ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada II

PROYECTO FIN DE CARRERA

Resonancia en un sistema pendular accionado por el mecanismo biela-manivela.

Realizado por D. Antonio Sánchez Herrera

Director del proyecto: Dr. D. Emilio Freire Macías

Sevilla, Mayo de 2005

Quiero dedicar este proyecto a mis padres, Carmen y Antonio, y a mis dos hermanas Nuria y Olga, por su continuo apoyo en la difícil empresa de hacerme ingeniero.

Mis más sinceros agradecimientos a mi director de proyecto D. Emilio Freire Macías por su dedicación y disponibilidad en la realización del presente proyecto.
Igualmente agradezco a todas aquellas personas que han estado conmigo durante todos estos años y en especial a mis compañeros y, por supuesto, buenos amigos Emilio García Falantes, José Luis Bermejo Calero y Juan Ángel Sierra Figueroa por su ayuda en los últimos años de la carrera.

De todo corazón, ***Gracias A Todos***

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se estudia el efecto que la resonancia produce en un sistema dinámico conservativo, formado por dos péndulos acoplados mediante un mecanismo biela-manivela.

Una razón de ser de las matemáticas aplicadas es el aporte que brindan, con apoyo de las ecuaciones diferenciales, a una extensa variedad de situaciones de las ciencias en sus distintas disciplinas clasificadas como ciencias naturales. Dentro de éstas podemos mencionar a las biológicas, químicas y económicas; aunque nos referimos, con especial énfasis por su valiosa aportación sobre la tecnología, a la física. Es en esta última área en donde regularmente se encuentran algunos fenómenos mecánicos y eléctricos (por mencionar sólo dos clases) modelados por esta clasificación de ecuaciones diferenciales, tomando claramente en cada caso los ajustes pertinentes para la simplificación de tales modelos. Precisamente este proyecto trata de un tema enmarcado en el contexto de las matemáticas aplicadas, concretamente se trata de un sistema de la física.

Definimos algunos conceptos que usaremos durante el presente proyecto:

- *Período*:
  Una señal que repite el mismo patrón en el tiempo se llama periódica y el período es el tiempo que abarca un ciclo o repetición de la misma.

- *Resonancia*:
  Según la Real Academia de Lengua Española la resonancia es el fenómeno de ampliación de las oscilaciones que se presentan en un oscilador armónico, cuando la frecuencia de las excitaciones exteriores es muy próxima a la frecuencia propia del oscilador. En cambio, en nuestro caso no existe excitación externa, refieréndonos a la resonancia propia del sistema, es decir, al cociente de números enteros dado por la relación que guardan las frecuencias de los modos de vibración ω_i:

$$Resonancia = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Donde las ω_i son las partes imaginarias de los autovalores conjugados imaginarios puros de nuestro sistema.

De la misma forma los períodos, como veremos en el transcurso del presente proyecto, también guardan la misma proporción que las frecuencias, al estar relacionado el período con su frecuencia de la forma siguiente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- *Péndulo*:
  El péndulo más simple es un cuerpo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida por una barra de masa despreciable. Cuando se toma la masa y se la separa hacia un lado de su posición de equilibrio soltándola a continuación, el péndulo comienza a oscilar en un plano vertical por la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Nótese que el período es independiente de la masa de la partícula suspendida. Por lo general se considera como un sistema con un solo grado de libertad. Los péndulos de nuestro caso serán péndulos simples formados cada uno de ellos por una varilla de masa despreciable de la que cuelga una masa puntual.

  El desarrollo de los péndulos ha estado ligado con el desarrollo de los relojes desde que en el año 1600 cuando Galileo Galilei enuncia la "Ley del Péndulo"; gracias a esta ley, el matemático y físico holandés Christian Huyghens en el año 1650 aplica el péndulo en los relojes de pared con curva cicloidal. Posteriormente, este péndulo cicloidal, perfeccionado y en combinación con un instrumento meridiano, sería el medidor principal del tiempo de un observatorio.

  La curva cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto p ubicado en el borde de una circunferencia de radio a cuando esta se translada a la vez que rota sin deslizar a lo largo de una línea recta como muestra la siguiente figura.

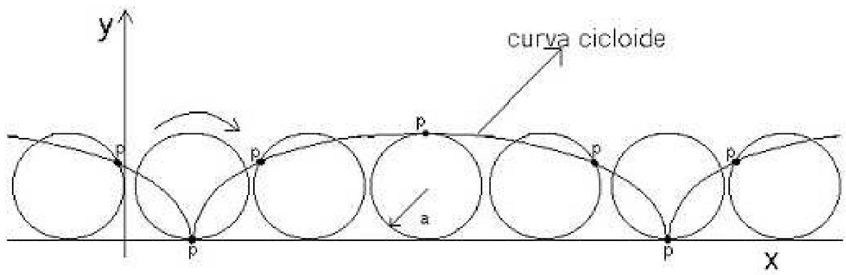


Figura 1.1: Formación de la curva cicloide a través del punto p ubicado en la circunferencia que esta rotando.

Una propiedad muy interesante de esta curva fue descubierta por Johannes Bernoulli en 1727, quien demostró que para hacer llegar una bola dejándola rodar desde un punto A a un punto B ubicado más abajo sobre una línea vertical distinta de la que pasa por A en un tiempo mínimo, se necesita hacer rodar la bola sobre una curva cicloidal como se muestra en la siguiente figura:

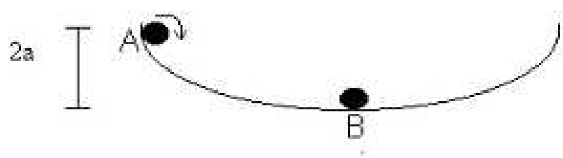


Figura 1.2: Desplazamiento de una bola a través de una curva cicloide.

Siendo 2a la diferencia de alturas entre A y B y 2 veces el radio del círculo con el que se creo la curva cicloidal.

Seguidamente comparamos muy brevemente el péndulo cicloidal con el péndulo simple. En el péndulo cicloidal el período es el mismo independientemente de la amplitud, por tanto, es isócrono; además será igual al período del péndulo simple cuando tengan la misma longitud y estén oscilando en pequeñas amplitudes. Por lo que podemos concluir que el periodo del péndulo cicloidal no depende de la amplitud angular, mientras que el período del péndulo simple, si lo hace.

- *Mecanismo biela-manivela*:
  El mecanismo biela-manivela es un mecanismo compuesto por un elemento giratorio llamado manivela, que va conectado a un barra rígida llamada biela, la cual se desplaza describiendo un movimiento de vaivén arrastrada por la manivela. Así se consigue que el movimiento de giro que produce la manivela se transforme en el movimiento rectilíneo alternativo que produce la biela. Es un mecanismo reversible, es decir, la manivela mueve la biela o a la inversa. Este mecanismo es ampliamente utilizado, principalmente en las máquinas de émbolos, tanto en motores de vapor (poco utilizados hoy en día), de explosión y de combustión interna, como en compresores.

La idea del presente proyecto proviene de un fenómeno físico que aparece con frecuencia en la literatura científica mecánica (específicamente en el tema de las oscilaciones pequeñas); se trata de la modelación y comportamiento de movimientos oscilatorios acoplados, que en diversas situaciones consiste en dos péndulos acoplados; por tanto, tendremos en todas las situaciones un sistema con dos grados de libertad, siendo éstos los ángulos que definen la posición en todo instante de cada uno de los péndulos que forman el sistema.

Existen diferentes formas de realizar el acoplamiento de dos péndulos. El caso más sencillo es el péndulo doble que se muestra en la figura 1.3, donde podemos ver que el segundo péndulo acopla el extremo libre de su varilla a la masa que cuelga en el primer péndulo; otro caso de acoplamiento, mostrado en el lado derecho de la figura 1.3, sería el de un resorte colocado entre las varillas de cada uno de los péndulos.

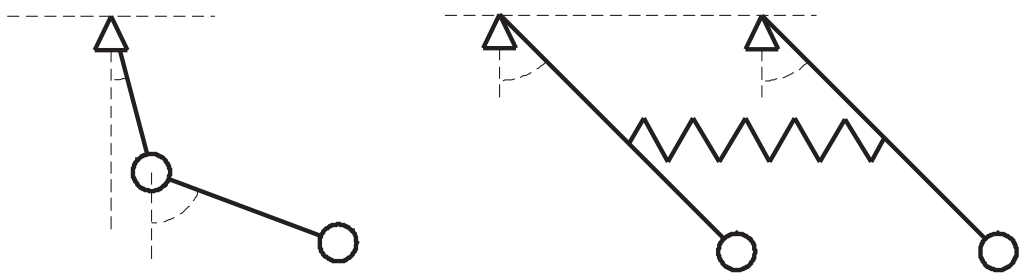


Figura 1.3: Ejemplos de péndulos acoplados.

Para el presente proyecto hemos escogido una nueva variante del acoplamiento de dos péndulos, Fig. 1.4, realizando dicho acoplamiento mediante un mecanismo biela-manivela, ya que en una primera fase del mismo, búsqueda de información, no hemos sido capaces de encontrar literatura científica que tratará un modelo como en el que pretendemos estudiar.

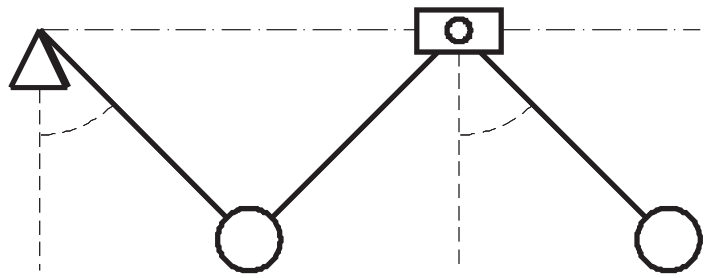


Figura 1.4: Modelo del sistema.

Objetivos del proyecto.

En el estudio de nuestro sistema habrá dos partes bien diferenciadas, una parte analítica y otra numérica; nos centraremos en esta última, ya que debido a la complejidad de las ecuaciones mediante métodos analíticos podemos llegar a conclusiones cualitativas más que cuantitativas.

Los objetivos del presente proyecto son los siguientes:

- En la parte analítica:

  → Estudiar el efecto que tiene sobre la resonancia la relación entre las longitudes del sistema de accionamiento, mecanismo biela-manivela.

  → Obtener las ecuaciones de movimiento del sistema definido por nuestro modelo, Fig 1.4, utilizando la formulación lagrangiana.

  → A partir de las ecuaciones de movimiento obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema, así como las posiciones de equilibrio correspondientes.

  → Cálculo de la curva representativa de resonancia 2:1 en nuestro sistema.

- En la parte numérica:

  → Aprender el manejo del software de continuación numérica AUTO2000.

→ Mediante el software señalado realizar un estudio de las situaciones de equilibrio correspondientes de nuestro sistema, estudiando la estabilidad en cada uno de ellas.

→ A partir de una posición de equilibrio estable obtener soluciones periódicas estables e inestables, representando gráficamente su evolución en función de las coordenadas cartesianas.

Capítulo 2

Estudio analítico del sistema

En este capítulo, se va realizar como su propio nombre indica el estudio analítico del sistema, cuyo modelo se presenta seguidamente:

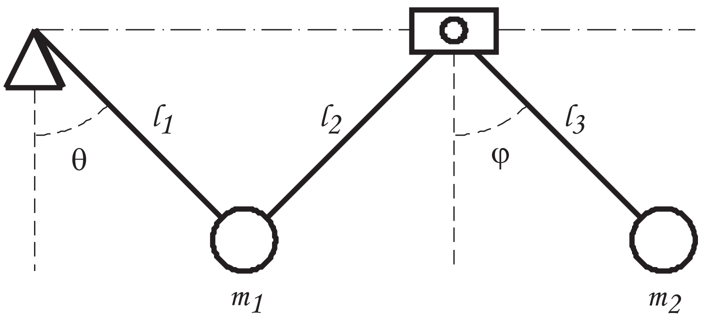


Figura 2.1: Modelo del sistema.

En la figura pueden verse las distintas coordenadas y parámetros que usaremos en nuestro estudio, para la determinación de las ecuaciones que regirán el movimiento del sistema.

2.1. Modelo del sistema.

El modelo escogido para nuestro estudio consta de dos grados de libertad θ y φ, teniendo en cuenta que ambas variables dependerán a su vez del tiempo.

En primer lugar se ha presentado en dos dimensiones el esquema gráfico del modelo (Figura 2.1), en éste se pueden observar los distintos parámetros que se van a emplear para describir las ecuaciones de movimiento del sistema objeto de nuestro estudio.

En el sistema, situado en su totalidad en el plano vertical, se representa el sistema pendular(péndulo) y el mecanismo biela-manivela al que se le acopla.

Está formado por tres barras de longitudes inicialmente distintas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3, que experimentan sendos movimientos de rotación; dos masas, de pesos distintos, m_1 y m_2, la primera de ellas situada en el punto de unión de las barras ℓ_1 y ℓ_2 que permite el giro entre ellas y la segunda en el extremo de la barra ℓ_3; la corredera, con movimiento de traslación en una única dirección, en la que se dará la unión entre las barras ℓ_2 y ℓ_3; y un punto fijo(Δ) en el que se fija el extremo libre de la barra ℓ_1, fijando así nuestro sistema.

En nuestro modelo, tomaremos como hipótesis de partida que las masas, m_1 y m_2, son puntuales y que ninguna de las barras tiene masa, lo cuál simplificará en gran medida el estudio de nuestro problema.

Como ya fue señalado con anterioridad, nuestro sistema viene definido por dos grados de libertad θ y φ, los cuáles definen respectivamente los ángulos que separan la barra ℓ_1 y la barra ℓ_3 de la vertical.

2.2. Relación de longitudes.

Primeramente con la idea de simplificar las ecuaciones, vamos a estudiar el efecto que tiene sobre la resonancia la relación entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2.

2.2.1. Vector de posición.

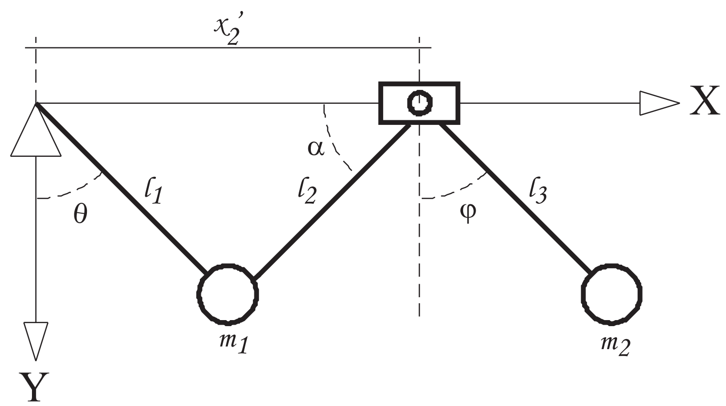


Figura 2.2: Modelo general.

Basándonos en los ejes cartesianos señalados en el esquema anterior, definimos los vectores de posición de cada una de las masas m_1 y m_2.

Para la masa m_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \cdot \sin(\theta) \\ y_1 &= \ell_1 \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para la masa m_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2' + \ell_3 \cdot \sin(\varphi) \\ y_2 &= \ell_3 \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde x_2' se expresa de la forma siguiente:

$$x_2' = \ell_1 \cdot \sin(\theta) + \ell_2 \cdot \cos(\alpha) \tag{2.3}$$

2.2.2. Vector de velocidad.

Para obtener la velocidad de ambas masas en coordenadas cartesianas, basta con derivar las expresiones del vector de posición, en cada una de ellas, con respecto al tiempo,resultando:

Para la masa m_1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y}_1 &= -\ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para la masa m_2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}_2' + \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{y}_2 &= -\ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para expresar $\dot{x}_2'$ se hace uso de relación trigonométrica entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2, observando el esquema del modelo general (Figura 2.2), y de la regla de la cadena para la derivación, consiguiendo así eliminar de su expresión la longitud ℓ_2:

Relación trigonométrica:

$$\frac{\ell_2}{\cos(\theta)} = \frac{\ell_1}{\sin(\alpha)} \tag{2.6}$$

Como puede verse en la relación anterior el ángulo α es función de θ, ($\alpha = \alpha(\theta)$) por lo que vamos a despejar en la ecuación (2.6) el $\sin(\alpha)$ y derivarlo con respecto a θ, aplicando la regla de la cadena:

$$\sin(\alpha)=\frac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\cos(\theta) \tag{2.7}$$

Derivando y despejando $\dfrac{d\alpha}{d\theta}$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{d\theta}&=-\frac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\sin(\theta)\\ \frac{d\alpha}{d\theta}&=-\frac{\ell_1}{\ell_2}\cdot\frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ya estamos en condiciones de derivar la expresión (2.3) respecto a θ, aplicando la regla de la cadena, resultando:

$$\dot{x}_2'=\ell_1\cdot\dot{\theta}\cdot\cos(\theta)-\ell_2\cdot\frac{d\alpha}{d\theta}\cdot\dot{\theta}\cdot\sin(\alpha) \tag{2.9}$$

Ahora sustituimos en la expresión anterior (2.9), la obtenida en (2.8):

$$\dot{x}_2'=\ell_1\cdot\dot{\theta}\cdot\cos(\theta)-\ell_2\cdot\left(-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)\cdot\frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)}\cdot\dot{\theta}\cdot\sin(\alpha) \tag{2.10}$$

Finalmente operamos resultando la expresión de $\dot{x}_2'$, que estábamos buscando, ya que se ha conseguido eliminar la longitud ℓ_2 de la misma:

$$\dot{x}_2'=\ell_1\cdot\dot{\theta}\cdot\cos(\theta)+\ell_1\cdot\frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)}\cdot\dot{\theta}\cdot\sin(\alpha) \tag{2.11}$$

Además de la expresión vectorial de la velocidad, también calcularemos el cuadrado del módulo de la misma, ya que nos será de utilidad en el cálculo de la energía cinética. Dicho valor viene dado en función de las velocidades cartesianas para cada una de las masas por $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Su valor para cada una de las masas es el siguiente:

Para la masa m_1:

$$v_1^2=\ell_1^2\cdot\dot{\theta}^2 \tag{2.12}$$

Para la masa m_2:

$$v_2^2 = \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{x}_2'^2 + 2 \cdot \dot{x}_2' \cdot \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \tag{2.13}$$

Y sustituyendo las expresiones (2.7) y (2.11), en la anterior,resulta para la masa m_2:

$$\begin{aligned} v_2^2 =& \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \ell_1^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_1^4}{\ell_2^2} \cdot \frac{\cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \dot{\theta}^2 \\ &+2 \cdot \frac{\ell_1^3}{\ell_2} \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} + 2 \cdot \ell_3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \Bigg(\ell_1 \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta} \\ &+ \frac{\ell_1^2}{\ell_2} \cdot \frac{\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \cdot \dot{\theta} \Bigg) \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.2.3. Energía cinética del sistema.

La expresión de la energía cinética viene dada por $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Sustituyendo m y v^2 por las expresiones correspondientes para cada una de las masas m_1, v_1^2 y m_2, v_2^2 respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} T =& \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \Bigg[\ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \\ &+ \ell_1^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{\ell_1^4}{\ell_2^2} \cdot \frac{\cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\theta)}{\cos^2(\alpha)} \cdot \dot{\theta}^2 + 2 \cdot \frac{\ell_1^3}{\ell_2} \cdot \cos^2(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \\ &+ 2 \cdot \ell_3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot \left(\ell_1 \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta} + \frac{\ell_1^2}{\ell_2} \cdot \frac{\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\alpha)} \cdot \dot{\theta} \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Para ver el efecto que tiene la relación de longitudes, le aplicamos a la expresión de la energía cinética (2.15), la aproximación cuadrática que resulta haciendo:

$$\begin{aligned} &\cos(a) \approx 1 \\ &\sin(a) \approx 0, \text{ con } a \to 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Con lo que obtenemos la siguiente expresión para la energía cinética del sistema:

$$T=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot \ell_1^2\cdot \dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\left(\ell_3^2\cdot\dot{\varphi}^2+\ell_1^2\cdot\dot{\theta}^2+2\cdot\ell_1\cdot\ell_3\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\theta}\right) \tag{2.17}$$

Como se puede ver la longitud ℓ_2 no aparece en la expresión de la energía cinética del sistema (2.17) al tener en cuenta la aproximación (2.16), anteriormente señalada, de igual manera tampoco aparecerá en la energía potencial del sistema.

Por lo tanto para este proyecto la relación entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2 no será relevante, ya que no influirá en la resonancia que sufre el sistema por lo que no tampoco crea movimientos interesantes para el estudio que en este proyecto desea abordarse.

Por todo lo anterior se toma como relación entre las longitudes ℓ_1 y ℓ_2, para nuestro estudio cinemático, el valor 1.

$$\frac{\ell_1}{\ell_2}=1 \tag{2.18}$$

2.3. Ecuaciones de movimiento.

En este apartado, hallaremos las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de nuestro modelo simplificado empleando las *ecuaciones de Lagrange*, que se muestra en la siguiente figura.

