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de nuestro modelo simplificado empleando las *ecuaciones de Lagrange*, que se muestra en la siguiente figura.

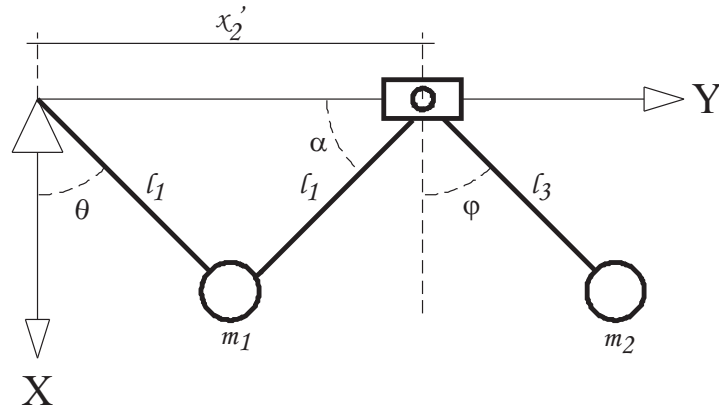


Figura 2.3: Modelo simplificado.

2.3.1. Vector de posición.

Basándonos en los ejes cartesianos señalados en el esquema anterior, definimos los vectores de posición de cada una de las masas m_1 y m_2 .

Para la masa m_1 :

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell_1 \cdot \sin(\theta) \\ y_1 &= \ell_1 \cdot \cos(\theta)\end{aligned}\tag{2.19}$$

Para la masa m_2 :

$$\begin{aligned}x_2 &= x'_2 + \ell_3 \cdot \sin(\varphi) \\ y_2 &= \ell_3 \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}\tag{2.20}$$

Donde x'_2 se expresa de la forma siguiente:

$$x'_2 = \ell_1 \cdot \sin(\theta) + \ell_1 \cdot \cos(\alpha)\tag{2.21}$$

Aplicaremos a la expresión anterior (2.21), la relación trigonométrica siguiente:

$$\frac{\ell_1}{\cos(\theta)} = \frac{\ell_1}{\sin(\alpha)}\tag{2.22}$$

Dicha relación se obtiene de la observación del modelo simplificado (Figura 2.3), pudiéndose escribir en la forma:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \cos(\theta) \\ \cos(\alpha) &= \sin(\theta)\end{aligned}\tag{2.23}$$

La expresión (2.21), teniendo en cuenta la relación mostrada en (2.23), nos queda de la siguiente manera:

$$x'_2 = 2 \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)\tag{2.24}$$

2.3.2. Vector de velocidad.

Para obtener la velocidad de ambas masas en coordenadas cartesianas, basta con derivar las expresiones del vector de posición, en cada una de ellas, con respecto al tiempo, resultando:

Para la masa m_1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y}_1 &= -\ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta)\end{aligned}\tag{2.25}$$

Para la masa m_2 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{x}'_2 + \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{y}_2 &= -\ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.26}$$

Donde $\dot{x}'_2$ viene dado como sigue, tras su derivación:

$$\dot{x}'_2 = 2 \cdot \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)\tag{2.27}$$

Y sustituyendo la expresión de $\dot{x}'_2$ (2.27) en la expresión de la coordenada $\dot{x}_2$ (2.26) del vector velocidad de la masa m_2 , llegamos a:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= 2 \cdot \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{y}_2 &= -\ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.28}$$

Además de la expresión vectorial de la velocidad, también calcularemos el cuadrado del módulo de la misma, ya que nos será de utilidad en el cálculo de la energía cinética. Dicho valor viene dado en función de las velocidades cartesianas para cada una de las masas por $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Su valor para cada una de las masas es el siguiente:

Para la masa m_1 :

$$v_1^2 = \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2\tag{2.29}$$

Para la masa m_2 :

$$v_2^2 = \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 4 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos^2(\theta) + 4 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)\tag{2.30}$$

2.3.3. Energía cinética del sistema.

La expresión de la energía cinética viene dada por $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Sustituyendo m y v^2 por las expresiones correspondientes para cada una de las masas m_1 , v_1^2 y m_2 , v_2^2 respectivamente, obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 4 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos^2(\theta) \right. \\ \left. + 4 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \right) \quad (2.31)$$

2.3.4. Energía potencial.

La energía potencial varía únicamente con la altura de m , ya que en el apartado (2.1), establecimos como hipótesis que las barras de nuestro modelo no tenían masa, y que las únicas masas a considerar serían m_1 y m_2 .

