

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de los tres capítulos anteriores del proyecto, hemos estudiado analítica y numéricamente nuestro sistema, Fig 5.1, con el objetivo de calcular el efecto de la resonancia 2:1, Fig 5.2, sobre su comportamiento, en cuanto a estabilidad y movimiento se refiere, tanto en posiciones de equilibrio como en órbitas periódicas, por medio de la formulación lagrangiana.

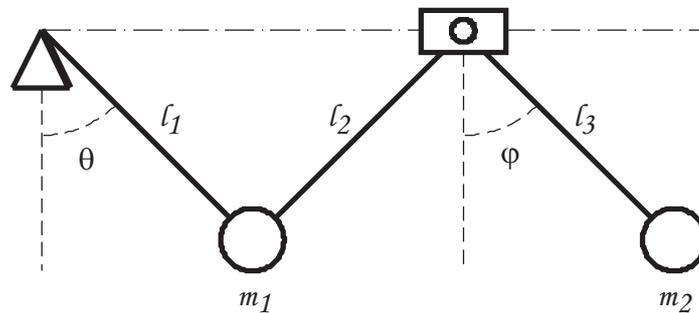


Figura 5.1: Modelo del sistema.

Debido a que las ecuaciones diferenciales de nuestro modelo son complejas, el estudio analítico se ha visto muy reducido, y el mayor peso del proyecto se lo ha llevado la parte numérica realizada con AUTO2000.

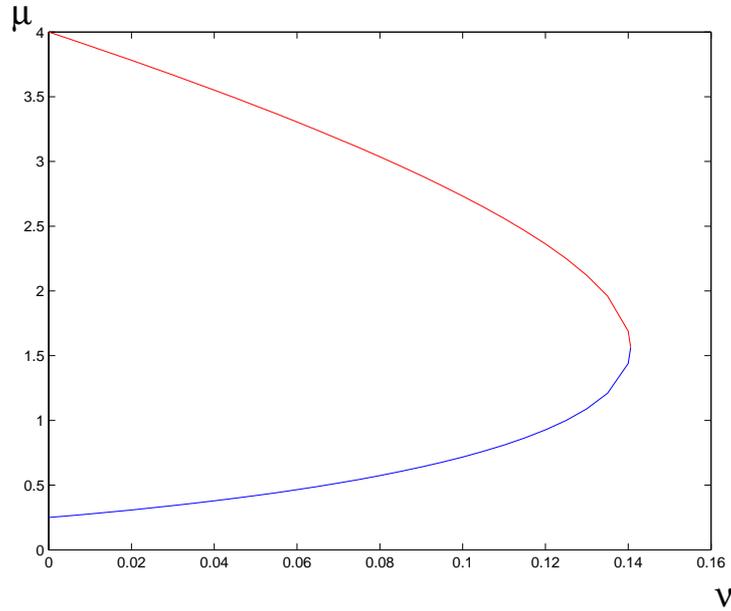
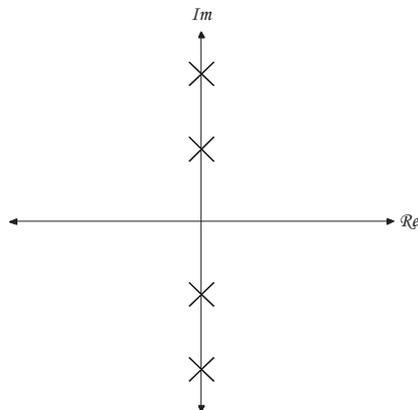


Figura 5.2: Curva de resonancia 2:1.

Se han obtenido cuatro posibles situaciones de equilibrio, centrandó nuestro estudio en la posición $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, al ser esta posición la única que produce soluciones estables, tanto de equilibrio como de órbitas periódicas; al ser una posición de equilibrio estable permite que se alcance la resonancia 2:1, ya que sus cuatro autovalores forman dos parejas de autovalores conjugados imaginarios puros permitiendo que tanto las frecuencias propias como sus períodos correspondientes guarden una proporción determinada expresable como un cociente de números enteros. El siguiente gráfico muestra el espectro de autovalores correspondiente a esta posición de equilibrio estable:



Con el desarrollo numérico hemos podido comprobar que la posición de equilibrio, $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, se obtiene para cualquier valor tanto de las masas como de las longitudes de las barras de nuestro sistema, como muestra la siguiente gráfica, obtenida al realizar la continuación de equilibrios utilizando como parámetro de continuación $\mu = \frac{\ell_3}{\ell_1}$:

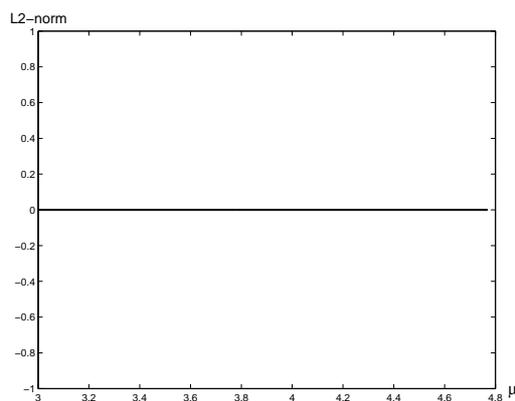


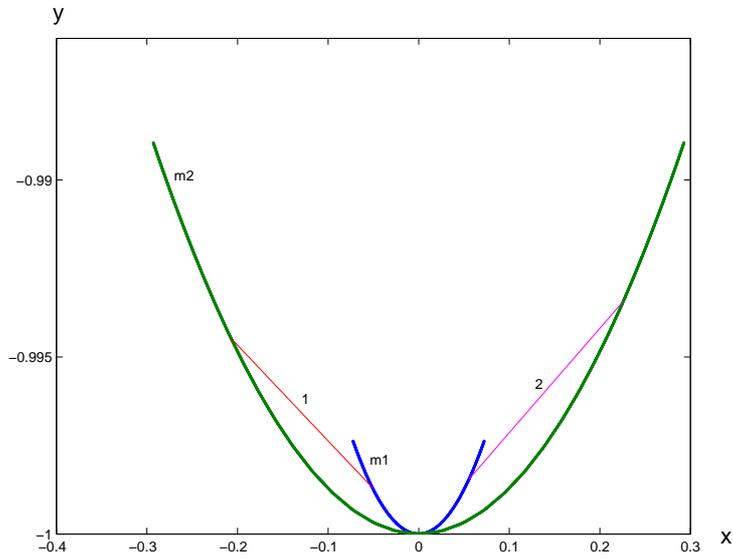
Figura 5.3: Amplitud frente a μ .

En cuanto a la continuación de órbitas periódicas, partimos de dos puntos distintos de coordenadas $(\mu, \nu) = (3, 0.07)$ y $(1, 0.12)$, próximos a la curva de resonancia 2:1, Fig 5.2, para que al alcanzar la resonancia el programa de continuación numérica AUTO2000 detecte un punto de bifurcación de Hopf para cada uno de ellos. A partir de dichos puntos de Hopf hemos podido realizar la continuación de órbitas periódicas con dos posibles períodos iniciales, guardando estos períodos entre sí una proporción doble debido a la resonancia usada. Además cada vez que la resonancia es alcanzada durante la continuación nos aparecen puntos especiales, como por ejemplo, puntos de bifurcación doble período, en los cuales se duplica el período de las órbitas periódicas que se continúan a partir de ellos.

En el capítulo anterior se han desarrollado extensamente los resultados obtenidos a partir de la continuación de las órbitas periódicas para ambos casos. No obstante señalamos en este capítulo los tres movimientos relativos entre las masas m_1 y m_2 de nuestro sistema, así como un ejemplo de la estabilidad en las ramas de órbitas periódicas. Hemos obtenido las gráficas de dichos movimientos al pasar a coordenadas cartesianas los valores de los ángulos θ y φ que AUTO2000 nos ha ido proporcionando:

- *Movimiento en fase.*

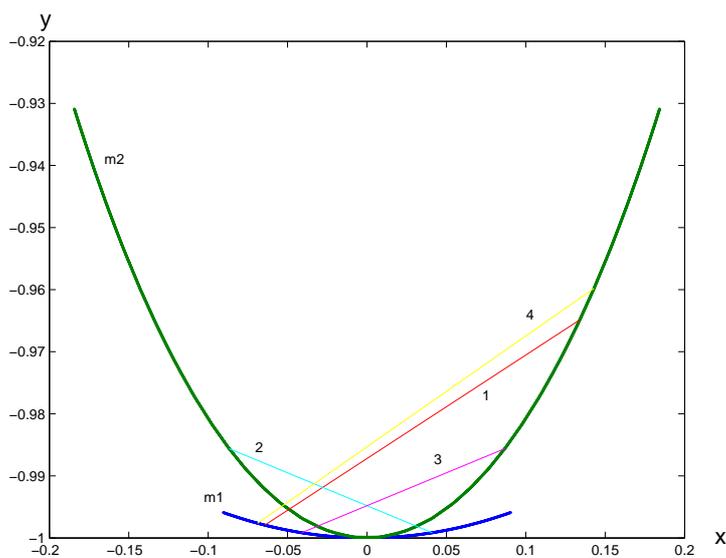
Ambos masas se mueven en el mismo sentido, manteniendo una relación constante entre los ángulos que describen en su trayectoria.



En la gráfica anterior podemos ver que ambas masas, m_1 y m_2 , llegan a pararse, su velocidad se hace cero, lo que se deduce al ver que los movimientos que dichas masas describen son arcos en lugar de curvas completas, parándose las masas en los extremos de dichos arcos.