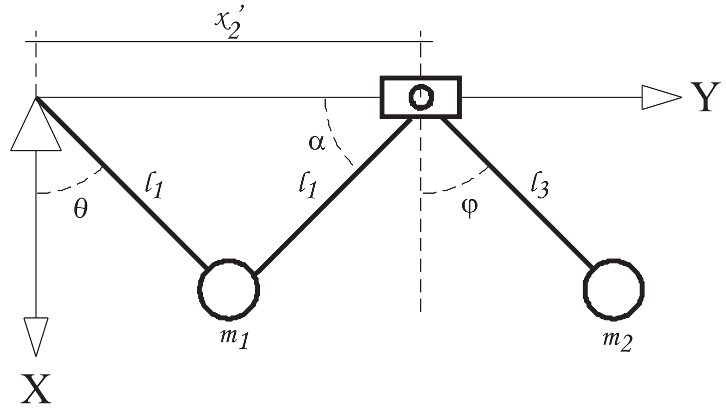


Figura 2.3: Modelo simplificado.

2.3.1. Vector de posición.

Basándonos en los ejes cartesianos señalados en el esquema anterior, definimos los vectores de posición de cada una de las masas m_1 y m_2.

Para la masa m_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell_1 \cdot \sin(\theta) \\ y_1 &= \ell_1 \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Para la masa m_2:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2' + \ell_3 \cdot \sin(\varphi) \\ y_2 &= \ell_3 \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Donde x_2' se expresa de la forma siguiente:

$$x_2' = \ell_1 \cdot \sin(\theta) + \ell_1 \cdot \cos(\alpha) \tag{2.21}$$

Aplicaremos a la expresión anterior (2.21), la relación trigonométrica siguiente:

$$\frac{\ell_1}{\cos(\theta)} = \frac{\ell_1}{\sin(\alpha)} \tag{2.22}$$

Dicha relación se obtiene de la observación del modelo simplificado (Figura 2.3), pudiéndose escribir en la forma:

$$\begin{aligned} sin(\alpha) &= \cos(\theta) \\ cos(\alpha) &= \sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.23}$$

La expresión (2.21), teniendo en cuenta la relación mostrada en (2.23), nos queda de la siguiente manera:

$$x_2' = 2 \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta) \tag{2.24}$$

2.3.2. Vector de velocidad.

Para obtener la velocidad de ambas masas en coordenadas cartesianas, basta con derivar las expresiones del vector de posición, en cada una de ellas, con respecto al tiempo,resultando:

Para la masa m_1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y}_1 &= -\ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Para la masa m_2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}'_2 + \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{y}_2 &= -\ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donde $\dot{x}'_2$ viene dado como sigue, tras su derivación:

$$\dot{x}'_2 = 2 \cdot \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \tag{2.27}$$

Y sustituyendo la expresión de $\dot{x}'_2$ (2.27) en la expresión de la coordenada $\dot{x}_2$ (2.26) del vector velocidad de la masa m_2, llegamos a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= 2 \cdot \ell_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) + \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ \dot{y}_2 &= -\ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Además de la expresión vectorial de la velocidad, también calcularemos el cuadrado del módulo de la misma, ya que nos será de utilidad en el cálculo de la energía cinética. Dicho valor viene dado en función de las velocidades cartesianas para cada una de las masas por $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Su valor para cada una de las masas es el siguiente:

Para la masa m_1:

$$v_1^2 = \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \tag{2.29}$$

Para la masa m_2:

$$v_2^2 = \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 4 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos^2(\theta) + 4 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \tag{2.30}$$

2.3.3. Energía cinética del sistema.

La expresión de la energía cinética viene dada por $T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Sustituyendo m y v^2 por las expresiones correspondientes para cada una de las masas m_1, v_1^2 y m_2, v_2^2 respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} T=&\tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \Big(\ell_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 4 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ &+4 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \Big) \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.3.4. Energía potencial.

La energía potencial varía únicamente con la altura de m, ya que en el apartado (2.1), establecimos como hipótesis que las barras de nuestro modelo no tenían masa, y que las únicas masas a considerar serían m_1 y m_2.

La expresión de la energía potencial es $V = m \cdot g \cdot \Delta h$, donde el Δh la diferencia de altura que experimenta cada una de las masas m_1 y m_2, al dejar su posición de reposo, dada para la nulidad de los ángulos ($\theta = \varphi = 0$), ya que hemos tomado dicha posición como origen de potencial en cada una de las masas. Consecuencia directa de tomar así el origen es que la energía potencial siempre será positiva. Su valor es el siguiente:

$$V = m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \Big(1 - \cos(\theta)\Big) + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \Big(1 - \cos(\varphi)\Big) \tag{2.32}$$

2.3.5. Ecuaciones de Lagrange.

Una vez halladas las dos energías que intervendrán en las *ecuaciones de Lagrange*, planteamos nuestras ecuaciones de movimiento para cada uno de nuestros grados de libertad θ y φ.

En primer lugar, escribimos las ecuaciones de Lagrange para una coordenada generalizada q y en función de las energías cinética y potencial.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{2.33}$$

Ahora particularizamos la ecuación (2.33) para nuestros dos grados de libertad θ y φ.

Grado de libertad θ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos^2(\theta)$$
$$+2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)\right)$$
$$+2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \Big(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$-\dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)\Big)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta)\sin(\theta) - 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell 3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)$$

Sustituyendo cada uno de los términos anteriores en las ecuaciones de Lagrange (2.33) se obtiene, para el grado de libertad θ, la ecuación diferencial siguiente:

$$\begin{aligned}
0 = {} & m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \left(\ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)\right) \\
& +2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta} \cdot \dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\varphi) - \ddot{\varphi}^2 \cdot \cos(\theta)\sin(\varphi)\right) \\
& +4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta)\sin(\theta) + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell 3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\
& +m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Grado de libertad φ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \dot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \Big(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$-\dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)\Big)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = m_2 \cdot g \cdot \ell_3 \cdot \sin(\varphi)$$

Sustituyendo cada uno de los términos anteriores en las ecuaciones de Lagrange (2.33) se obtiene, para el grado de libertad φ, la ecuación diferencial siguiente:

$$0 = m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \Big(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$
$$-\dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)\Big) + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$
$$+ m_2 \cdot g \cdot \ell_3 \cdot \sin(\varphi) \tag{2.35}$$

Las ecuaciones de Lagrange nos han permitido obtener las dos ecuaciones de movimiento (2.34) y (2.35) correspondientes a los dos grados de libertad θ y φ. En dichas ecuaciones, se pueden simplificar términos semejantes, obteniendo finalmente las dos ecuaciones de movimiento de segundo orden que regirán nuestro sistema:

$$
\begin{aligned}
0= & m_1 \cdot \ell_1^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot \ell_1^2 \Big(\ddot{\theta} \cdot \cos^2(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \Big) \\
& +2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \Big(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \ddot{\varphi}^2 \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi) \Big) \\
& +m_1 \cdot g \cdot \ell_1 \cdot \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

$$
\begin{aligned}
0= & m_2 \cdot \ell_3^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot m_2 \cdot \ell_1 \cdot \ell_3 \cdot \Big(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \Big) \\
& +m_2 \cdot g \cdot \ell_3 \cdot \sin(\varphi)
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

En las ecuaciones anteriores (2.36) y (2.37) ha de notarse la existencia de términos cruzados, debido a la que en el movimiento del sistema los dos grados de libertad θ y φ permanecen relacionados entre si.

2.3.6. Ecuaciones diferenciales adimensionalizadas.

El siguiente paso es adimensionalizar el tiempo en las ecuaciones (2.36) y (2.37), con lo cuál obtenemos dos parámetros adimensionales.

Sea $\tau = \omega \cdot t$ con $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell_1}$, las ecuaciones quedan en la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
0= & \ddot{\theta} + 4 \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \Big(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \Big) \\
& +2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \Big(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \Big) + \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

$$
0= \mu \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \Big(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta) \Big) + \sin(\varphi) \tag{2.39}
$$

Donde μ y ν son:

- *Relación de longitudes* $\mu = \dfrac{\ell_3}{\ell_1}$.
  En este parámetro comparamos las longitudes de los tres brazos del sistema, dos de ellos de longitudes iguales ℓ_1 pertenecientes al mecanismo biela-manivela y el otro de longitud ℓ_3 perteneciente al péndulo.

- *Relación de masas* $\nu = \dfrac{m_2}{m_1}$.
  Este parámetro comparamos las dos masas puntuales de nuestro sistema m_1 y m_2

2.4. Ecuaciones y valores de equilibrio.

A partir de las ecuaciones de movimiento adimensionales (2.38) y (2.39), obtenidas en el apartado anterior, calculamos las que ecuaciones que cumplirán los distintos puntos de equilibrio de nuestro problema. Para encontrar dichas ecuaciones la única condición a imponer es que las coordenadas generalizas en nuestras ecuaciones θ y φ, permanezcan constantes con el tiempo, matemáticamente se expresa de la forma siguiente:

$$\dot{q} = \ddot{q} = 0, \qquad\qquad \text{con } q = \theta, \varphi.$$

Imponiendo esta condición, las ecuaciones de equilibrio nos vienen dadas por:

$$\begin{aligned} sin(\theta) &= 0 \\ sin(\varphi) &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Por tanto los valores de las coordenadas generalizadas que cumplen nuestro equilibrio, expresados en radianes, serán:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \theta = 0, \pi \\ \sin(\varphi) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \varphi = 0, \pi \end{aligned} \tag{2.41}$$

Lo que nos presenta cuatro posibles situaciones de equilibrio, dadas por las combinaciones dos a dos de las soluciones. Debemos notar que estas cuatro posibles situaciones de equilibrio se encuentran todas en la vertical del punto fijo de nuestro sistema (situaciones fácilmente imaginables por el lector con lo que no se cree oportuno el uso de un esquema gráfico que las represente).

2.5. Estudio de la resonancia.

En este apartado calculamos la curva de resonancia 2:1; para que se dé dicha curva los autovalores de nuestro sistema deben de ser una pareja de autovalores conjugados imaginarios puros. Además al tratarse de la resonancia 2:1 los valores de la partes imaginarias serán el doble, en módulo, entre sí. Dadas las cuatro posibles situaciones de equilibrio, señaladas antes, nos centramos en la situación $\theta = \varphi = 0$,ya que es la única que cumple esta condición, como veremos en el próximo capítulo,

Debido a que las coordenadas generalizas son ambas nulas,para la situación de equilibrio elegida, podemos linealizar las ecuaciones de movimiento adimensionales (2.38) y (2.39), obtenidas en el apartado (2.3.6), con la aproximación para ángulos pequeños. Dicha aproximación se expresa matemáticamente, para un ángulo genérico a, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &\cos(a)\approx 1 \\ &\sin(a)\approx 0, \text{ con } a \to 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Aplicando la aproximación que acabamos de señalar, obtenemos las ecuaciones siguientes (en las que ya se han despreciado los términos superiores al segundo orden):

$$\begin{aligned} (1 + 4 \cdot \nu) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \nu \cdot \mu \cdot \ddot{\varphi} + \theta = 0 \\ 2 \cdot \ddot{\theta} + \mu \cdot \ddot{\varphi} + \varphi = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Expresándolo matricialmente, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 + 4 \cdot \nu & 2 \cdot \mu \cdot \nu \\ 2 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = 0 \tag{2.44}$$

Para el cálculo de la curva correspondiente, se van a ensayar en el sistema anterior (2.44) soluciones del tipo:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = e^{\lambda \cdot\, t} \cdot\ v \tag{2.45}$$

Donde $\lambda = \omega \cdot i$ y v representan los autovalores y autovectores correspondiente al sistema (2.44) respectivamente.

Para ello es necesario derivar dos veces (2.45),obteniendo la expresión siguiente:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot \ t} \cdot \ v \tag{2.46}$$

Ya estamos en disposición de aplicar la solución elegida al sistema (2.44); para ello sustituimos en éste las expresiones antes obtenidas (2.45) y (2.46). De esta forma obtenemos la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1+4\cdot\nu & 2\cdot\mu\cdot\nu \\ 2 & \mu \end{bmatrix} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot \ t} \cdot \ v + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda \cdot \ t} \cdot \ v = 0 \tag{2.47}$$

La ecuación matricial (2.47) se puede agrupar en la forma que se presenta en la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} (1+4\cdot\nu)\cdot\lambda^2+1 & 2\cdot\mu\cdot\nu\cdot\lambda^2 \\ 2\cdot\lambda^2 & \lambda^2\cdot\mu+1 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda \cdot \ t} \cdot \ v = 0 \tag{2.48}$$

El determinante correspondiente, a la expresión (2.48), es:

$$\begin{vmatrix} (1+4\cdot\nu)\cdot\lambda^2+1 & 2\cdot\mu\cdot\nu\cdot\lambda^2 \\ 2\cdot\lambda^2 & \lambda^2\cdot\mu+1 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.49}$$

Operando el determinante anterior (2.49), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\mu\cdot\lambda^4 + \Big(1+4\cdot\nu+\mu\Big)\cdot\lambda^2 + 1 = 0 \tag{2.50}$$

Las potencias de los autovalores pueden expresarse, a partir de su expresión inicial, de la forma siguiente:

$$\lambda = \omega\cdot i \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = -\omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^4 = \omega^4 \tag{2.51}$$

Vamos a sustituir en (2.50) el valor de las potencias de los autovalores (2.51), quedándonos en la ecuación sólo con valores reales de la parte imaginaria de los autovalores:

$$\mu \cdot \omega^4 - \Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big) \cdot \omega^2 + 1 = 0 \qquad (2.52)$$

Para poder resolver con la expresión de la ecuación de segundo orden, llamamos $S = \omega^2$ y $S^2 = \omega^4$, y resolviendo en la forma indicada se obtiene,para S, la expresión siguiente:

$$S = \frac{\Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big) \pm \sqrt{\Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big)^2 - 4 \cdot \mu}}{2 \cdot \mu}$$

En la expresión anterior, al contener los dos parámetros μ y ν, se dificulta su resolución analítica. Para salvar este inconveniente, recordamos que el objeto de nuestro estudio es la resonancia 2:1, debido a lo cual sabemos la solución de la ecuación para ésta, siendo $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 1$, correspondiendo ω_1 y ω_2 a tomar en la expresión anterior el signo positivo o negativo de la raíz, respectivamente.

Ahora ya estamos en condiciones de hallar la curva en ejes μ y ν, señalada al principio de este apartado. Para ello vamos a dividir las dos soluciones, haciendo uso de la expresión anterior, obteniendo, tras simplificar adecuadamente, lo siguiente:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{\Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big) \pm \sqrt{\Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big)^2 - 4 \cdot \mu}}{\Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big) \pm \sqrt{\Big(1 + 4 \cdot \nu + \mu\Big)^2 - 4 \cdot \mu}} = 4$$

Si operamos la expresión anterior y despejamos el valor de μ, en función de ν, se obtiene la expresión siguiente:

$$\mu = \frac{-\Big(8 \cdot \nu - \frac{17}{4}\Big) \pm \sqrt{\Big(8 \cdot \nu - \frac{17}{4}\Big)^2 - 4 \cdot \Big(16 \cdot \nu^2 + 8 \cdot \nu + 1\Big)}}{2}$$

La expresión anterior nos permite tener para cada valor de ν un par de valores de μ, correspondientes a tomar el signo positivo o negativo de la raíz. Seguidamente mostramos su representación gráfica:

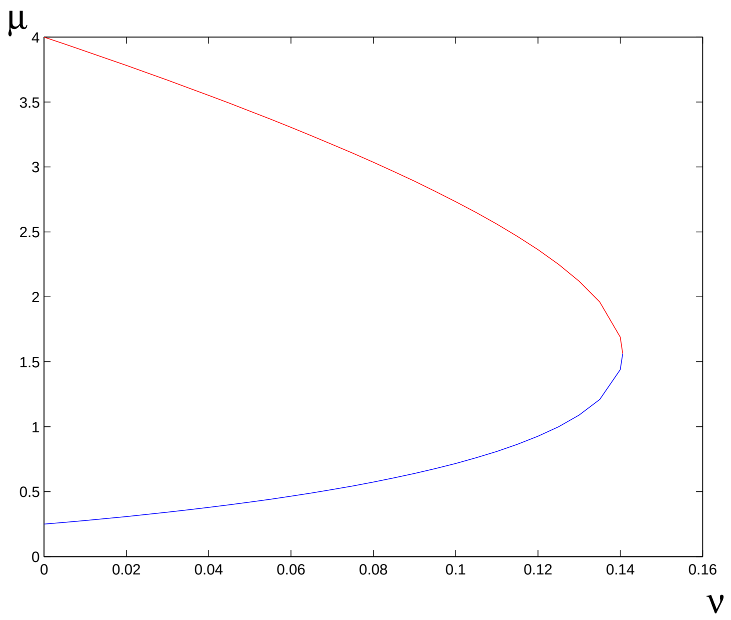


Figura 2.4: Curva de resonancia 2:1.

En la gráfica anterior hemos representado tanto la rama correspondiente a tomar el signo positivo, en rojo, como la rama correspondiente al signo negativo, en azul.

Capítulo 3

Continuación numérica de equilibrios.

En el capítulo anterior, obtuvimos las ecuaciones diferenciales de movimiento, así como una curva representativa de la resonancia 2:1 y las posibles situaciones de equilibrio para nuestro problema, todo ello de forma analítica.

En este capítulo, mediante el programa de continuación numérica AUTO2000, y a partir de las ecuaciones diferenciales de movimiento y de la curva representativa para la resonancia 2:1, vamos a realizar en primer lugar un estudio de las situaciones de equilibrio, y a partir de éste pasaremos a la continuación numérica de órbitas periódicas estudiando para ellas el comportamiento de nuestro sistema.

3.1. Introducción.

Para realizar la continuación numérica de una función escalar o vectorial, lo primero que debemos saber es que el número de incógnitas sólo puede ser uno más que el de ecuaciones, es decir, que sólo podemos tener un parámetro de continuación. Esto se debe, a que la continuación numérica, se encarga de evaluar nuestra función para cada valor del parámetro, y así se va obteniendo una serie de puntos que definen nuestros equilibrios u órbitas periódicas, según sea el caso. Una excepción al caso anterior, son los puntos especiales como *puntos límite*, *puntos de bifurcación*, *puntos de Hopf*, etc, ya que cuando se continúa uno de estos puntos, implícitamente se impone una ecuación más (un autovalor cero en caso de puntos límite, por ejemplo), lo cuál nos permite variar dos parámetros en lugar de uno sólo.

En el caso concreto de nuestro sistema, las ecuaciones que rigen el movimiento del péndulo son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden con cuatro variables (φ, θ, μ y ν):

$$\begin{aligned} 0=&\ddot{\theta} + 4 \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta)\right) \\ &+2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi)\right) + \sin(\theta) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$0=\mu \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta)\right) + \sin(\varphi) \tag{3.2}$$

Para poder utilizar el programa de continuación numérica anteriormente señalado, debemos preparar el sistema de ecuaciones que a éste se le introducirá. Deberemos tener un sistema de ecuaciones en el que las ecuaciones sean de primer orden.