La expresión de la energía potencial es $V = m \cdot g \cdot \Delta h$, donde el Δh la diferencia de altura que experimenta cada una de las masas m_1 y m_2 , al dejar su posición de reposo, dada para la nulidad de los ángulos ($\theta = \varphi = 0$), ya que hemos tomado dicha posición como origen de potencial en cada una de las masas. Consecuencia directa de tomar así el origen es que la energía potencial siempre será positiva. Su valor es el siguiente:

$$V = m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot (1 - \cos(\theta)) + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot (1 - \cos(\varphi)) \quad (2.32)$$

2.3.5. Ecuaciones de Lagrange.

Una vez halladas las dos energías que intervendrán en las *ecuaciones de Lagrange*, planteamos nuestras ecuaciones de movimiento para cada uno de nuestros grados de libertad θ y φ .

En primer lugar, escribimos las ecuaciones de Lagrange para una coordenada generalizada q y en función de las energías cinética y potencial.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \quad (2.33)$$

Ahora particularizamos la ecuación (2.33) para nuestros dos grados de libertad θ y φ .

Grado de libertad θ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) \\
&\quad + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \\
&\quad + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \right. \\
&\quad \left. - \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) - 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)$$

Sustituyendo cada uno de los términos anteriores en las ecuaciones de Lagrange (2.33) se obtiene, para el grado de libertad θ , la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &= m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \\
&\quad + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi) \right) \\
&\quad + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\
&\quad + m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)
\end{aligned}$$

(2.34)

Grado de libertad φ

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = m_2 \cdot g \cdot \ell_3 \cdot \sin(\varphi)$$

Sustituyendo cada uno de los términos anteriores en las ecuaciones de Lagrange (2.33) se obtiene, para el grado de libertad φ , la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{aligned}0 &= m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \right. \\ &\quad \left. - \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \right) + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ &\quad + m_2 \cdot g \cdot \ell_3 \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{2.35}$$

Las ecuaciones de Lagrange nos han permitido obtener las dos ecuaciones de movimiento (2.34) y (2.35) correspondientes a los dos grados de libertad θ y φ . En dichas ecuaciones, se pueden simplificar términos semejantes, obteniendo finalmente las dos ecuaciones de movimiento de segundo orden que regirán nuestro sistema:

$$\begin{aligned}
0 = & m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \left(\ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \\
& + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi) \right) \\
& + m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
0 = & m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \right) \\
& + m_2 \cdot g \cdot \ell_3 \cdot \sin(\varphi)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

En las ecuaciones anteriores (2.36) y (2.37) ha de notarse la existencia de términos cruzados, debido a la que en el movimiento del sistema los dos grados de libertad θ y φ permanecen relacionados entre sí.

2.3.6. Ecuaciones diferenciales adimensionalizadas.

El siguiente paso es adimensionalizar el tiempo en las ecuaciones (2.36) y (2.37), con lo cuál obtenemos dos parámetros adimensionales.

Sea $\tau = \omega \cdot t$ con $\omega^2 = \frac{g}{\ell_1}$, las ecuaciones quedan en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
0 = & \ddot{\theta} + 4 \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \right) \\
& + 2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \right) + \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$0 = \mu \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \right) + \sin(\varphi) \tag{2.39}$$

Donde μ y ν son:

- *Relación de longitudes* $\mu = \frac{\ell_3}{\ell_1}$.

En este parámetro comparamos las longitudes de los tres brazos del sistema, dos de ellos de longitudes iguales ℓ_1 pertenecientes al mecanismo biela-manivela y el otro de longitud ℓ_3 perteneciente al péndulo.

- *Relación de masas* $\nu = \frac{m_2}{m_1}$.