- *Movimiento en contrafase.*

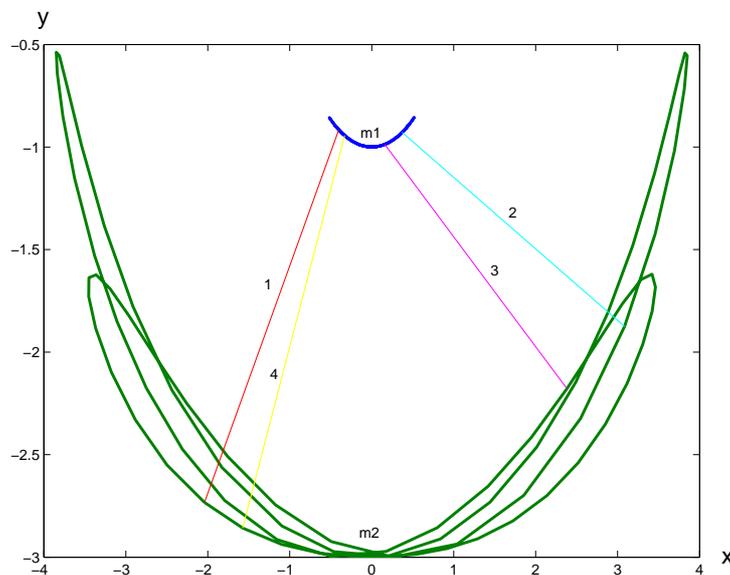
En este movimiento las masas se mueven en sentido contrario, pero siguen manteniendo una relación constante entre sus ángulos.



De nuevo, ambas masas se paran al llegar al extremo de los arcos que describen en sus respectivas trayectorias.

- *Movimiento de transición entre los dos anteriores.*

Para este tipo de movimiento no existe una relación entre los ángulos que describen las masas, m_1 y m_2 , de nuestro sistema, debido a que ya no estamos ni en fase ni en contrafase.



En ella vemos que mientras la masa m_1 sigue describiendo un arco en su trayectoria (parándose al llegar a los extremos de dicho arco), como en los dos movimientos anteriores, la masa m_2 ya no describe un arco en su trayectoria sino que ahora ésta viene dada por dos curvas cerradas, lo que nos indica que la masa m_2 no llega a pararse en su movimiento.

En los siguientes gráficos se muestra un ejemplo de la evolución de los multiplicadores, en ella vemos el cambio de estabilidad en una rama de órbitas periódicas:

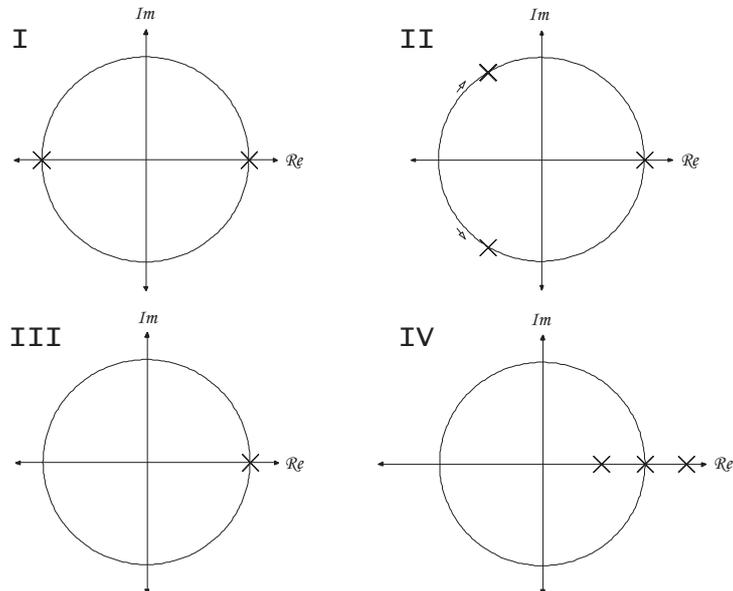


Figura 5.4: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

De la observación del gráfico anterior podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, dos de ellos estarán en el valor 1 y los otros dos en el valor -1 .
- En un segundo instante, gráfico **II**, los que están en el valor -1 empezarán a desplazarse siguiendo la circunferencia de radio unidad.
- En el gráfico **III** vemos que ya están los cuatro multiplicadores en el valor 1.
- Por último en el gráfico **IV** vemos como dos de los multiplicadores se salen del valor 1, uno adentrándose en la circunferencia de radio unidad y el otro saliendo de ella. Ésto es debido a que hemos encontrado un punto de bifurcación **BP**. Por tanto, a partir de este punto la rama de órbitas periódicas pasará a ser inestable.

Por todo lo anterior queda demostrado el conocimiento del programa AUTO2000 para la continuación de equilibrios y órbitas periódicas en función de uno o dos parámetros (relación de masas y de longitudes de las barras), lo cual era un objetivo implícito en la realización del proyecto.