Para ello las dos ecuaciones (3.1) y (3.2), con derivadas de segundo orden, se pueden transformar en cuatro ecuaciones en derivadas primeras introduciendo dos variables:

$$\begin{aligned} \psi &= \dot{\varphi} \\ \Theta &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

Realizando este cambio de variable se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0=&\dot{\Theta} + 4 \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\dot{\Theta} \cdot \cos(\theta) - \Theta^2 \cdot \sin(\theta)\right) \\ &+2 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) - \psi^2 \cdot \sin(\varphi)\right) + \sin(\theta) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$0=\mu \cdot \dot{\psi} + 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\dot{\Theta} \cdot \cos(\theta) - \Theta^2 \cdot \sin(\theta)\right) + \sin(\varphi) \tag{3.4}$$

Debemos despejar $\dot{\Theta}$ y $\dot{\psi}$ de las ecuaciones anteriores. Como en ambas ecuaciones aparecen $\dot{\Theta}$ y $\dot{\psi}$, para obtener las ecuaciones deseadas, lo que hacemos es despejar de ambas una de las variables $\dot{\Theta}$ o $\dot{\psi}$ e igualar, seguidamente de la ecuación resultante se despeja la otra variable $\dot{\Theta}$ o $\dot{\psi}$, según el caso, obteniendo así una ecuación en la forma deseada. Análogamente se haría para la otra variable. No se expone el desarrollo matemáticamente intermedio, por pensar que puede resultar pesado para el lector, y directamente exponemos las dos ecuaciones resultantes:

$$\dot{\Theta}=\frac{\left(4\cdot\mu\cdot\nu\cdot\cos(\theta)\cdot\sin^2(\varphi)\right)\cdot\Theta^2+\left(2\cdot\mu^2\cdot\nu\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\right)\cdot\psi^2}{\mu\cdot\left(1+4\cdot\nu\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\varphi)\right)}$$
$$\cdot\frac{\mu\cdot\left(2\cdot\nu\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi)\sin(\varphi)-\sin(\theta)\right)}{\mu\cdot\left(1+4\cdot\nu\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\varphi)\right)} \tag{3.5}$$

$$\dot{\psi}=\frac{\left(4\cdot\mu\cdot\nu\cos^2(\theta)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)\right)\cdot\psi^2-\left(2\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi)\right)\cdot\Theta^2}{-\mu\cdot\left(1+4\cdot\nu\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\varphi)\right)}$$
$$-\frac{\left(2\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)-\sin(\varphi)-4\cdot\nu\cos^2(\theta)\cdot\sin(\varphi)\right)}{-\mu\cdot\left(1+4\cdot\nu\cdot\cos^2(\theta)\cdot\sin^2(\varphi)\right)} \tag{3.6}$$

Con lo que el sistema de ecuaciones para la continuación numérica queda como sigue:

$$\dot{\theta}=\Theta \tag{3.7}$$

$$\dot{\varphi}=\psi \tag{3.8}$$

$$\dot{\Theta} = \frac{\Big(4 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^2(\varphi)\Big) \cdot \Theta^2 + \Big(2 \cdot \mu^2 \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)\Big) \cdot \psi^2}{\mu \cdot \Big(1 + 4 \cdot \nu \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi)\Big)} \cdot \frac{\mu \cdot \Big(2 \cdot \nu \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - \sin(\theta)\Big)}{\mu \cdot \Big(1 + 4 \cdot \nu \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi)\Big)} \tag{3.9}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\Big(4 \cdot \mu \cdot \nu \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)\Big) \cdot \psi^2 - \Big(2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)\Big) \cdot \Theta^2}{-\mu \cdot \Big(1 + 4 \cdot \nu \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi)\Big)} - \frac{\Big(2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) - 4 \cdot \nu \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin(\varphi)\Big)}{-\mu \cdot \Big(1 + 4 \cdot \nu \cdot \cos^2(\theta) \cdot \sin^2(\varphi)\Big)} \tag{3.10}$$

Ya tenemos el sistema preparado para realizar la continuación numérica, así en el siguiente apartado explicamos el funcionamiento del programa utilizado, realizando la continuación en apartados posteriores.

3.2. Funcionamiento de AUTO2000.

AUTO2000 es el software de continuación numérica que manejaremos en el presente proyecto. En este apartado explicaremos básicamente, los ficheros que hay que introducirle a AUTO para su funcionamiento, las órdenes necesarias para que funcione y los ficheros que genera después de la continuación. Posteriormente, en los apartados sucesivos, iremos particularizando todo ello para nuestro sistema.

El funcionamiento de AUTO se basa en dos tipos de archivo:

Fichero xxx.c contiene varias subrutinas en C, en las que se introducen las ecuaciones diferenciales del movimiento, así como las condiciones iniciales tales como un punto de equilibrio, las condiciones de contorno, etc...

Fichero c.xxx en el que se refleja la dimensión del sistema, los parámetros a continuar, las tolerancias admisibles, el número de iteraciones, etc...

Vamos a mostrar un ejemplo de cada uno de estos ficheros y daremos unas nociones básicas de los parámetros que hay que introducirles.

Para empezar, mostraremos un fichero tipo **xxx.c** a modo de ejemplo y veremos como funciona.

```
#include "auto_f2c.h" /*
--------------------------------------------------------------*/ /*
--------------------------------------------------------------*/

int func (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
          const doublereal *par, integer ijac,
          doublereal *f, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp) {
  doublereal phi,theta,psi,Theta,mu,nu;

/*...*/
  phi = u[0];
  theta = u[1];
  psi = u[2];
  Theta = u[3];

  mu=par[0];
  nu=par[1];


  f[0]= psi;

  f[1]= Theta;

  f[2]= ((4*mu*nu*cos(theta)*cos(theta)*sin(theta)*cos(phi))
        *psi*psi-(2*sin(theta)*cos(phi))*Theta*Theta
        -(2*cos(theta)*sin(theta)*cos(phi)-sin(phi)
        -4*nu*cos(theta)*cos(theta)*sin(phi)))/(-mu
        *(1+4*nu*cos(theta)*cos(theta)*sin(phi)*sin(phi)));

  f[3]= ((4*mu*nu*cos(theta)*sin(theta)*sin(phi)*sin(phi))
```

```
        *Theta*Theta+(2*mu*mu*nu*cos(theta)*sin(theta))
        *psi*psi+(mu*(2*nu*cos(theta)*cos(phi)*sin(phi)
        -sin(theta))))/(mu*(1+4*nu*cos(theta)*cos(theta)
        *sin(phi)*sin(phi)));

  return 0;
}



/* ------------------------------------------------------------*/
/* ------------------------------------------------------------*/
int stpnt (integer ndim, doublereal t,
           doublereal *u, doublereal *par) {



  /* Parámetros iniciales */
  par[0] = (doublereal)0.5;
  par[1] = (doublereal)2.0;

  /* Solución inicial */

  u[0] = (doublereal)0.0;
  u[1] = (doublereal)0.0;
  u[2] = (doublereal)0.0;
  u[3] = (doublereal)0.0;

  return 0;
}


/* Las siguientes subrutinas no son usadas aquí, */ /* pero
 deben aparecer en el fichero. */

/* ------------------------------------------------------------*/
/* ------------------------------------------------------------*/
int bcnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
          integer nbc, const doublereal *u0, const doublereal
          *Teta, integer ijac, doublereal *fb, doublereal *dbc) {
  return 0;
```

```
} /*
--------------------------------------------------------------*/ /*
--------------------------------------------------------------*/
int icnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
          integer nint, const doublereal *u, const doublereal
          *uold, const doublereal *udot, const doublereal *upold,
          integer ijac, doublereal *fi, doublereal *dint) {
    return 0;
} /*
--------------------------------------------------------------*/ /*
--------------------------------------------------------------*/
int fopt (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
          const doublereal *par, integer ijac,
          doublereal *fs, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp) {
    return 0;
} /*
--------------------------------------------------------------*/ /*
--------------------------------------------------------------*/
int pvls (integer ndim, const doublereal *u,
          doublereal *par) {
    return 0;
} /*
--------------------------------------------------------------*/ /*
--------------------------------------------------------------*/
```

En este fichero, podemos distinguir dos funciones:

func es la encargada de pasar a AUTO las ecuaciones diferenciales y de definir las variables independientes y los parámetros.

stpnt es la función que AUTO emplea cuando se le indica que comience la continuación a partir de una solución inicial.

Como hemos dicho antes, además de las funciones **func** y **stpnt**, existen cuatro más (**bcnd**, **icnd**, **fopt** y **pvls**) que se utilizan cuando se definen condiciones de contorno, condiciones de integración, etc. . . y que, aunque no contengan nada, deben incluirse en este fichero.

Este fichero, sólo es necesario modificarlo si se quiere partir de otra solución inicial, para lo cuál tendríamos que variar únicamente la función **stpnt**. En cualquier otro caso, al permanecer las ecuaciones diferenciales inalterables, no sería necesaria su modificación.

Una vez mostrado un fichero tipo **xxx.c**, explicaremos el otro fichero necesario para trabajar con AUTO, el **c.xxx**.

Este fichero será el que dé a AUTO las condiciones en las que debe realizar la continuación de las ecuaciones definidas en **xxx.c**. Veamos un ejemplo:

```
4 1 0 1                   NDIM,IPS,IRS,ILP
2 0 1                     NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
100 4 3 1 1 0 0 0         NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
180 0 100 0 100           NMX,RL0,RL1,A0,A1
5 5 2 8 7 5 0             NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-7 1e-7 1e-5            EPSL,EPSU,EPSS
0.001 0.001 0.01 1        DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0                         NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0                         NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0                         NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
```

Vamos a explicar los parámetros más importantes de este fichero:

- **NDIM** indica la dimensión del sistema de ecuaciones. En el caso que nos aborda tenemos cuatro ecuaciones en derivadas primeras.

- **IPS** define el tipo de problema. Nosotros nos moveremos entre dos de sus valores:

  - IPS=1 Soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales ordinarias con detección de bifurcaciones de Hopf.
  - IPS=2 Para continuación de soluciones periódicas.

- **IRS** define la etiqueta de la solución donde la continuación comenzará. Si su valor es cero, como en este caso, el programa tomará como solución inicial la indicada en la función stpnt.

- **ILP** tiene dos valores posibles:

  - ILP=0 No detecta los posibles pliegues de la continuación.
  - ILP=1 Detecta los pliegues de la continuación (puntos LP). Es el valor recomendado.

- **NICP** indica el número de parámetros que tiene nuestro sistema. En nuestro caso,inicialmente, son μ y ν, y por ello le hemos asignado a esta variable el valor 2. En realidad, el número de parámetros está definido en el archivo xxx.c con un vector llamado PAR[ ], y en el NICP lo único que indicaremos es cuántos de ellos queremos que aparezcan por pantalla al ejecutar AUTO.

- **ICP** depende del valor que hallamos asignado a NICP. Deberemos indicar qué parámetros serán los que aparecerán en la continuación y según el orden, cuál será el parámetro de continuación principal y cuál el secundario. En nuestro caso, hemos indicado un valor de NICP=2, luego hemos elegido los dos parámetros de continuación; PAR[0] en primer lugar (μ) como parámetro de continuación principal y PAR[1] (ν) como segundo parámetro de continuación.

- **ISP** es el parámetro que controla la detección de puntos de bifurcación (BP), puntos de bifurcación de doble período (PD), etc. Nosotros emplearemos dos valores de esta variable:

  - ISP=1 Este valor detecta puntos de bifurcación (HB) para soluciones que no sean periódicas, y no detecta puntos de bifurcación de doble período (PD).
  - ISP=2 Este valor detecta todos los puntos especiales y es el que emplearemos cuando trabajemos con órbitas periódicas.

- **ISW** indica el tipo de continuación que realizaremos. Nosotros emplearemos tres valores:

  - ISW=1 Se utiliza para continuar equilibrios con un solo parámetro y para trazar una órbita periódica a partir de un punto de Hopf.
  - ISW=2 Se utiliza para continuar puntos límite (PL) y puntos de Hopf (HB), ya que al añadirse implícitamente una ecuación en estos puntos, se nos permite variar un segundo parámetro.
  - ISW=-1 Se utiliza en órbitas periódicas para continuar puntos de bifurcación (BP) y puntos de bifurcación de doble período (PD).

- **NMX** indica el número máximo de iteraciones que le vamos a permitir a la continuación.

- **RL0, RL1** indican el valor mínimo y máximo, respectivamente, que puede tomar el parámetro de continuación principal, en este caso μ.

- **NPR** Si su valor es inferior a NMX, entonces se mostrarán por pantalla los resultados cada NPR iteraciones. Si su valor es igual a NMX, sólo se mostrarán por pantalla los puntos especiales encontrados (dichos puntos también aparecerán en el caso anterior).

- **DS** indica el tamaño de paso normal entre dos puntos de la misma rama. Además, un cambio de signo, provoca que la continuación se realice en sentido contrario.

- **DSMIN, DSMAX** indican en valor absoluto los tamaños de paso mínimo y máximo admisibles entre dos puntos de l misma rama.

Una vez introducidos los ficheros, nos situamos en el directorio donde se encuentran y desde consola ejecutamos el programa escribiendo **auto** (escribir en minúsculas). El resultado será algo parecido a la Figura 3.1.

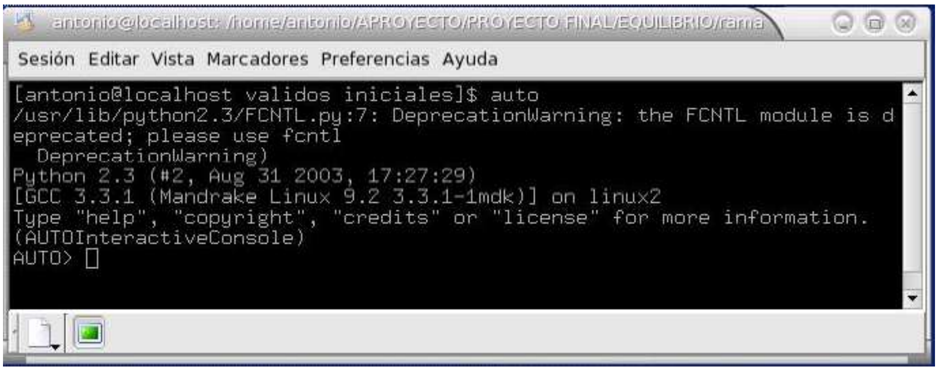


Figura 3.1: Ejecución de AUTO.

Dentro del programa, tenemos que cargar los ficheros **xxx.c** y **c.xxx**, lo cuál se puede hacer de dos formas:

- Cargando primero el fichero de ecuaciones y luego el fichero de constantes:

  `AUTO>ld('xxx') AUTO>r(c='xxx')`

- Cargando los dos ficheros a la vez:

  `AUTO>r(e='xxx',c='xxx')`

Una vez ejecutadas estas órdenes, el programa nos devuelve tres ficheros fort con las extensiones 7, 8 y 9:

fort.7 contiene los valores de los parámetros de continuación para cada una de las iteraciones que nos permitirán dibujar el diagrama de bifurcación.

fort.8 contiene información más extensa de cada una de las órbitas etiquetadas.

fort.9 contiene mensajes de diagnóstico, convergencia de las soluciones, autovalores, etc...

Será por medio de estos tres ficheros que podamos representar gráficamente la continuación y podamos obtener los autovalores.

3.3. Continuación numérica de los equilibrios.

En el capítulo anterior calculamos las distintas situaciones de equilibrio para nuestro sistema. En este apartado, empezaremos recordando dichas situaciones de equilibrio, posteriormente se realizará la continuación numérica, estudiando los autovalores, que nos devuelva el programa AUTO2000, para cada uno de ellos.

3.3.1. Situaciones de equilibrio.

Para facilitar la comprensión de las distintas situaciones de equilibrios, empezamos recordando el modelo de nuestro sistema:

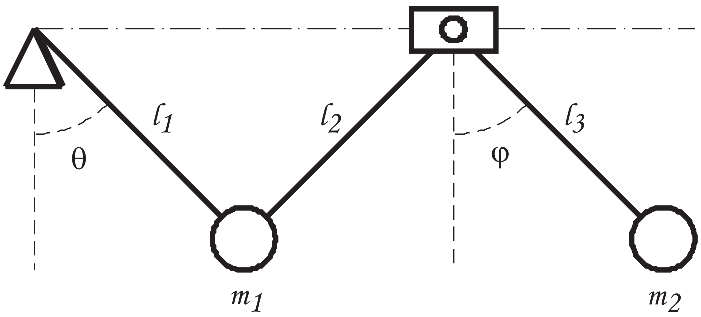


Figura 3.2: Modelo del sistema.

Las situaciones de equilibrio en el sistema anterior, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \theta = 0, \pi \\ \sin(\varphi) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \varphi = 0, \pi \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por lo que las cuatro posiciones de equilibrio, combinando dos a dos los valores de las variables θ y φ, son las siguientes:

1. $\theta = 0$ y $\varphi = 0$
2. $\theta = 0$ y $\varphi = \pi$
3. $\theta = \pi$ y $\varphi = 0$
4. $\theta = \pi$ y $\varphi = \pi$

Como puede verse las cuatro posiciones de equilibrio de nuestro sistema están en el eje vertical, por lo que podemos intuir que los resultados obtenidos para uno de ellos serán representativos para el resto.

3.3.2. Continuación de los equilibrios.

En este apartado, comenzaremos a utilizar AUTO para continuar los equilibrios hallados anteriormente.

En primer lugar, creamos cuatro ficheros llamados **equi1.c**, **equi2.c**, **equi3.c** y **equi4.c**, los cuáles tienen la misma función *func*, ya que todos tienen las mismas ecuaciones, y distinta función *stpnt*, ya que cada uno de ellos corresponde a uno de los equilibrios y tienen distintas condiciones iniciales, que son las distintas situaciones de equilibrio señaladas en el apartado anterior.

Del mismo modo, creamos ahora cuatro ficheros llamados **c.equi1**, **c.equi2**, **c.equi3** y **c.equi4**, los cuáles contienen los parámetros de continuación de AUTO. Estos cuatro ficheros son iguales, pero como ya se dijo en la introducción de este capítulo deben existir por pareja los ficheros. Mostraremos uno de ellos como ejemplo:

```
4 1 0 1                   NDIM,IPS,IRS,ILP
2 0 1                     NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
100 4 3 1 1 0 0 0         NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
180 0 100 0 100           NMX,RL0,RL1,A0,A1
180 5 2 8 7 5 0           NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-7 1e-7 1e-5            EPSL,EPSU,EPSS
0.001 0.001 0.01 1        DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0                         NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0                         NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0                         NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
```

Los parámetros más destacables de este fichero son:

IRS=0 Partimos del equilibrio que nos da la función *stpnt*.

ISW=1 Continuamos un sólo parámetro (en este caso μ).

NMX=180 Haremos un máximo de 180 iteraciones.

NPR=180 Se mostrarán sólo las etiquetas especiales.

Una vez creados los ocho archivos mencionados, dos por cada tipo de equilibrio, ejecutaremos AUTO y veremos los resultados obtenidos por pantalla. Para ello, abriremos la consola, e iremos al directorio donde hemos creado los ocho ficheros. Una vez allí teclearemos lo siguiente:

```
auto AUTO>ld('equi1') AUTO>r(c='equi1')
```

La salida por consola se muestra en la figura anterior 3.3. En ella podemos observar como AUTO nos da el valor de los parámetros para las iteraciones 1 y 180 en este caso, ya que no ha existido ningún punto especial

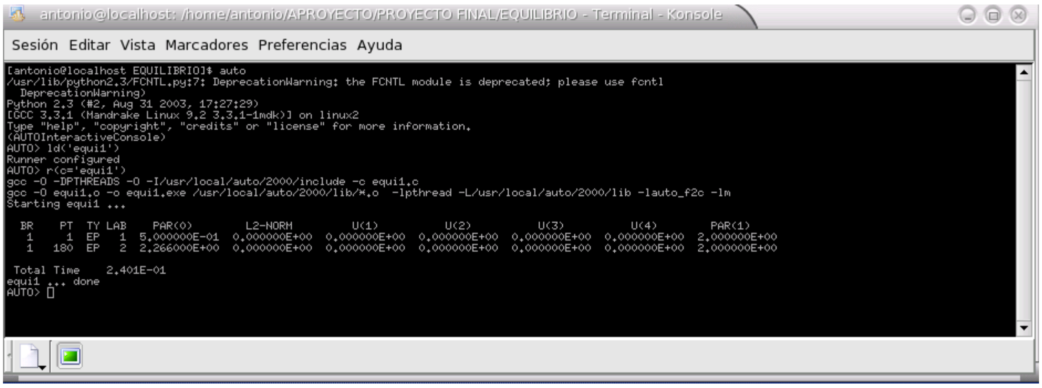


Figura 3.3: Ejemplo de fichero.

entre ellos. Si en el archivo **c.equi1** le hubiéramos dado a la constante NPR un valor inferior a 180, podríamos ver más etiquetas en puntos intermedios y además la evolución de los distintos parámetros y variables independientes. Sin embargo, no lo hacemos de esta manera porque AUTO es capaz de representarnos gráficamente la solución de la continuación, donde se ve el resultado más claramente. Además podemos ver como AUTO nos etiqueta los puntos representados con unos determinados números que, como veremos posteriormente, nos servirán para hacer referencia a dichos puntos.

Para guardar los cambios, utilizamos el siguiente comando:

```
AUTO>sv('equi1')
```

Al utilizar el comando *save* o *sv*, se generan los siguientes ficheros:

b.equi1 que contiene los valores de los parámetros de continuación para cada una de las iteraciones, y nos permitirá dibujar el diagrama de bifurcación.

s.equi1 que contiene información más extensa de cada una de las iteraciones etiquetadas.

d.equi1 que contiene mensajes de diagnóstico, convergencia de soluciones, autovalores, etc.

Para representar gráficamente la solución recurrimos al comando *plot* o *pl*. Si lo llamamos sin pasarle ningún argumento, representará lo que encuentre en los ficheros fort7, fort8 y fort9. Sin embargo, si queremos que nos represente la gráfica de unos determinados ficheros b.xxx, s.xxx y d.xxx, entonces le tendremos que pasar como parámetro 'xxx'. Mostraremos como ejemplo lo que tendríamos que escribir por consola para representar la gráfica de 'equi1':

```
AUTO>pl('equi1')
```

Debido a que el entorno gráfico de AUTO no es demasiado preciso, hemos optado por representar las gráficas de este documento con MATLAB importando los datos que genera AUTO en el fichero 'b.xxx'.