Este parámetro comparamos las dos masas puntuales de nuestro sistema m_1 y m_2

2.4. Ecuaciones y valores de equilibrio.

A partir de las ecuaciones de movimiento adimensionales (2.38) y (2.39), obtenidas en el apartado anterior, calculamos las que ecuaciones que cumplirán los distintos puntos de equilibrio de nuestro problema. Para encontrar dichas ecuaciones la única condición a imponer es que las coordenadas generalizadas en nuestras ecuaciones θ y φ , permanezcan constantes con el tiempo, matemáticamente se expresa de la forma siguiente:

$$\dot{q} = \ddot{q} = 0, \quad \text{con } q = \theta, \varphi.$$

Imponiendo esta condición, las ecuaciones de equilibrio nos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= 0 \\ \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Por tanto los valores de las coordenadas generalizadas que cumplen nuestro equilibrio, expresados en radianes, serán:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) = 0 &\implies \theta = 0, \pi \\ \sin(\varphi) = 0 &\implies \varphi = 0, \pi \end{aligned} \tag{2.41}$$

Lo que nos presenta cuatro posibles situaciones de equilibrio, dadas por las combinaciones dos a dos de las soluciones. Debemos notar que estas cuatro posibles situaciones de equilibrio se encuentran todas en la vertical del punto fijo de nuestro sistema (situaciones fácilmente imaginables por el lector con lo que no se cree oportuno el uso de un esquema gráfico que las represente).

2.5. Estudio de la resonancia.

En este apartado calculamos la curva de resonancia 2:1; para que se dé dicha curva los autovalores de nuestro sistema deben de ser una pareja de autovalores conjugados imaginarios puros. Además al tratarse de la resonancia 2:1 los valores de la partes imaginarias serán el doble, en módulo, entre sí. Dadas las cuatro posibles situaciones de equilibrio, señaladas antes, nos centramos en la situación $\theta = \varphi = 0$, ya que es la única que cumple esta condición, como veremos en el próximo capítulo,

Debido a que las coordenadas generalizadas son ambas nulas, para la situación de equilibrio elegida, podemos linealizar las ecuaciones de movimiento adimensionales (2.38) y (2.39), obtenidas en el apartado (2.3.6), con la aproximación para ángulos pequeños. Dicha aproximación se expresa matemáticamente, para un ángulo genérico a , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\cos(a) &\approx 1 \\ \sin(a) &\approx 0, \text{ con } a \rightarrow 0\end{aligned}\tag{2.42}$$

Aplicando la aproximación que acabamos de señalar, obtenemos las ecuaciones siguientes (en las que ya se han despreciado los términos superiores al segundo orden):

$$\begin{aligned}(1 + 4 \cdot \nu) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \nu \cdot \mu \cdot \ddot{\varphi} + \theta &= 0 \\ 2 \cdot \ddot{\theta} + \mu \cdot \ddot{\varphi} + \varphi &= 0\end{aligned}\tag{2.43}$$

Expresándolo matricialmente, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 + 4 \cdot \nu & 2 \cdot \mu \cdot \nu \\ 2 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = 0\tag{2.44}$$

Para el cálculo de la curva correspondiente, se van a ensayar en el sistema anterior (2.44) soluciones del tipo:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = e^{\lambda \cdot t} \cdot v\tag{2.45}$$

Donde $\lambda = \omega \cdot i$ y v representan los autovalores y autovectores correspondiente al sistema (2.44) respectivamente.

Para ello es necesario derivar dos veces (2.45), obteniendo la expresión siguiente:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot v \quad (2.46)$$

Ya estamos en disposición de aplicar la solución elegida al sistema (2.44); para ello sustituimos en éste las expresiones antes obtenidas (2.45) y (2.46). De esta forma obtenemos la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 + 4 \cdot \nu & 2 \cdot \mu \cdot \nu \\ 2 & \mu \end{bmatrix} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot v + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot v = 0 \quad (2.47)$$

La ecuación matricial (2.47) se puede agrupar en la forma que se presenta en la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} (1 + 4 \cdot \nu) \cdot \lambda^2 + 1 & 2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \lambda^2 \\ 2 \cdot \lambda^2 & \lambda^2 \cdot \mu + 1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot v = 0 \quad (2.48)$$

El determinante correspondiente, a la expresión (2.48), es:

$$\begin{vmatrix} (1 + 4 \cdot \nu) \cdot \lambda^2 + 1 & 2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \lambda^2 \\ 2 \cdot \lambda^2 & \lambda^2 \cdot \mu + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.49)$$

Operando el determinante anterior (2.49), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\mu \cdot \lambda^4 + (1 + 4 \cdot \nu + \mu) \cdot \lambda^2 + 1 = 0 \quad (2.50)$$