Ahora estamos en disposición de estudiar cada una de las situaciones de equilibrio. Al ejecutar los archivos anteriormente citados, para cada uno de los equilibrios, no se produce la continuación de equilibrio buscada con éstos, permaneciendo el sistema en la posición de equilibrio de partida aunque se varíe el valor del parámetro de continuación, para cualquiera de los dos parámetros posibles que podemos usar como parámetros de continuación. En la siguiente gráfica 3.4 se representa la amplitud frente a la variación del parámetro de continuación μ:

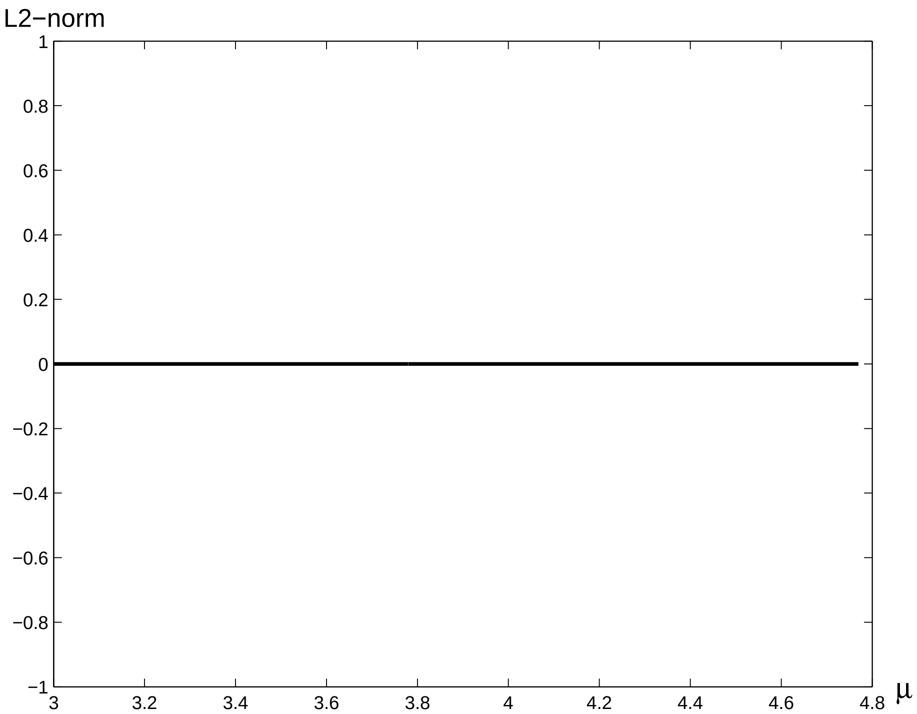


Figura 3.4: Amplitud frente a μ.

En ella podemos ver como la amplitud se mantiene en cero, para cualquier valor del parámetro, como tiene que ser.

3.3.3. Estabilidad de los equilibrios.

En este apartado exponemos la estabilidad de nuestro sistema, en cada una de las situaciones de equilibrio que hemos obtenido.

La estabilidad de una posición de equilibrio depende de sus autovalores. Si los cuatro autovalores para una posición de equilibrio son imaginarios puros, entonces será una posición de equilibrio estable.

Para que AUTO2000 nos muestre los autovalores, por ejemplo para nuestro fichero ´equi1', lo hacemos mediante la orden *ev*, *eg* o *eigenvalue* de la siguiente forma:

```
AUTO>ev('equi1')
```

Los espectro de los cuatro autovalores en cada situación son:

- Primera posición de equilibrio, $\theta = 0$ y $\varphi = 0$:

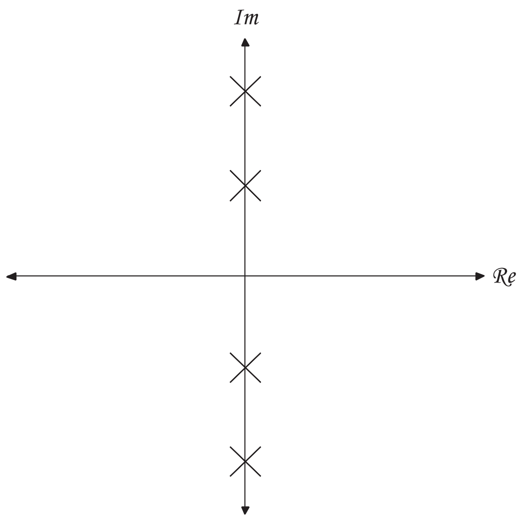


Figura 3.5: Espectro de autovalores(primera situación)

Por lo anterior, esta posición de equilibrio siempre será estable.

- Segunda posición de equilibrio, $\theta = 0$ y $\varphi = \pi$:

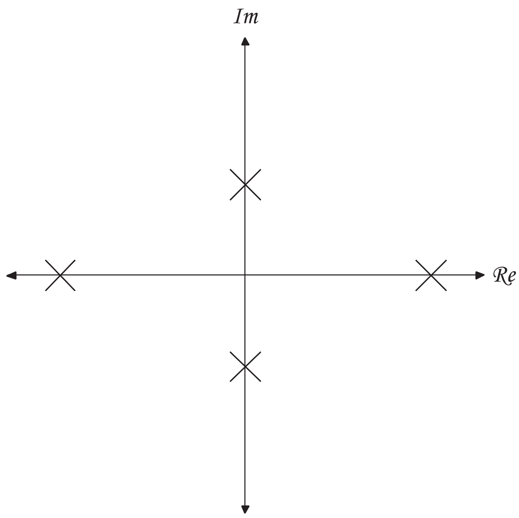


Figura 3.6: Espectro de autovalores(segunda situación)

Por lo anterior, esta posición de equilibrio siempre será inestable.

- Tercera posición de equilibrio, $\theta = \pi$ y $\varphi = 0$:

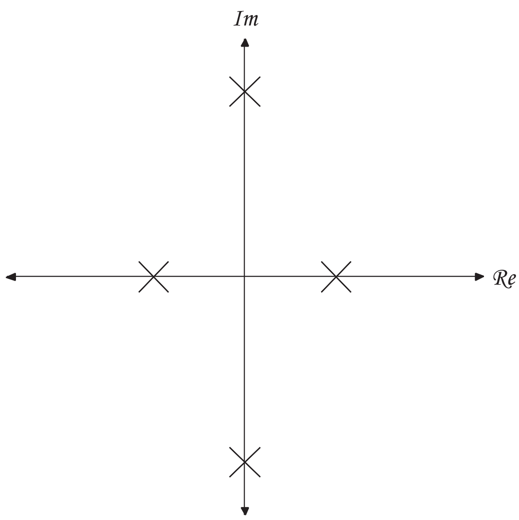


Figura 3.7: Espectro de autovalores(tercera situación)

Por lo anterior, esta posición de equilibrio siempre será inestable.

- Cuarta posición de equilibrio, $\theta = \pi$ y $\varphi = \pi$:

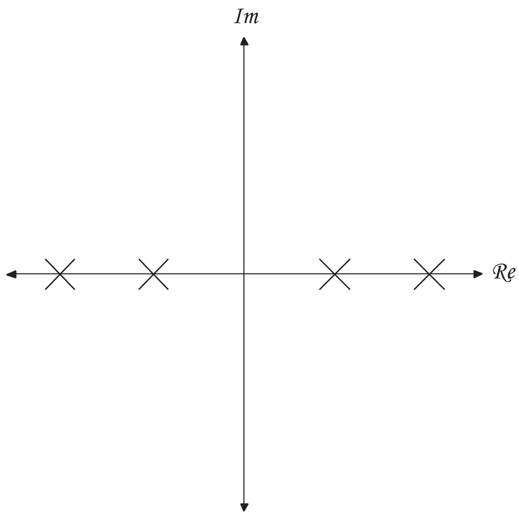


Figura 3.8: Espectro de autovalores(cuarta situación)

Por lo anterior, esta posición de equilibrio siempre será inestable.

En los gráficos anteriores se han representado el espectro de los cuatro autovalores, en un punto cualquiera como representativo de todos los puntos de la evolución, para cada una de las situaciones de equilibrio ya que no habrá cambios en la posición, en toda la evolución, que nos afecte a la estabilidad. Así que sólo la primera situación, $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, es estable y será esta posición la que tomemos como inicial en los siguientes apartados.

Capítulo 4

Continuación numérica de órbitas periódicas.

En este capítulo pasamos al estudio de las órbitas periódicas que se obtienen a partir de los puntos de equilibrio hallados en el capítulo anterior. Realmente, sólo vamos a partir desde la posición de equilibro para $\theta = 0$ y $\varphi = 0$. Para el estudio de las órbitas periódicas usaremos, de nuevo, el programa de continuación numérica AUTO2000, y a partir de las ecuaciones diferenciales de movimiento y de la curva representativa para la resonancia 2:1, realizaremos la continuación numérica de las órbitas periódicas, estudiando para ellas el comportamiento de nuestro sistema.

4.1. Introducción.

Como ya hemos señalado el estudio está centrado en el efecto de la resonancia sobre nuestro sistema pendular. También hemos señalado que usaremos la resonancia 2:1 para dicho estudio, esta resonancia nos producirá puntos especiales al continuar en órbitas periódicas la posición de equilibrio $\theta = 0$ y $\varphi = 0$. En la curva representativa de la resonancia 2:1, que se muestra en la Fig (4.1), existen dos tramos bien diferenciados por los colores, rojo o azul, estos tramos los obtuvimos, como ya se explicó en el capítulo 2, de tomar signo positivo o negativo, respectivamente, en la raíz para el cálculo de los valores del parámetro μ, a partir de valores del parámetro ν.

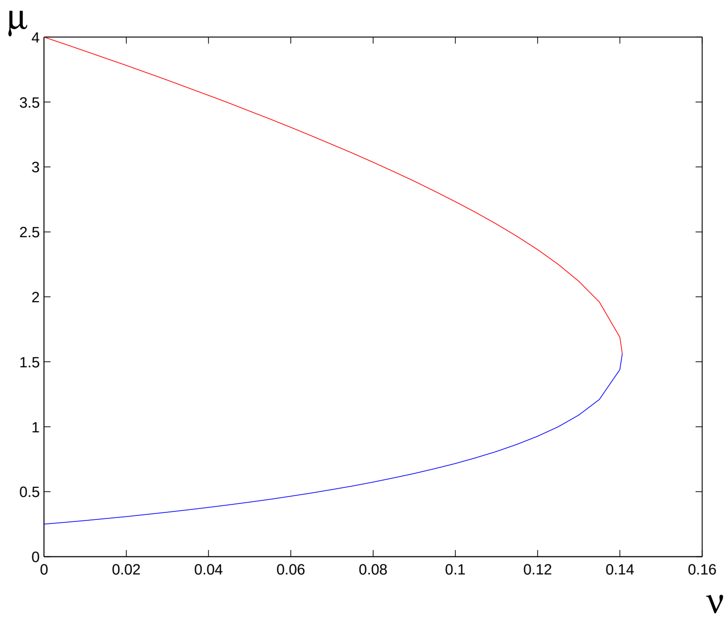


Figura 4.1: Curva representativa de la resonancia 2:1.

Por lo anterior, en este capítulo haremos dos estudios, uno para cada uno de los tramos, partiendo de valores para μ y ν próximos a la curva representativa, Fig (4.1), en cada tramo. Estos valores son los siguientes:

- $\mu = 3$ y $\nu = 0{,}07$
- $\mu = 1$ y $\nu = 0{,}12$

Recordamos que para ambos casos la posición de equilibrio de partida es:

- $\theta = 0$ y $\varphi = 0$

4.2. Ficheros necesarios de AUTO2000.

Para comenzar la continuación de las órbitas periódicas es necesario partir como origen de las mismas de puntos Hopf, puntos que tienen al menos una pareja de autovalores conjugados en el eje imaginario, en nuestro caso, serán las dos parejas de autovalores las cumplan esta condición.

Por tanto, lo primero será el cálculo del punto Hopf(**HB**) de partida. Para el cálculo del mismo hemos tenido que modificar tanto el fichero **xxx.c**, como el **c.xxx**.

En el fichero **xxx.c** hemos tenido que modificar las ecuaciones diferenciales de movimiento de nuestro sistema de forma que AUTO2000 pueda encontrar un punto Hopf(**HB**), cosa que no ocurría con las ecuaciones iniciales. Mostramos únicamente del fichero **xxx.c** los ecuaciones diferenciales cambiadas:

```
f[2]= ((4*mu*nu*cos(theta)*cos(theta)*sin(theta)*cos(phi))
      *psi*psi-(2*sin(theta)*cos(phi))*Theta*Theta
      -(2*cos(theta)*sin(theta)*cos(phi)-sin(phi)
      -4*nu*cos(theta)*cos(theta)*sin(phi)))/(-mu
      *(1+4*nu*cos(theta)*cos(theta)*sin(phi)*sin(phi)))
      +beta*Theta;

f[3]= ((4*mu*nu*cos(theta)*sin(theta)*sin(phi)*sin(phi))
      *Theta*Theta+(2*mu*mu*nu*cos(theta)*sin(theta))
      *psi*psi+(mu*(2*nu*cos(theta)*cos(phi)*sin(phi)
      -sin(theta))))/(mu*(1+4*nu*cos(theta)*cos(theta)
      *sin(phi)*sin(phi)))+beta*psi;
```

Como puede verse en las ecuaciones anteriores se han añadido dos términos disipativos que hacen que el sistema ya no sea conservativo, uno en cada una, $\beta \cdot \Theta$ para la primera y $\beta \cdot \psi$ para la segunda. Lo cual nos incluye un nuevo parámetro de continuación β que será nuestro PAR[2]. Inicialmente a dicho parámetro β se le dará el valor $\beta = 0{,}01$. Deberemos vigilar que dicho parámetro cuando se detecte el punto Hopf y a partir de éste en las sucesivas continuaciones se mantenga siempre en cero, aunque el cero exacto nunca se consigue y lo que obtenemos son valores muy próximos a cero, aceptando valores a partir del orden 1E-08. Es muy importante que hagamos la comprobación anterior en las sucesivas continuaciones ya que de no cumplirse estaríamos alejándonos de las ecuaciones diferenciales de movimiento que definen nuestro sistema conservativo, y por tanto los resultados obtenidos no serían representativos para su estudio.

Un ejemplo del fichero **c.xxx** para la detección del punto Hopf sería el siguiente:

Debemos notar que el parámetro de continuación será nuestro PAR[2](β).Seguidamente explicamos los valores de los parámetros propios de este tipo de ficheros:

- **IPS=1** Define el problema para soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales ordinarias con detección de bifurcaciones de Hopf.

- **IRS=0** Partimos desde el equilibrio inicial dado en la función *stpnt*.

```
4 1 0 1                          NDIM,IPS,IRS,ILP
3 2 0 1                          NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
100 4 3 1 1 0 0 0                NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
180 -100 100 0 100               NMX,RL0,RL1,A0,A1
5 5 2 8 7 5 0                    NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-7 1e-7 1e-5                   EPSL,EPSU,EPSS
-0.001 0.0001 0.001 1            DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0                                NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0                                NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0                                NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
```

- **ISP=1** Este parámetro controla la detección de puntos especiales, en nuestro caso el valor 1 es el adecuado para los puntos de bifurcación Hopf.

- **ISW=1** Para continuar a partir del equilibrio con un solo parámetro.

Una vez detectado el punto Hopf, debemos continuar a partir de éste, con las órbitas periódicas, para ellos se usa el fichero **c.xxx** que pasamos a comentar:

```
4 2 21 1                         NDIM,IPS,IRS,ILP
4 2 10 1 0                       NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
20 4 3 2 1 0 0 0                 NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
1000 -100 100 0 100              NMX,RL0,RL1,A0,A1
180 5 2 8 7 5 0                  NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-3 1e-3 1e-1                   EPSL,EPSU,EPSS
-0.01 0.0000001 0.002 1          DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0                                NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0                                NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0                                NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
```

Ahora como continuamos a partir de un punto Hopf, se nos permite hacerlo con dos parámetros, el primero será, de nuevo, el parámetro PAR[2](β) y el segundo será el parámetro PAR[10], es decir, el período(T). En este fichero explicamos los siguientes valores:

- **IPS=2** Define el problema para la continuación de soluciones periódicas.

- **IRS=21** Define la etiqueta de la solución donde la continuación comienza, en este caso etiqueta 21 que es la que marca al punto Hopf, que detectamos con el fichero anterior, en lugar de partir desde el equilibrio inicial dado en la función *stpnt*.

- **ILP=1** Detecta los pliegues de la continuación (puntos LP).

- **ISP=2** Este parámetro controla la detección de puntos especiales, ahora el valor 2 es el adecuado para que detecte, por ejemplo, los puntos de bifurcación de doble período (PD).

- **ISW=1** Para trazar una órbita periódica a partir de un punto Hopf.

Con el fichero anterior AUTO2000 detectará puntos especiales, fijamos nuestro estudio en los puntos de bifurcación de doble período (PD) porque a partir de ellos realizaremos la siguiente continuación en órbitas periódicas. Mostramos el fichero **c.xxx** correspondiente:

```
4 2 207 1                        NDIM,IPS,IRS,ILP
4 2 10 0 1                       NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
20 4 3 2 -1 0 0 0                NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
180 -100 100 0 100               NMX,RL0,RL1,A0,A1
180 5 2 8 7 5 0                  NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-3 1e-3 1e-1                   EPSL,EPSU,EPSS
-0.01 0.0000001 0.002 1          DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0                                NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0                                NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
0                                NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
```

De nuevo continuamos en dos parámetros, el PAR[2](β), como primer parámetro de continuación, y el PAR[10](T), como segundo parámetro de continuación.

- **IPS=2** Define el problema para la continuación de soluciones periódicas.

- **IRS=207** Define la etiqueta de la solución donde la continuación comienza, en este caso etiqueta 207 que es la que marca al punto de bifurcación de doble período(PD),en lugar de partir desde el equilibrio inicial dado en la función *stpnt*.

- **ILP=1** Detecta los pliegues de la continuación (puntos LP).

- **ISP=2** Este parámetro controla la detección de puntos especiales, ahora el valor 2 es el adecuado para que detecte, por ejemplo, la existencia de nuevos puntos de bifurcación de doble período (PD).

- **ISW=−1** Para trazar una órbita periódica a partir de un punto de bifurcación de doble período(PD).

Por último, conviene saber que, en las órbitas periódicas, la estabilidad no viene marcada por los autovalores, sino que existen unos valores similares a éstos llamados multiplicadores.

Para que AUTO2000 nos muestre los multiplicadores lo hacemos mediante la orden *fl* o *floquet* de la siguiente forma:

```
AUTO>fl('xxx')
```

Y con ellos la estabilidad se establece siguiendo las siguientes reglas:

- Trazar una circunferencia de radio unidad centrada en el origen.
- Dibujar los multiplicadores según sus coordenadas reales e imaginarias.
- Si los cuatro multiplicadores están en el interior de la circunferencia, estamos ante una órbita estable.
- Si alguno de los cuatro multiplicadores quedara fuera de la circunferencia, estaríamos ante una órbita inestable.

Establecidas ya unas pautas iniciales para manejar AUTO2000 con órbitas periódicas, comenzamos con el estudio de las mismas para cada uno de los puntos que hemos señalado.

4.3. Continuación numérica de órbitas periódicas para $\mu = 1$ y $\nu = 0{,}12$.

Empezamos este apartado señalando todos los valores iniciales en el punto de equilibrio del que se parte en este apartado:

- $\theta = 0$ y $\varphi = 0$
- $\beta = 0{,}01$, $\mu = 1$ y $\nu = 0{,}12$

Recordando que $\mu = \dfrac{\ell_3}{\ell_1}$ y $\nu = \dfrac{m_2}{m_1}$, tomamos los siguientes valores para las longitudes y las masas:

- $\ell_1 = 1$ y $\ell_3 = 1$ (en unidades de longitud)
- $m_1 = 1$ y $m_2 = 0{,}12$ (en unidades de masa)

4.3.1. Detección del punto de bifurcación Hopf (HB).

En este apartado vamos a detectar el punto de bifurcación Hopf, como ya se dijo necesario como origen de las órbitas periódicas.

Como los ficheros necesarios ya fueron explicados al principio de este capítulo, pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip')
AUTO>r(c='equip')
```

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('equip')
AUTO>cl()
```

El punto de bifurcación de Hopf (**HB**) es detectado en el punto 100 correspondiente a la etiqueta 21. Lo primero es comprobar que el valor de β es cero, lo cual vemos que se cumple en el valor siguiente:

$\beta = -1{,}00000E - 08$

En este punto debemos haber alcanzado la resonancia 2:1, para comprobarlo vamos a pedirle a AUTO2000 que nos muestre los valores de los autovalores, con la siguiente orden:

```
AUTO>ev('equip')
```

Los valores de los autovalores, copiados directamente de la consola, son los siguientes:

Eigenvalue 1 -5.000000E-09 -7.118904E-01

Eigenvalue 2 -5.000000E-09 1.404711E+00

Eigenvalue 3 -5.000000E-09 -1.404711E+00

Eigenvalue 4 -5.000000E-09 7.118904E-01

Como podemos ver tenemos dos parejas de autovalores conjugados, y debido a que hemos alcanzado la resonancia 2:1, la parte real de dichos autovalores es despreciable y, por tanto, dichos autovalores son imaginarios puros; en cuanto a las partes imaginarias comprobamos que dichas partes son el doble, en módulo entre sí. De está forma hemos comprobado que se cumple la condición para la existencia de un punto de bifurcación de Hopf citada al principio de este capítulo.

Las partes imaginarias nos ofrecen dos posibles períodos de los que partiremos para la continuación de órbitas periódicas. Calculamos los dos períodos usando la ecuación siguiente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Siendo ω la parte imaginaria de cada una de las parejas de autovalores conjugados en el punto de bifurcación de Hopf. Si aplicamos la ecuación anterior, se obtiene:

- $T_1 = 8{,}826057$ para $\omega_1 = 0{,}711890$.
- $T_2 = 4{,}472938$ para $\omega_2 = 1{,}404711$.

Una vez obtenido el punto de bifurcación de Hopf y los dos posibles períodos de continuación, ya estamos en disposición de realizar la continuación de órbitas periódicas a partir de dicho punto con cada uno de dichos períodos. Al existir dos períodos hemos creado dos parejas tipos ficheros **equip.c** y **c.equip**, una para cada uno, **equip1.c** y **c.equip1** y **equip2.c** y **c.equip2** para el primer y segundo período respectivamente. Hemos ejecutado y grabado dichos ficheros de la forma descrita en este apartado, para su uso en los apartados siguientes.

4.3.2. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de Hopf para $T_1 = 8{,}826057$.

En este apartado a partir del punto de Hopf (**HB**), hallado antes, realizamos la continuación de órbitas periódicas. Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación.

Debemos asegurarnos de que partimos con el período deseado $T_1 = 8{,}826057$, para ello en el fichero **s.equip1** al punto de Hopf (**HB**) (punto 100, etiqueta 21) le asignamos dicho período, ya que es este archivo el que usará AUTO2000 para iniciar la continuación desde el punto de Hopf (**HB**).

El fichero que usamos para la continuación es **c.perp1**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip1')
AUTO>r(c='perp1', s='equip1')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´equip1', ejecutemos el fichero de constantes ´perp1', basándonos siempre en las ecuaciones que hemos cargado anteriormente con el comando *load*. Esto también lo podríamos hacer en una sola orden, que sería la siguiente:

```
AUTO>r(e='equip1',c='perp1',s='equip1')
```

De esta forma, en lugar de cargar primero el fichero de ecuaciones y luego el de constantes y la solución, lo hemos hecho todo en un sólo paso. Sin embargo, esto tiene un inconveniente, que sólo carga el fichero de ecuaciones para el fichero de constantes especificado luego, en una próxima orden tendremos que volver a llamar al fichero de ecuaciones, y si siempre es el mismo, como es nuestro caso, incurrimos en una pérdida de tiempo al usar esta forma. No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('perp1')
AUTO>cl()
```

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- En la siguiente gráfica(4.2) representamos una medida de la amplitud de la rama de órbitas periódicas,**L2-NORM**, frente al período (a partir de esta gráfica al darnos una medida de la amplitud en dicha rama nos referiremos a la L2-NORM como la amplitud en dicha rama):

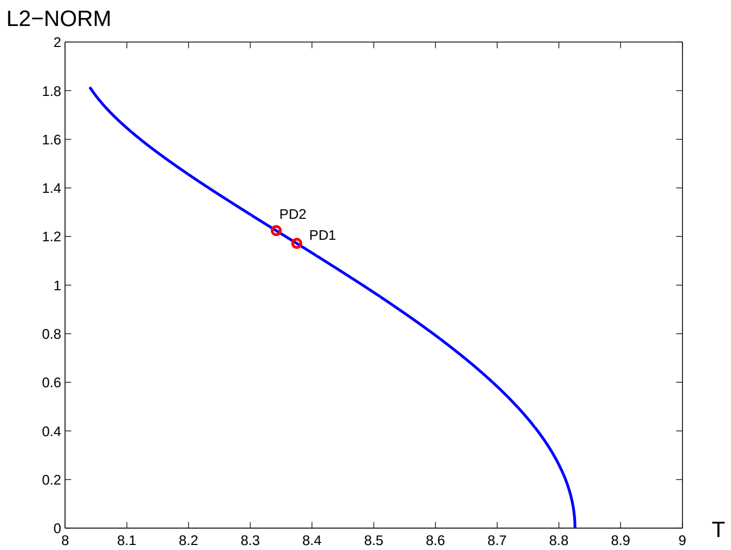


Figura 4.2: La amplitud frente al período para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

En la gráfica anterior(4.2) los valores de la amplitud de la rama de órbitas periódicas son del orden de décimas, lo cual quiere decir que nos hemos alejado ya del la posición de equilibrio inicial $\theta = 0$ y $\varphi = 0$ de partida.

En la gráfica anterior(4.2) hemos marcado un par de puntos de bifurcación de doble período (**PD**), de entre todos los que AUTO2000 ha detectado. Cada vez que el programa etiqueta un punto como **PD** quiere decir que hemos alcanzado la resonancia 2:1, en dicho punto y, por tanto, a partir de este punto si continuamos órbitas periódicas veremos como el período se duplica. Este tipo de puntos serán los siguientes puntos de continuación.

- Con el siguiente par de gráficas(4.3) y (4.4) mostramos la existencia de periodicidad en la solución obtenida, en ellas representamos los ángulos θ y φ frente al tiempo, respectivamente, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas.

  - Representación del ángulo θ frente al tiempo.

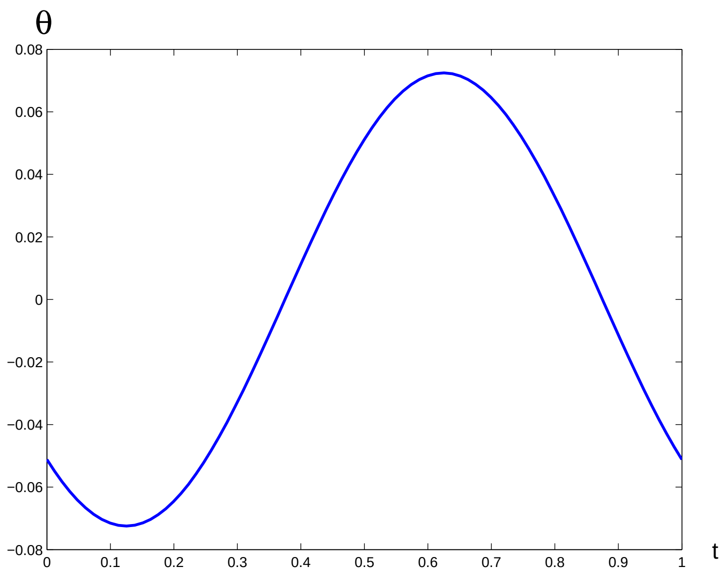


Figura 4.3: θ frente al tiempo en un punto de la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

  - Representación del ángulo φ frente al tiempo.

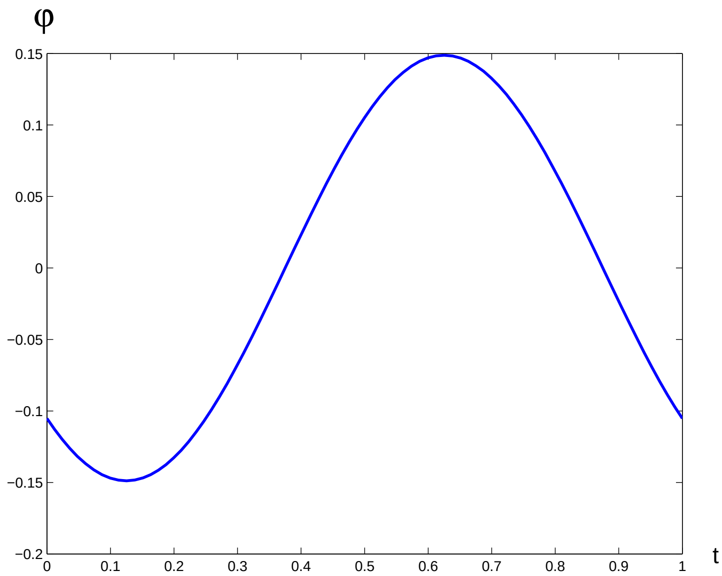


Figura 4.4: φ frente al tiempo en un punto de la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

- En la siguiente gráfica(4.5) representamos el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

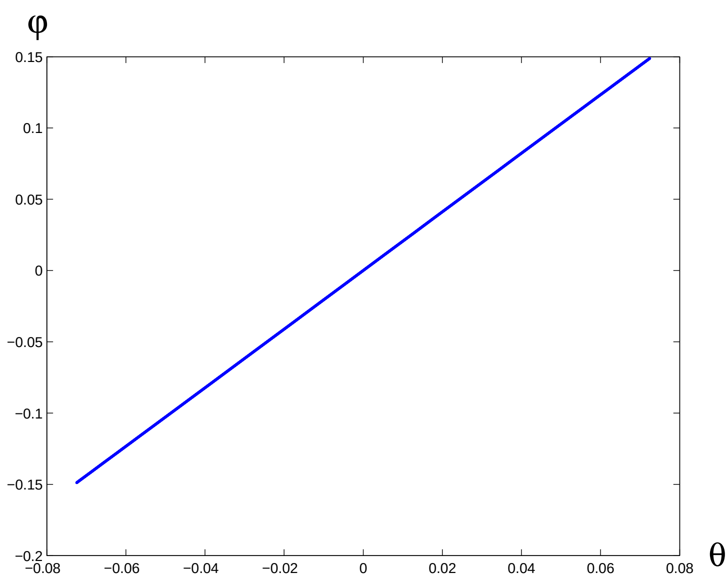


Figura 4.5: φ frente a θ en un punto de la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

En la gráfica anterior(4.5) podemos ver que los ángulos se mantienen en fase, es decir, las masas de nuestro sistema se moverán en el mismo sentido, manteniendo la siguiente relación entre ángulos, para cualquiera de los puntos:

$$\varphi = 2{,}055 \cdot \theta \tag{4.1}$$

La siguiente gráfica(4.6), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra este movimiento, en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas en el tiempo:

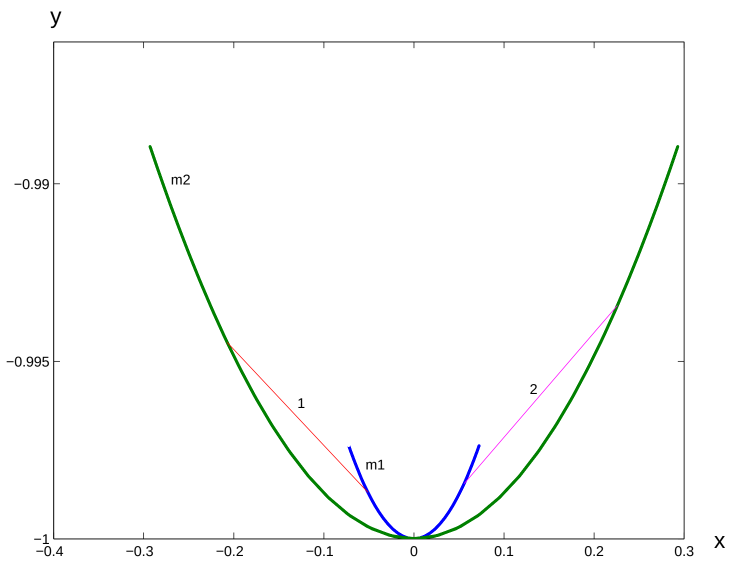


Figura 4.6: Las masas frente al tiempo en un punto representativo de la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

En la gráfica anterior podemos ver que ambas masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), llegan a pararse, su velocidad se hace cero, lo que se deduce al ver que los movimientos que dichas masas describen son arcos en lugar de curvas completas; parándose las masas en los extremos de dichos arcos.

En el siguiente apartado continuamos a partir de uno de los puntos de bifurcación de doble período (**PD**), señalados en la gráfica(4.2).

Estabilidad de esta rama de órbita periódica.

En los siguientes gráficos se muestra la evolución de los multiplicadores:

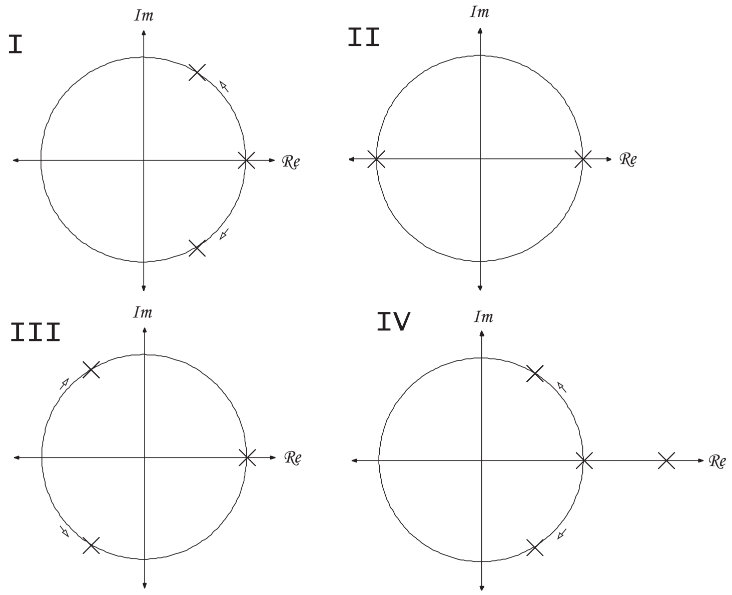


Figura 4.7: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

De la observación de los gráficos anteriores podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, dos de ellos estarán en el valor 1, mientras los otros dos se desplazan siguiendo la circunferencia de radio unidad hacia el valor -1.
- En un segundo instante, gráfico **II**, la segunda de pareja de multiplicadores ya están sobre el valor -1.
- En el gráfico **III** la pareja de multiplicadores anterior se está desplazando desde el valor -1 hacia el valor 1.
- Por último el gráfico **IV** representa un instante posterior a la llegada de la pareja de multiplicadores al valor 1, podemos ver como un multiplicador se sale de la circunferencia de radio unidad mientras de nuevo una pareja de multiplicadores se desplaza hacia el valor -1, debido a la existencia de un punto de bifurcación **BP**; en los siguientes instantes

siempre tendremos al menos un multiplicador fuera de la circunferencia. Por tanto, a partir de la existencia del punto de bifurcación **BP** la rama de órbitas periódicas pasará a ser inestable.

4.3.3. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de bifurcación de doble período $PD1$.

En este apartado a partir del punto de bifurcación de doble período (**PD1**), obtenido en el apartado 4.3.2, realizamos la continuación de órbitas periódicas (tomamos a PD1 como punto representativo de este tipo de ramas de órbitas periódicas, y no desarrollaremos PD2 ya que nos ofrece resultados similares al PD1 en esta rama de órbitas periódicas). Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación. El **PD1** es para AUTO2000 el punto 634(etiqueta 207). Inicialmente el valor del período en este punto es $T = 8{,}37526$, una vez realicemos la continuación de órbitas periódicas a partir del mismo veremos como se duplica dicho período, y volveremos a analizar el movimiento de nuestro sistema en la rama que obtengamos.

El fichero que usamos para la continuación es **c.pd1**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip1')
AUTO>r(c='pd1', s='perp1')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´perp1', ejecutemos el fichero de constantes ´pd1', seguimos las ecuaciones originales cargadas con el comando *load*. No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('pd1')
AUTO>cl()
```

Primero comprobamos que el período se ha duplicado, obtenemos:

$$T_i = 8{,}37526 \quad \Longrightarrow \quad T_f = 16{,}75050 \tag{4.2}$$

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- La primera gráfica representa la evolución de la amplitud frente al período:

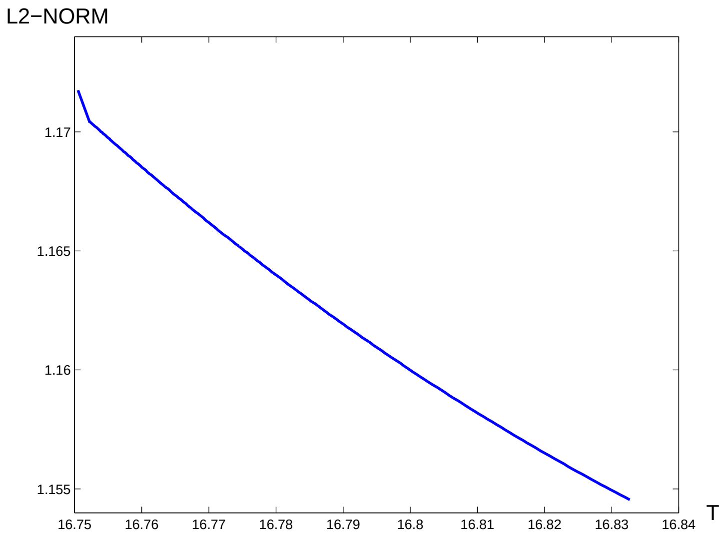


Figura 4.8: La amplitud frente al período para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de doble período.

En ella podemos que ver que estamos ya bastante alejados de la posición de equilibrio de la que partimos, ya que la amplitud toma valores de orden unidad.

- La segunda gráfica representa el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

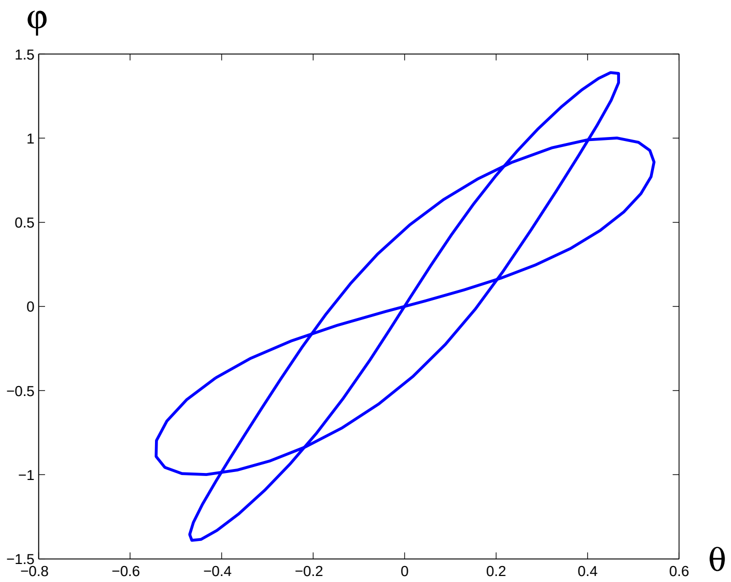


Figura 4.9: φ frente a θ en un punto de la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de doble período.

En la gráfica anterior (4.9) podemos ver que hemos perdido el movimiento en fase, que teníamos antes de duplicar el período, ya que ahora para un valor de uno de los ángulos tenemos al menos dos valores para el otro. En la gráfica 4.10 vamos a ver lo que ésto conlleva en el movimiento real de nuestro sistema.

- La siguiente gráfica(4.10), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra este movimiento; en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas con el tiempo:

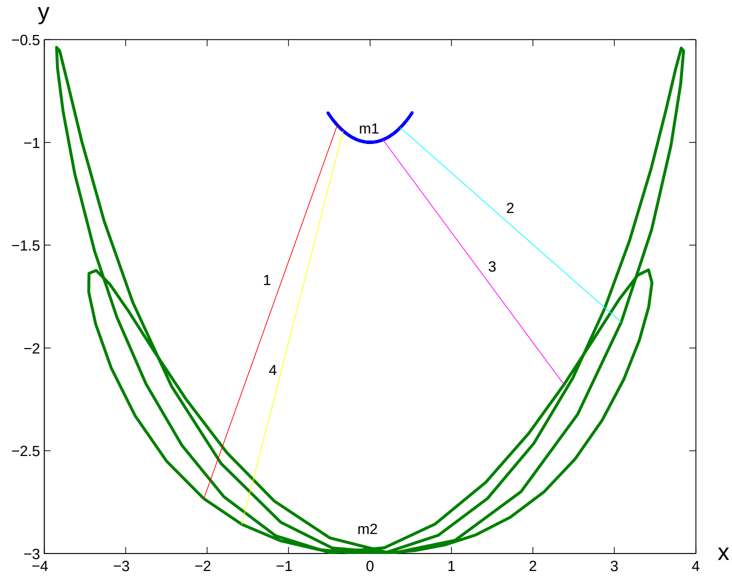


Figura 4.10: Las masas frente al tiempo en un punto representativo de la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de doble período.