Las potencias de los autovalores pueden expresarse, a partir de su expresión inicial, de la forma siguiente:

$$\lambda = \omega \cdot i \implies \lambda^2 = -\omega^2 \implies \lambda^4 = \omega^4 \quad (2.51)$$

Vamos a sustituir en (2.50) el valor de las potencias de los autovalores (2.51), quedándonos en la ecuación sólo con valores reales de la parte imaginaria de los autovalores:

$$\mu \cdot \omega^4 - (1 + 4 \cdot \nu + \mu) \cdot \omega^2 + 1 = 0 \quad (2.52)$$

Para poder resolver con la expresión de la ecuación de segundo orden, llamamos $S = \omega^2$ y $S^2 = \omega^4$, y resolviendo en la forma indicada se obtiene, para S , la expresión siguiente:

$$S = \frac{(1 + 4 \cdot \nu + \mu) \pm \sqrt{(1 + 4 \cdot \nu + \mu)^2 - 4 \cdot \mu}}{2 \cdot \mu}$$

En la expresión anterior, al contener los dos parámetros μ y ν , se dificulta su resolución analítica. Para salvar este inconveniente, recordamos que el objeto de nuestro estudio es la resonancia 2:1, debido a lo cual sabemos la solución de la ecuación para ésta, siendo $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 1$, correspondiendo ω_1 y ω_2 a tomar en la expresión anterior el signo positivo o negativo de la raíz, respectivamente.

Ahora ya estamos en condiciones de hallar la curva en ejes μ y ν , señalada al principio de este apartado. Para ello vamos a dividir las dos soluciones, haciendo uso de la expresión anterior, obteniendo, tras simplificar adecuadamente, lo siguiente:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{(1 + 4 \cdot \nu + \mu) \pm \sqrt{(1 + 4 \cdot \nu + \mu)^2 - 4 \cdot \mu}}{(1 + 4 \cdot \nu + \mu) \pm \sqrt{(1 + 4 \cdot \nu + \mu)^2 - 4 \cdot \mu}} = 4$$

Si operamos la expresión anterior y despejamos el valor de μ , en función de ν , se obtiene la expresión siguiente:

$$\mu = \frac{-\left(8 \cdot \nu - \frac{17}{4}\right) \pm \sqrt{\left(8 \cdot \nu - \frac{17}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(16 \cdot \nu^2 + 8 \cdot \nu + 1\right)}}{2}$$

La expresión anterior nos permite tener para cada valor de ν un par de valores de μ , correspondientes a tomar el signo positivo o negativo de la raíz. Seguidamente mostramos su representación gráfica:

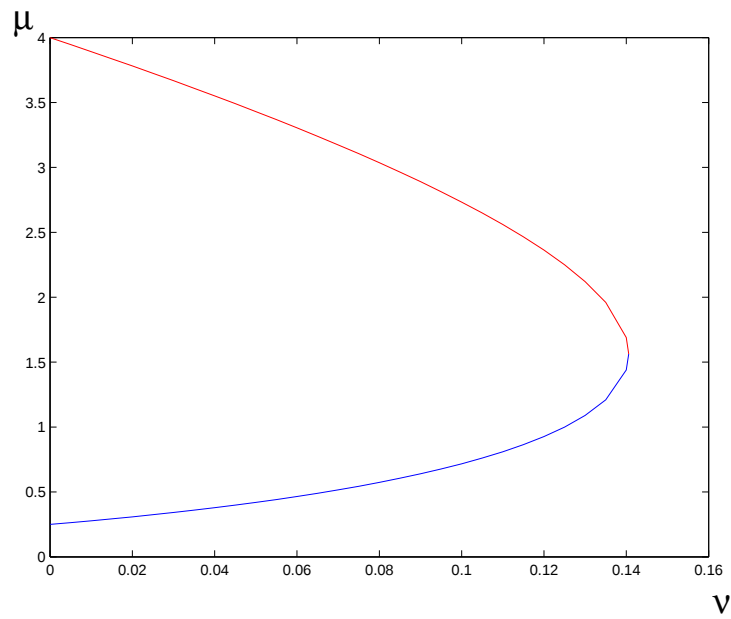


Figura 2.4: Curva de resonancia 2:1.

En la gráfica anterior hemos representado tanto la rama correspondiente a tomar el signo positivo, en rojo, como la rama correspondiente al signo negativo, en azul.