En ella podemos ver como las masas de nuestro sistema ya no se mueven en fase. En su movimiento la masa m_1 se para al llegar a los extremos del arco que describe en su trayectoria. En cambio, la masa m_2 en este caso deja de realizar un movimiento pendular simple, para describir en su trayectoria dos curvas completas que se cruzan; lo que nos indica que en su movimiento la masa m_2 no llega a pararse.

Estabilidad de esta rama de órbitas periódicas.

En los siguientes gráficos se muestra la evolución de los multiplicadores:

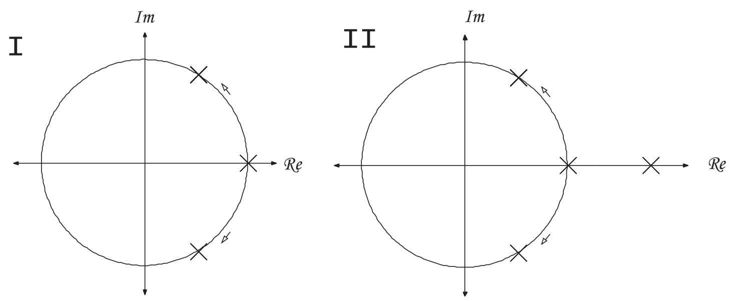


Figura 4.11: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de doble período.

De la observación de los gráficos anteriores podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, dos de ellos estarán en el valor 1, mientras los otros dos se desplazan siguiendo la circunferencia de radio unidad hacia el valor -1. .
- En el gráfico **II** vemos como uno de los multiplicadores que estaban en el valor 1 se ha salido de la circunferencia de radio unidad, pasando a ser inestable la rama de órbitas periódicas a partir de este instante.

4.3.4. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de Hopf para $T_2 = 4{,}472938$.

En este apartado a partir del punto de Hopf (**HB**), hallado antes, realizamos la continuación de órbitas periódicas, para el período T_2. Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación.

Debemos asegurarnos de que partimos con el período deseado $T_2 = 4{,}472938$, para ello en el fichero **s.equip2** al punto de Hopf (**HB**) (punto 100, etiqueta 21) le asignamos dicho período, ya que es este archivo el que usará AUTO2000 para iniciar la continuación desde el punto de Hopf (**HB**).

El fichero que usamos para la continuación es **c.perp2**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip2')
AUTO>r(c='perp2', s='equip2')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´equip2', ejecutemos el fichero de constantes ´perp2', basándonos en las ecuaciones que hemos cargado anteriormente con el comando *load*.

No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero, para los puntos obtenidos en la continuación.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('perp2')
AUTO>cl()
```

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- En la siguiente gráfica(4.12) representamos la amplitud de la rama de órbitas periódicas,**L2-NORM**,frente al período:

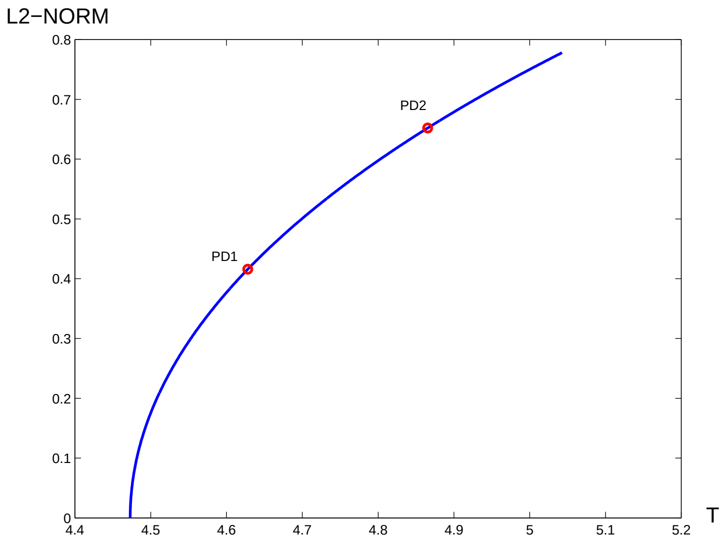


Figura 4.12: La amplitud frente al período.

En la gráfica anterior(4.12) los valores de la amplitud de la rama de órbitas periódicas son del orden de décimas, comprobando de nuevo que nos hemos alejado ya del la posición de equilibrio inicial $\theta = 0$ y $\varphi = 0$ de partida.

En la gráfica anterior(4.12) hemos marcado un par de puntos de bifurcación de doble período (**PD**), de entre todos los que AUTO2000 ha detectado. Cada vez que el programa etiqueta un punto como **PD** quiere decir que hemos alcanzado la resonancia 2:1, en dicho punto y, por tanto, a partir de este punto si continuamos las órbitas periódicas veremos como el período se duplica. Este tipo de puntos serán los siguientes puntos de continuación.

- Con el siguiente par de gráficas(4.13) y (4.14) mostramos la existencia de periodicidad en la solución obtenida, en ellas representamos los ángulos θ y φ frente al período, respectivamente, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas.

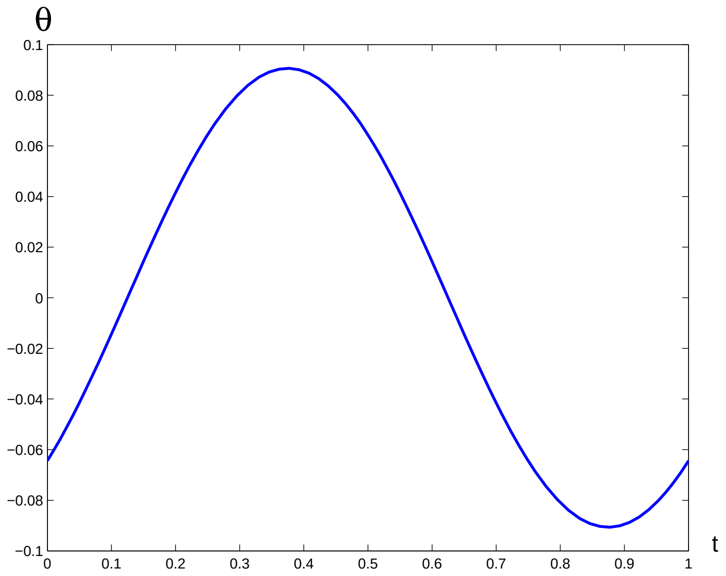


Figura 4.13: θ frente al tiempo.

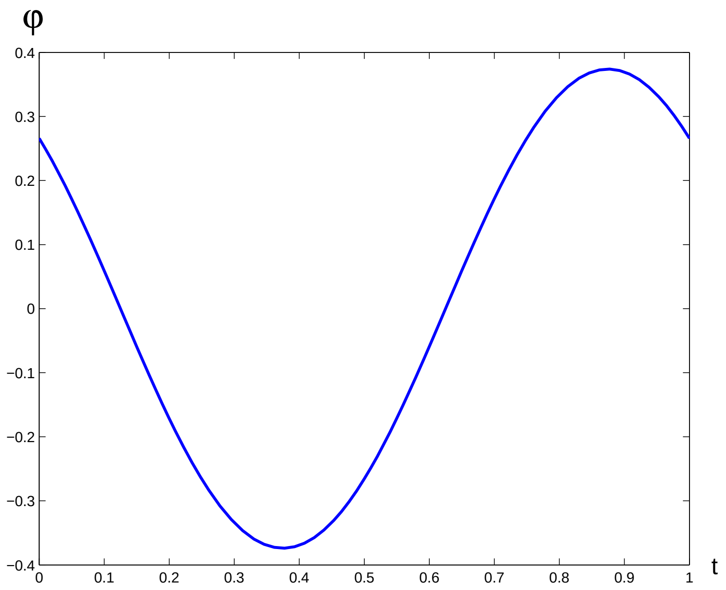


Figura 4.14: φ frente al tiempo.

- En la siguiente gráfica(4.15) representamos el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

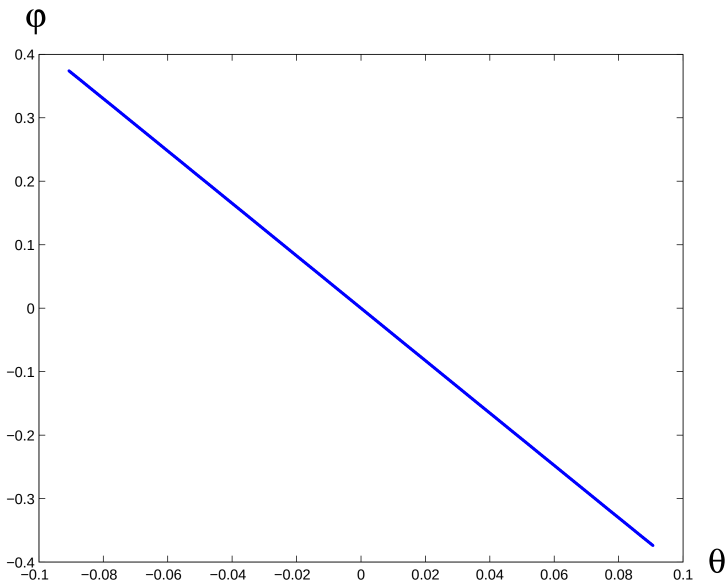


Figura 4.15: φ frente a θ.

En la gráfica anterior(4.15) podemos ver que los ángulos en esta rama de órbitas periódicas están ahora en contrafase, es decir, las masas de nuestro sistema se moverán en sentido contrario, aunque sigue existiendo una relación entre los ángulos, para cualquiera de los puntos:

$$\varphi = -4{,}128 \cdot \theta \tag{4.3}$$

- La siguiente gráfica(4.16), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra este movimiento, en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas en el tiempo:

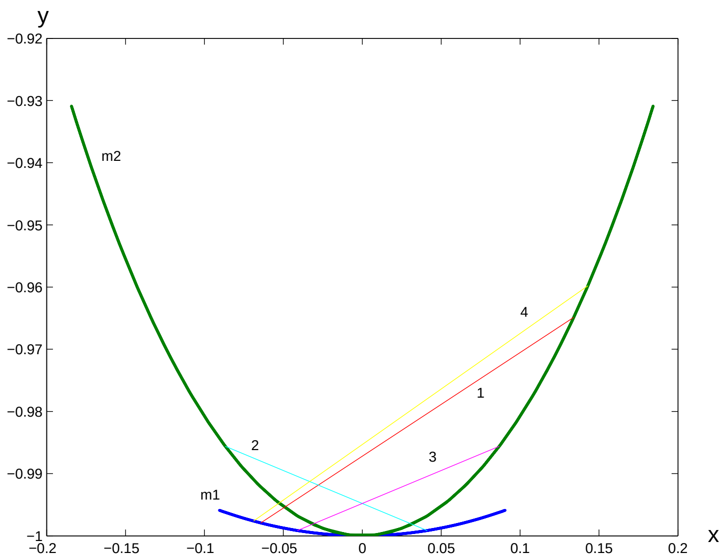


Figura 4.16: Las masas frente al tiempo.

Vemos en la gráfica que ambas gráficas realizan un movimiento pendular simple, moviéndose en contrafase, ya que como puede verse con las líneas cuando una masa está a un lado del cero la otra está en el contrario. De nuevo, estamos en el caso de que ambas masas se paran al llegar al extremo de los arcos que describen en sus respectivas trayectorias.

En el siguiente apartado continuamos a partir de uno de los puntos de bifurcación de doble período (**PD**), señalados en la gráfica(4.12).

Estabilidad de esta rama de órbitas periódicas.

En los siguientes gráficos se muestra la evolución de los multiplicadores:

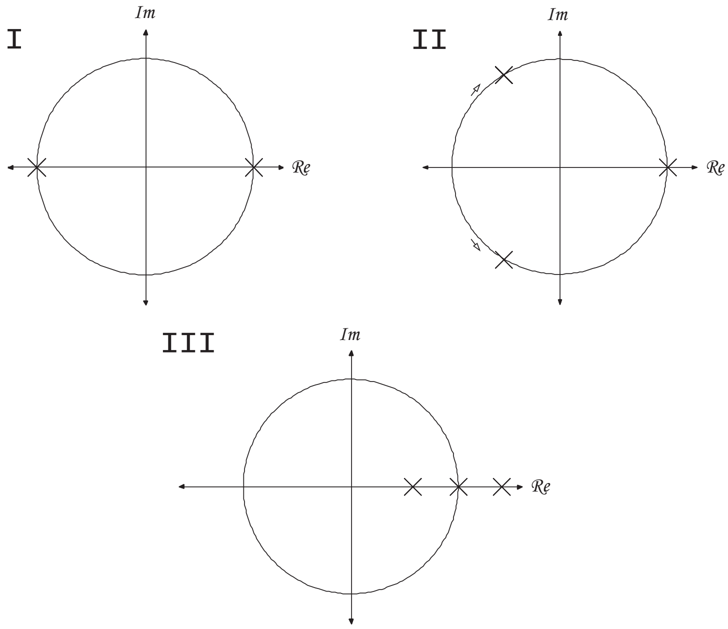


Figura 4.17: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

De la observación de los gráficos anteriores podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, dos multiplicadores están en el valor 1, mientras los otros dos están sobre el valor -1.
- En un segundo instante, gráfico **II**, los dos multiplicadores que estaban en el valor -1 se desplazan hacia el valor 1.
- Por último el gráfico **III** representa un instante posterior a la llegada de la pareja de multiplicadores al valor 1, podemos ver como un multiplicador se sale de la circunferencia de radio unidad, debido a la existencia de un punto de bifurcación **BP**; en los siguientes instantes siempre tendremos al menos un multiplicador fuera de la circunferencia. Por tanto, a partir de la existencia del punto de bifurcación **BP** la rama de órbitas periódicas pasará a ser inestable.

4.3.5. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de bifurcación de doble período $PD1$.

En este apartado a partir del punto de bifurcación de doble período (**PD1**), obtenido en el apartado 4.3.4, realizamos la continuación de órbitas periódicas (tomamos a PD1 como punto representativo de este tipo de ramas de órbitas periódicas, y no desarrollaremos PD2 ya nos ofrece resultados similares al PD1 en esta rama de órbitas periódicas). Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación. El **PD1** es para AUTO2000 el punto 223(etiqueta 111). Inicialmente el valor del período en este punto es $T = 4{,}62809$, una vez realicemos la continuación de órbitas periódicas a partir del mismo veremos como se duplica dicho período, y volveremos a analizar el movimiento de nuestro sistema en la rama que obtengamos. En este caso debemos notar que cuando se duplica el período nos vamos a valores de éste del orden del apartado 4.3.2, así los resultados que obtengamos deberán ser próximos a los que allí obtuvimos.

El fichero que usamos para la continuación es **c.pd1**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip2')
AUTO>r(c='pd1', s='perp2')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´perp2', ejecutemos el fichero de constantes ´pd1', seguimos las ecuaciones originales cargadas con el comando *load*. No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('pd1')
AUTO>cl()
```

Primero comprobamos que el período se ha duplicado, obtenemos:

$$T_i = 4{,}62809 \quad \Longrightarrow \quad T_f = 9{,}25618 \tag{4.4}$$

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- La primera gráfica representa la amplitud de la rama de órbitas periódicas frente a la variación del período en la misma:

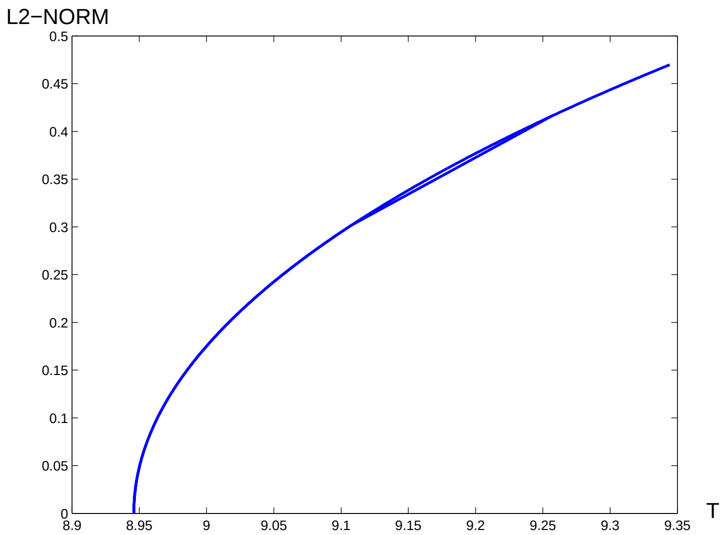


Figura 4.18: La amplitud frente al período.

En ella podemos que ver que estamos ya bastante alejados de la posición de equilibrio de la que partimos, ya que la amplitud toma valores de orden décimas de la unidad.

- La segunda gráfica representa el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

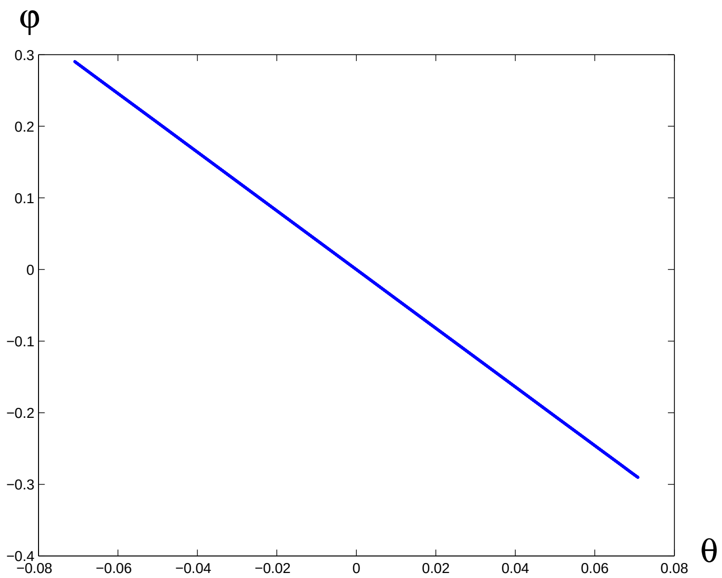


Figura 4.19: φ frente a θ.

En la gráfica anterior (4.19) podemos ver que aunque hemos duplicado el período, los ángulos siguen estando en contrafase, por tanto que se duplique el período no conlleva que perdamos la contrafase. La relación entre los ángulos es ahora:

$$\varphi = -4{,}093 \cdot \theta \tag{4.5}$$

Como la relación es próxima a la del caso sin duplicar, y seguimos estando en contrafase en la gráfica 4.20 del movimiento en cartesianas obtendremos una gráfica análoga a la gráfica (4.20), pero con valores menores para los ángulos.

- La siguiente gráfica(4.20), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra el movimiento en el mismo punto representativo de la rama de órbitas periódicas tomado para las curvas anteriores; en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas en el tiempo. Como la relación es próxima a la del caso sin duplicar, y seguimos estando en contrafase la gráfica es análoga a la gráfica (4.16), pero con valores menores para los ángulos:

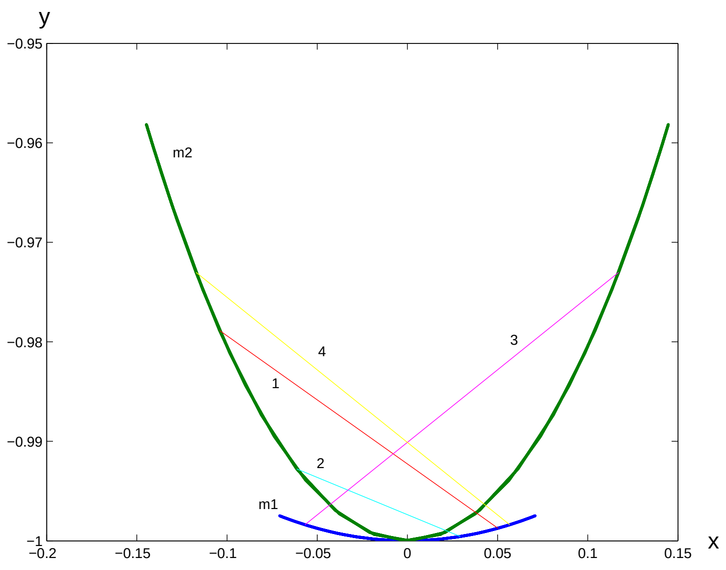


Figura 4.20: Las masas frente al tiempo.

Por tanto, de forma análoga a lo que vimos en la gráfica (4.16) , vemos como seguimos teniendo un movimiento pendular simple en ambas masas, parándose éstas al llegar a los extremos de los arcos que describen en su trayectoria, propio de la contrafase antes señalada.

Estabilidad de esta rama de órbitas periódicas.

En los siguientes gráficos se muestra la evolución de los multiplicadores:

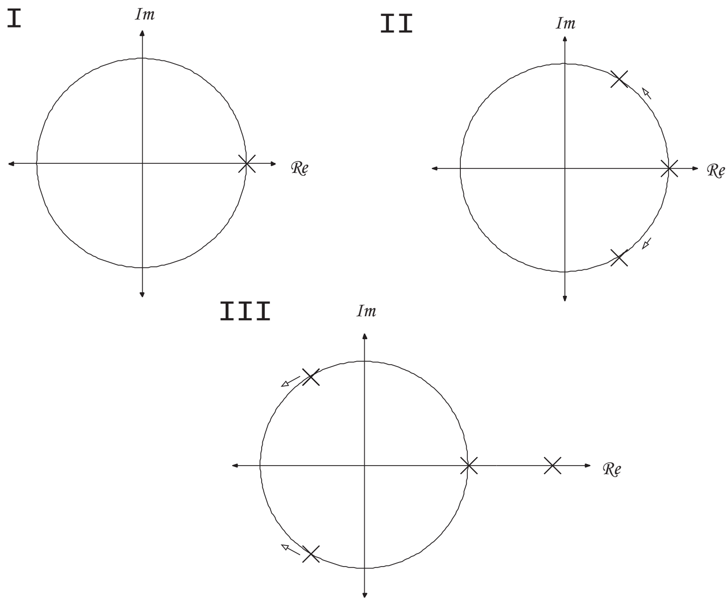


Figura 4.21: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de doble período.

De la observación de los gráficos anteriores podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, los cuatro multiplicadores están en el valor 1.
- En un segundo instante, gráfico **II**, dos de los multiplicadores se desplazan hacia el valor -1.
- En el gráfico **III** uno de los multiplicadores que estaban en el valor 1, se sale de la circunferencia de radio unidad, pasando a ser inestable la rama de órbitas periódicas.

4.4. Continuación numérica de órbitas periódicas para $\mu = 3$ y $\nu = 0{,}07$.

Empezamos este apartado señalando todos los valores iniciales en el punto de equilibrio del que se parte en este apartado:

- $\theta = 0$ y $\varphi = 0$
- $\beta = 0{,}01$, $\mu = 3$ y $\nu = 0{,}07$

Recordando que $\mu = \dfrac{\ell_3}{\ell_1}$ y $\nu = \dfrac{m_2}{m_1}$, tomamos los siguientes valores para las longitudes y las masas:

- $\ell_1 = 1$ y $\ell_3 = 3$ (en unidades de longitud)
- $m_1 = 1$ y $m_2 = 0{,}07$ (en unidades de masa)

4.4.1. Detección del punto de bifurcación Hopf (HB).

En este apartado vamos a detectar el punto de bifurcación Hopf, como ya se dijo necesario como origen de las órbitas periódicas.

Como los ficheros necesarios ya fueron explicados al principio de este capítulo, pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip') AUTO>r(c='equip')
```

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('equip') AUTO>cl()
```

El punto de bifurcación de Hopf (**HB**) es detectado en el punto 100 correspondiente a la etiqueta 21. Lo primero es comprobar que el valor de β es cero, lo cual vemos que se cumple en el valor siguiente:

$\beta = -1{,}00000E - 08$

En este punto debemos haber alcanzado la resonancia 2:1, para comprobarlo vamos a pedirle a AUTO200 que nos muestre los valores de los autovalores, con la siguiente orden:

```
AUTO>ev('equip')
```

Los valores de los autovalores, copiados directamente de la consola, son los siguientes:

Eigenvalue 1 -5.000000E-09 -1.064084E+00

Eigenvalue 2 -5.000000E-09 1.064084E+00

Eigenvalue 3 -5.000000E-09 5.425798E-01

Eigenvalue 4 -5.000000E-09 -5.425798E-01

Como podemos ver tenemos dos parejas de autovalores conjugados, y debido a que hemos alcanzado la resonancia 2:1, los valores de las partes imaginarias de dichas parejas son el doble, en módulo, entre sí. Además podemos ver que se cumple la condición para la existencia de un punto de bifurcación de Hopf, ya que la parte real es despreciable, es decir, puede tomarse como valor cero, lo que nos lleva a tener dos parejas de autovalores conjugados en el eje imaginario, cumpliendo la condición para estos puntos citada al principio de este capítulo.

Las partes imaginarias nos ofrecen dos posibles períodos de los que partiremos para la continuación de órbitas periódicas. Calculamos los dos períodos usando la ecuación siguiente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Siendo ω la parte imaginaria de cada una de las parejas de autovalores conjugados en el punto de bifurcación de Hopf. Si aplicamos la ecuación anterior, se obtiene:

- $T_1 = 5{,}908859$ para $\omega_1 = 1{,}064084$.
- $T_2 = 11{,}61101$ para $\omega_2 = 0{,}542579$.

Una vez obtenido el punto de bifurcación de Hopf y los dos posibles períodos de continuación, ya estamos en disposición de realizar la continuación de órbitas periódicas a partir de dicho punto con cada uno de dichos períodos. Al existir dos períodos hemos creado dos parejas tipos ficheros **equip.c** y **c.equip**, una para cada uno, **equip1.c** y **c.equip1** y **equip2.c** y **c.equip2** para el primer y segundo período respectivamente. Hemos ejecutado y grabado dichos ficheros de la forma descrita en este apartado, para su uso en los apartados siguientes.

4.4.2. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de Hopf para $T_1 = 5{,}908859$.

En este apartado a partir del punto de Hopf (**HB**), hallado antes, realizamos la continuación de órbitas periódicas. Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación.

Debemos asegurarnos de que partimos con el período deseado $T_1 = 5{,}908859$, para ello en el fichero **s.equip1** al punto de Hopf (**HB**) (punto 100, etiqueta 21) le asignamos dicho período, ya que es este archivo el que usará AUTO2000 para iniciar la continuación desde el punto de Hopf (**HB**).

El fichero que usamos para la continuación es **c.perp1**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip1')
AUTO>r(c='perp1', s='equip1')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´equip1', ejecutemos el fichero de constantes ´perp1', basándonos siempre en las ecuaciones que hemos cargado anteriormente con el comando *load*. No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('perp1')
AUTO>cl()
```

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- En la siguiente gráfica(4.22) representamos la amplitud de la rama de órbitas periódicas,**L2-NORM**,frente al período:

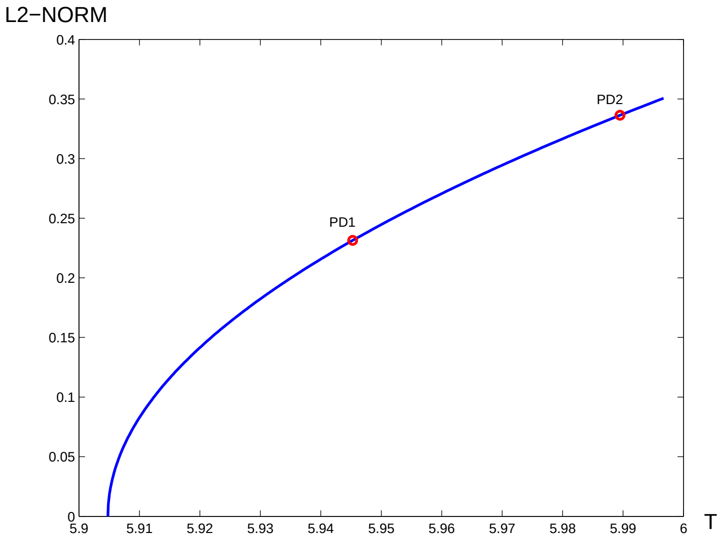


Figura 4.22: La amplitud frente al período.

En la gráfica anterior(4.22) los valores de la amplitud de la rama de órbitas periódicas son del orden de décimas, comprobando de nuevo que nos hemos alejado ya del la posición de equilibrio inicial $\theta = 0$ y $\varphi = 0$ de partida.

En la gráfica anterior(4.12) hemos marcado un par de puntos de bifurcación de doble período (**PD**), de entre todos los que AUTO2000 ha detectado. Cada vez que el programa etiqueta un punto como **PD** quiere decir que hemos alcanzado la resonancia 2:1, en dicho punto y, por tanto, a partir de este punto si continuamos las órbitas periódicas veremos como el período se duplica. Este tipo de puntos serán los siguientes puntos de continuación.

- Con el siguiente par de gráficas(4.23) y (4.24) mostramos la existencia de periodicidad en la solución obtenida, en ellas representamos los ángulos θ y φ frente al período, respectivamente, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas.

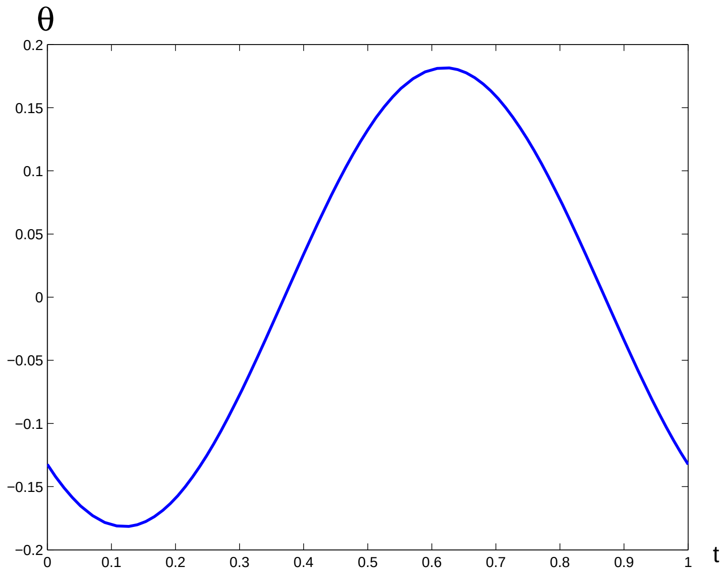


Figura 4.23: θ frente al tiempo.

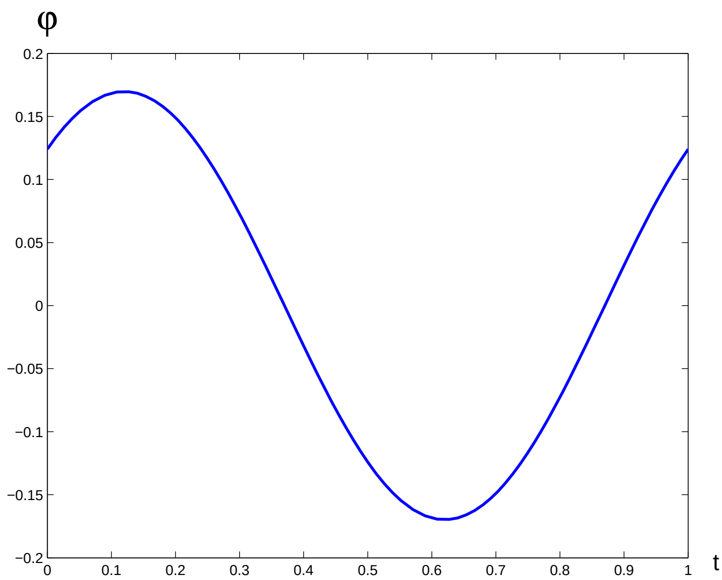


Figura 4.24: φ frente al tiempo.

- En la siguiente gráfica(4.25) representamos el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

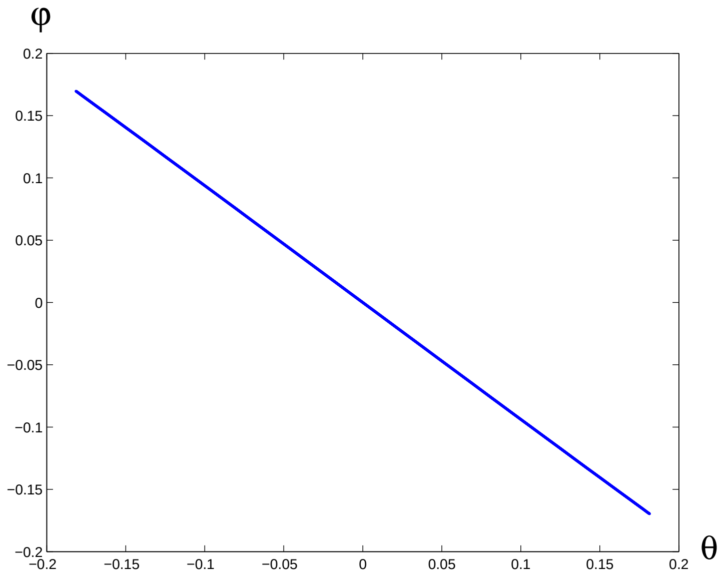


Figura 4.25: φ frente a θ.

En la gráfica anterior(4.25) podemos ver que los ángulos en esta rama de órbitas periódicas están ahora en contrafase, es decir, las masas de nuestro sistema se moverán en sentido contrario, aunque sigue existiendo una relación entre los ángulos, para cualquiera de los puntos:

$$\varphi = 0{,}936 \cdot \theta \tag{4.6}$$

Con esta relación a diferencia que en los casos anteriores, ahora la masa m_1 se moverá en un arco mayor que la masa m_2, por ser θ mayor que φ en este caso.

- La siguiente gráfica(4.26), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra este movimiento, en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas en el tiempo:

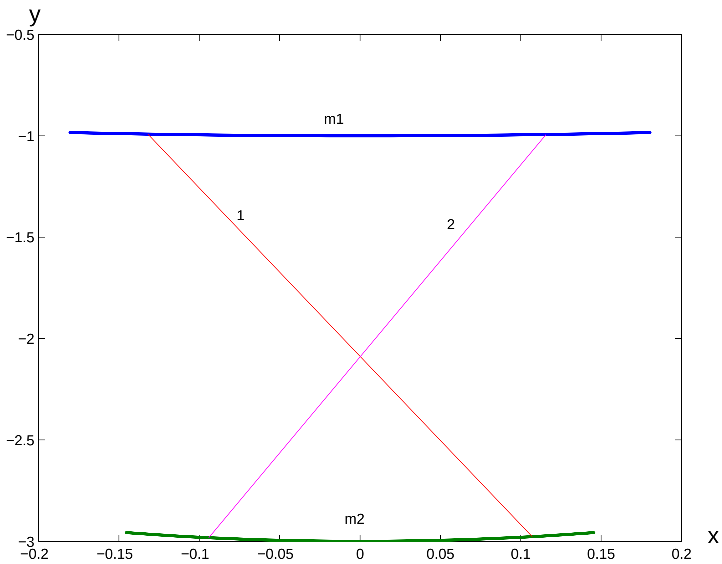


Figura 4.26: Las masas frente al tiempo.

Vemos en la gráfica que ambas masas realizan un movimiento pendular simple, moviéndose en contrafase, ya que como puede verse con las líneas cuando una masa está a un lado del cero la otra está en el contrario; ambas masas siguen parándose al alcanzar los extremos de los arcos que describen en sus respectivas trayectorias. Además podemos comprobar en la gráfica que la masa m_1 se mueve con ángulos mayores a la masa m_2, como se dijo antes.

El siguiente apartado continuamos a partir de uno de los puntos de bifurcación de doble período (**PD**), señalados en la gráfica(4.22).

Estabilidad de esta rama de órbitas periódicas.

En los siguientes gráficos se muestra la evolución de los multiplicadores:

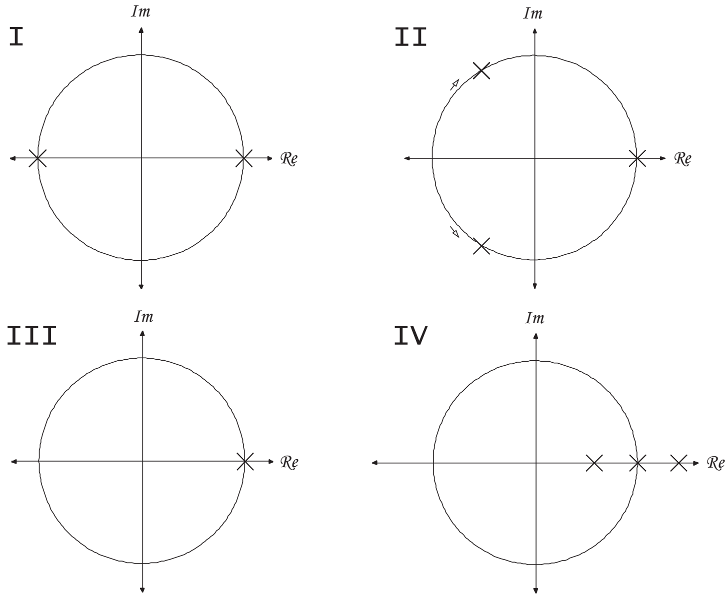


Figura 4.27: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

De la observación del gráfico anterior podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, dos de ellos estarán en el valor 1 y los otros dos en el valor -1.
- En un segundo instante, gráfico **II**, los que están en el valor -1 empezarán a desplazarse siguiendo la circunferencia de radio unidad.
- En el gráfico **III** vemos que ya están los cuatro multiplicadores en el valor 1.
- Por último en el gráfico **IV** vemos como dos de los multiplicadores se salen del valor 1, uno adentrándose en la circunferencia de radio unidad y el otro saliendo de ella. Ésto es debido a que hemos encontrado un punto de bifurcación **BP**, y a partir de este punto siempre tendremos al menos un multiplicador fuera de la circunferencia. Por tanto, a partir de este punto la rama de órbitas periódicas pasará a ser inestable.

4.4.3. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de bifurcación de doble período $PD1$.

En este apartado a partir del punto de bifurcación de doble período (**PD1**), obtenido en el apartado 4.4.2, realizamos la continuación de órbitas periódicas. Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación. El **PD1** es para AUTO2000 el punto 115(etiqueta 75). Inicialmente el valor del período en este punto es $T = 5{,}94527$, una vez realicemos la continuación de órbitas periódicas a partir del mismo veremos como se duplica dicho período, y volveremos a analizar el movimiento de nuestro sistema en la rama de órbitas periódicas que obtengamos. En este caso debemos notar que cuando se duplica el período nos vamos a valores de éste del orden del apartado 4.4.2, así los resultados que obtengamos deberán ser próximos a los que allí obtuvimos.

El fichero que usamos para la continuación es **c.pd1**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip1')
AUTO>r(c='pd1', s='perp1')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´perp1', ejecutemos el fichero de constantes ´pd1', seguimos las ecuaciones originales cargadas con el comando *load*. No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('pd1')
AUTO>cl()
```

Primero comprobamos que el período se ha duplicado, obtenemos:

$$T_i = 5{,}9452 \quad \Longrightarrow \quad T_f = 11{,}8905 \tag{4.7}$$

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- La primera gráfica representa la evolución de la amplitud de la rama de órbitas periódicas frente al período:

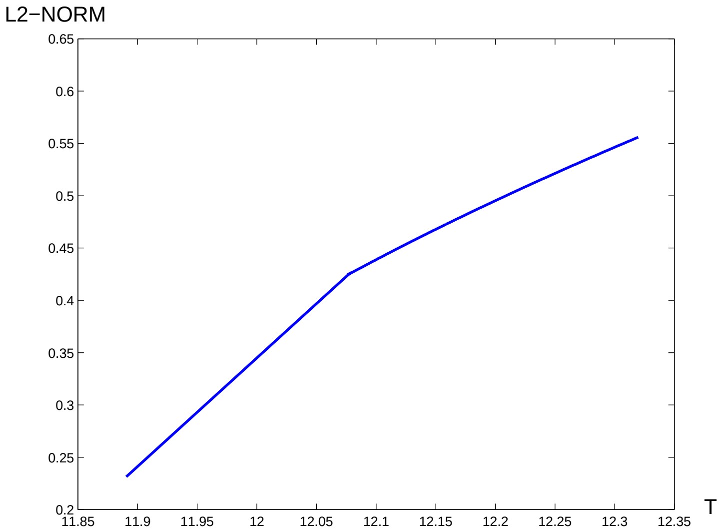


Figura 4.28: La amplitud frente al período.

En ella podemos que ver que estamos ya bastante alejados de la posición de equilibrio de la que partimos, ya que la amplitud toma valores de orden décimas de la unidad.

- La segunda gráfica representa el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

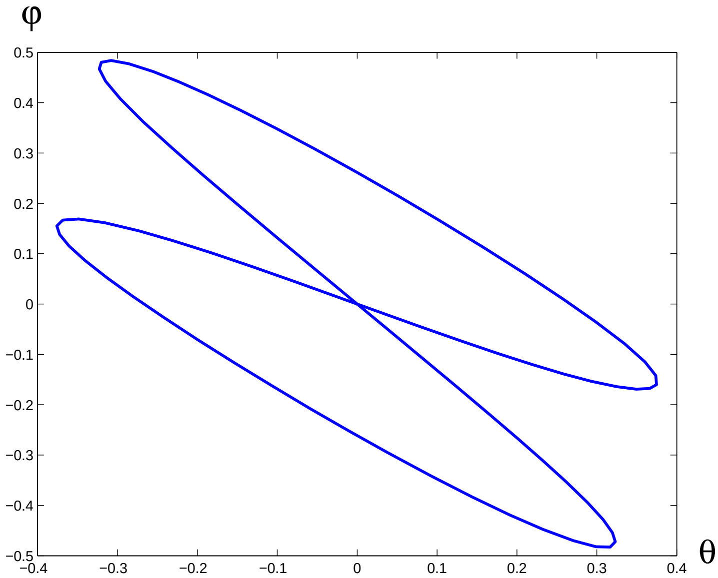


Figura 4.29: φ frente a θs.

En la gráfica anterior vemos que hemos perdido la propiedad de la contrafase, correspondiendo para un valor de θ al menos tres valores de φ. En este caso el movimiento en cartesianas ya no será simple para la masa m_2, sino que ahora describirá en su trayectoria una curva que se cruza con ella misma.

- La siguiente gráfica(4.30), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra este movimiento, en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas en el tiempo:

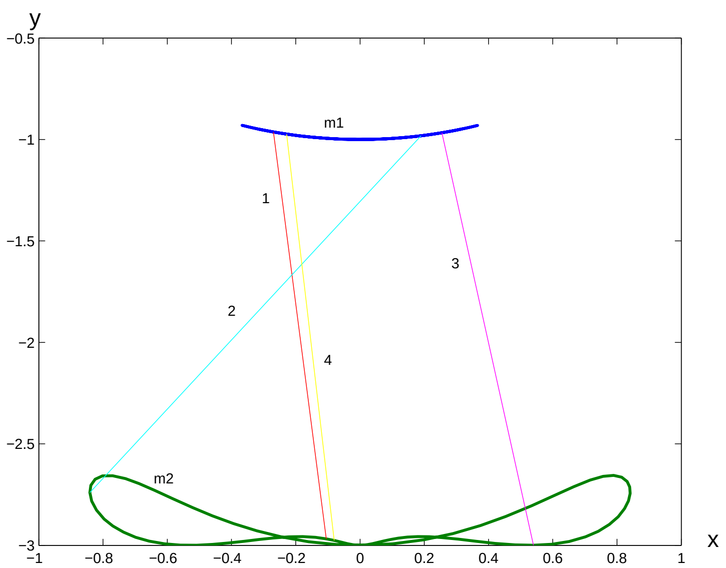


Figura 4.30: Las masas frente al tiempo.

Como podemos ver se cumple lo que ya señalamos, después de analizar la curva (4.29), el movimiento de la masa m_2 describe en su trayectoria una especie de ocho; en este caso al describir la masa m_2 una curva cerrada podemos señalar que no llega a pararse en su movimiento, mientras que la masa m_1 sigue parándose al llegar al extremo del arco que describe en su movimiento.

Estabilidad de esta rama de órbitas periódicas.

Este es un caso totalmente distinto a los anteriores. Vemos su gráfico correspondiente:

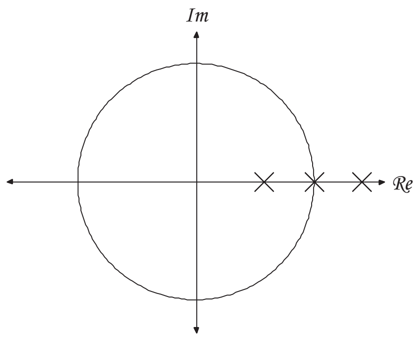


Figura 4.31: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de doble período.

Como podemos ver en el gráfico siempre tenemos al menos un multiplicador fuera de la circunferencia de radio unidad y por tanto, la órbita siempre será inestable.

4.4.4. Continuación de órbitas periódicas a partir del punto de Hopf para $T_2 = 11{,}61101$.

En este apartado a partir del punto de Hopf (**HB**), hallado en el apartado 4.4.1, realizamos la continuación de órbitas periódicas. Tomamos como parámetros de continuación, PAR[2](β) como primer parámetro y PAR[10](T) como segundo parámetro de continuación.

Debemos asegurarnos de que partimos con el período deseado $T_2 = 11{,}61101$, para ello en el fichero **s.equip2** al punto de Hopf (**HB**) (punto 100, etiqueta 21) le asignamos dicho período, ya que es este archivo el que usará AUTO2000 para iniciar la continuación desde el punto de Hopf (**HB**).

El fichero que usamos para la continuación es **c.perp2**, cuya estructura fue explicada al principio de este capítulo, así que pasamos a describir las órdenes que introducimos en AUTO2000 por consola:

```
AUTO>ld('equip2')
AUTO>r(c='perp2', s='equip2')
```

Con estas órdenes, lo que le estamos diciendo a AUTO2000 es que partiendo de la solución ´equip2', ejecutemos el fichero de constantes ´perp2', basándonos siempre en las ecuaciones que hemos cargado anteriormente con el comando *load*. No debemos olvidar, asegurarnos que el parámetro β sigue valiendo cero.

Guardamos los cambios y eliminamos los ficheros intermedios con las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('perp2')
AUTO>cl()
```

Mostramos seguidamente las gráficas que obtenemos:

- En la siguiente gráfica(4.32) representamos la amplitud de la rama de órbitas periódicas,**L2-NORM**,frente al período:

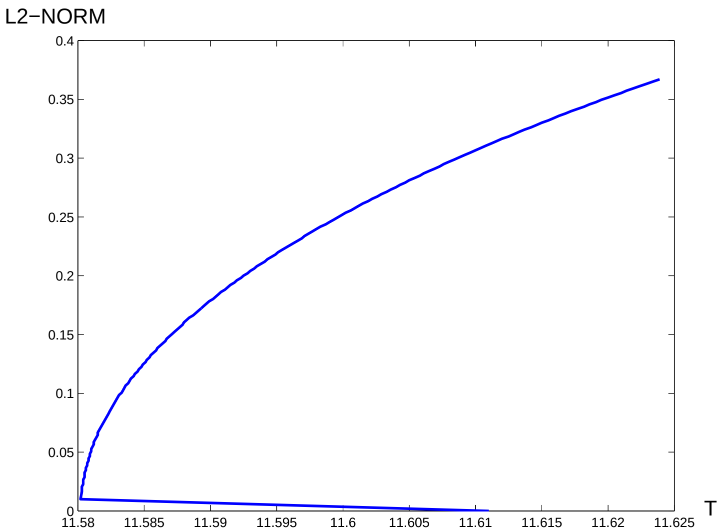


Figura 4.32: La amplitud frente al período.

  En la gráfica anterior(4.22) los valores de la amplitud de la rama de órbitas periódicas son del orden de décimas, comprobando de nuevo que nos hemos alejado ya del la posición de equilibrio inicial $\theta = 0$ y $\varphi = 0$ de partida.

  En este caso no se han detectado puntos de bifurcación de doble período.

- Con el siguiente par de gráficas(4.33) y (4.34) mostramos la existencia de periodicidad en la solución obtenida, en ellas representamos los ángulos θ y φ frente al período, respectivamente, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas.

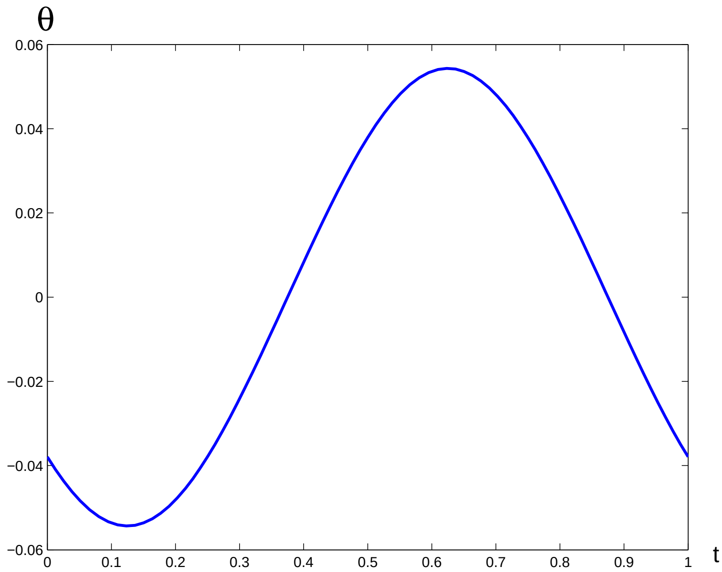


Figura 4.33: θ frente al tiempo.

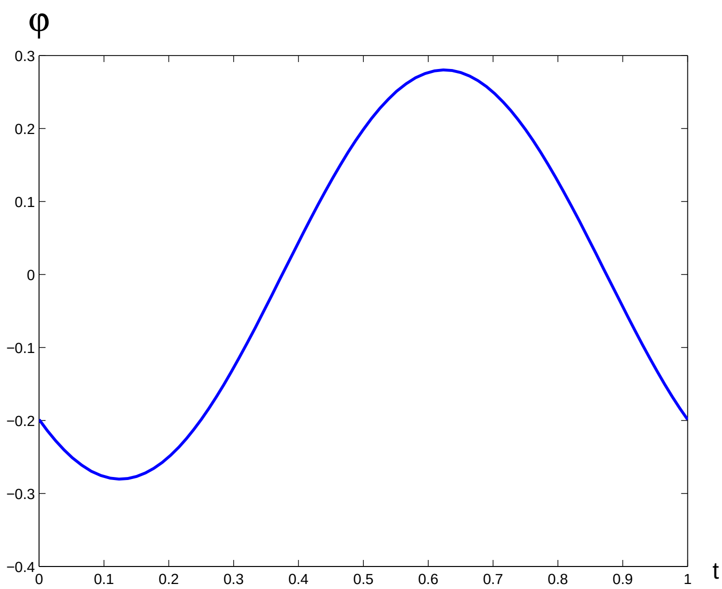


Figura 4.34: φ frente al tiempo.

- En la siguiente gráfica(4.35) representamos el ángulo φ frente al ángulo θ, en punto representativo de la rama de órbitas periódicas:

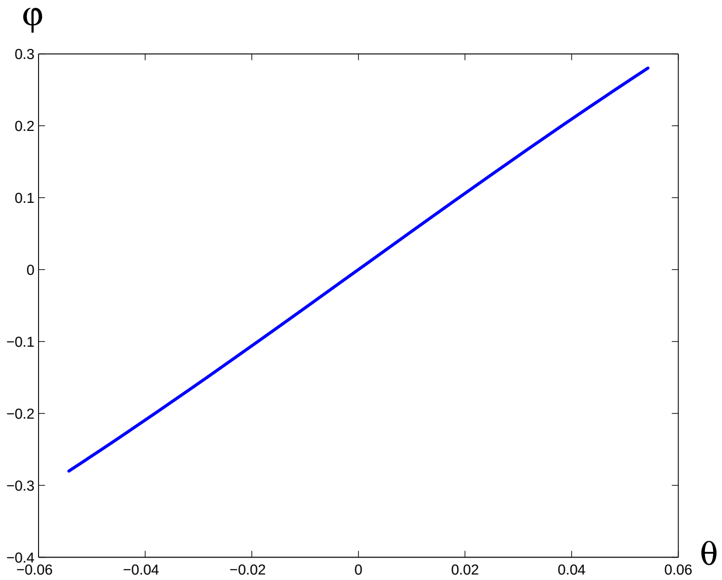


Figura 4.35: φ frente a θ.

En la gráfica anterior(4.35) podemos ver que los ángulos en esta órbita están ahora en fase, es decir, las masas de nuestro sistema se moverán en el mismo sentido. Sigue existiendo una relación entre los ángulos, para cualquiera de los puntos:

$$\varphi = 5{,}24 \cdot \theta \tag{4.8}$$

Debemos hacer notar con esta relación que en su movimiento la masa m_2 describe trayectorias mucho mayores que la masa m_1.

- La siguiente gráfica(4.36), en la que hemos pasado a coordenadas cartesianas a partir de los valores de los ángulos θ y φ, muestra este movimiento, en la gráfica se han colocado unas líneas que van marcando la posición relativa entre las dos masas, m_1(en la curva azul) y m_2(en la curva verde), en los diferentes instantes de tiempo, numerados de forma que podamos seguir el movimiento relativo de dichas masas en el tiempo:

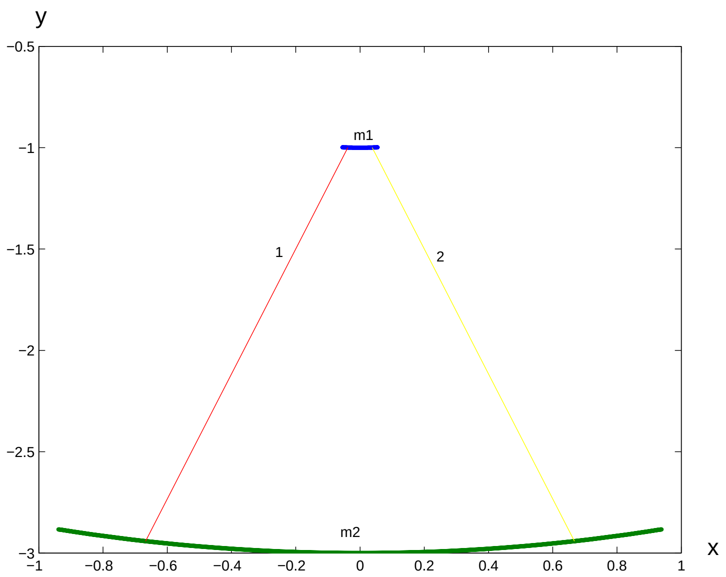


Figura 4.36: Las masas frente al tiempo.

Vemos en la gráfica que ambas gráficas realizan un movimiento pendular simple, moviéndose en fase, ya que como puede verse con las líneas ambas masas se mueven a la vez al mismo lado del valor cero. En este caso la masa m_2 vuelve a describir ángulos mayores a los de la masa m_1. De nuevo, ambas masas se paran al llegar a los extremos de los arcos que describen en sus respectivas trayectorias.

Estabilidad de esta órbita periódica.

En los siguientes gráficos se muestra la evolución de los multiplicadores:

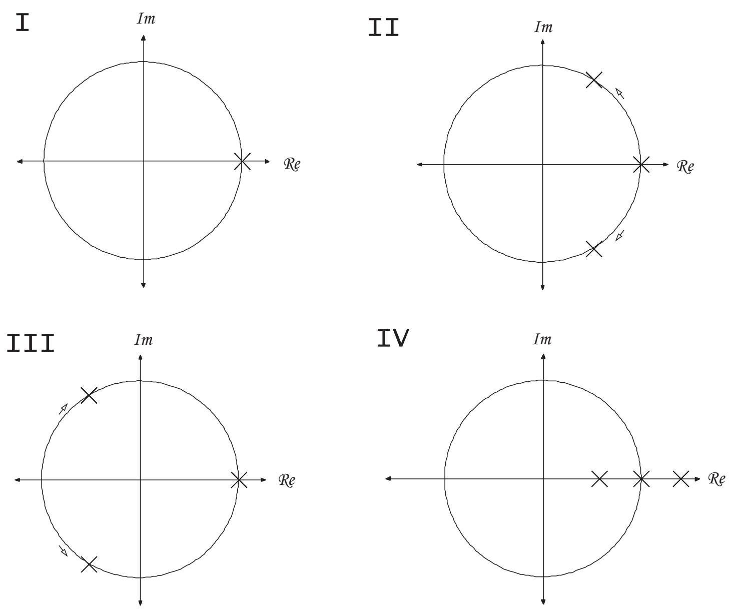


Figura 4.37: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

De la observación de los gráficos anteriores podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, los cuatro multiplicadores están en el valor 1.
- En un segundo instante, gráfico **II**, dos de los multiplicadores se desplazan hacia el valor -1.
- En el gráfico **III** los dos multiplicadores anteriores vuelven hacia valor 1.
- Por último el gráfico **IV** representa un instante posterior a la llegada de la pareja de multiplicadores al valor 1, podemos ver como un multiplicador se sale de la circunferencia de radio unidad, debido a la existencia de un punto de bifurcación **BP**; en los siguientes instantes siempre tendremos al menos un multiplicador fuera de la circunferencia. Por tanto, a partir de la existencia del punto de bifurcación **BP** la rama de órbitas periódicas pasará a ser inestable.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de los tres capítulos anteriores del proyecto, hemos estudiado analítica y numéricamente nuestro sistema, Fig 5.1, con el objetivo de calcular el efecto de la resonancia 2:1, Fig 5.2, sobre su comportamiento, en cuanto a estabilidad y movimiento se refiere, tanto en posiciones de equilibrio como en órbitas periódicas, por medio de la formulación lagrangiana.

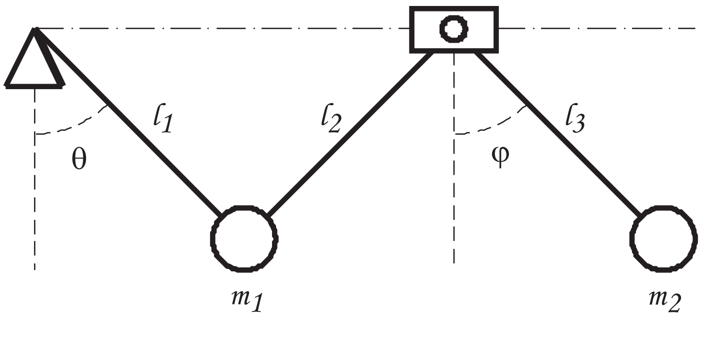


Figura 5.1: Modelo del sistema.

Debido a que las ecuaciones diferenciales de nuestro modelo son complejas, el estudio analítico se ha visto muy reducido, y el mayor peso del proyecto se lo ha llevado la parte numérica realizada con AUTO2000.

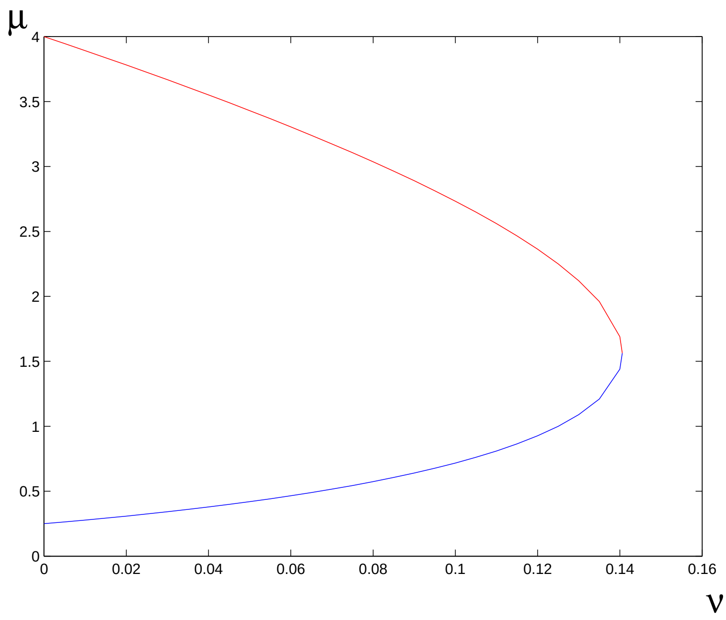
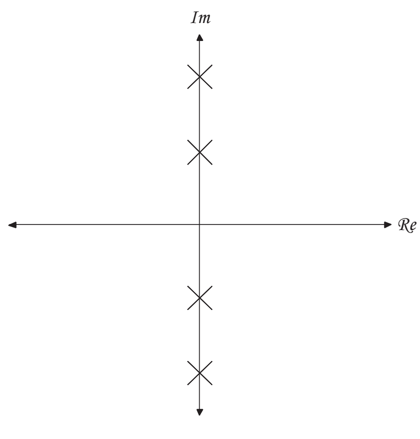


Figura 5.2: Curva de resonancia 2:1.

Se han obtenido cuatro posibles situaciones de equilibrio, centrando nuestro estudio en la posición $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, al ser esta posición la única que produce soluciones estables, tanto de equilibrio como de órbitas periódicas; al ser una posición de equilibrio estable permite que se alcance la resonancia 2:1, ya que sus cuatro autovalores forman dos parejas de autovalores conjugados imaginarios puros permitiendo que tanto las frecuencias propias como sus períodos correspondientes guarden una proporción determinada expresable como un cociente de números enteros. El siguiente gráfico muestra el espectro de autovalores correspondiente a esta posición de equilibrio estable:



Con el desarrollo numérico hemos podido comprobar que la posición de equilibrio, $\theta = 0$ y $\varphi = 0$, se obtiene para cualquier valor tanto de las masas como de las longitudes de las barras de nuestro sistema, como muestra la siguiente gráfica, obtenida al realizar la continuación de equilibrios utilizando como parámetro de continuación $\mu = \dfrac{\ell_3}{\ell_1}$:

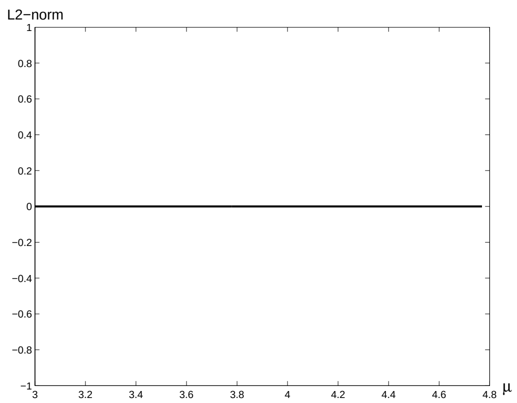


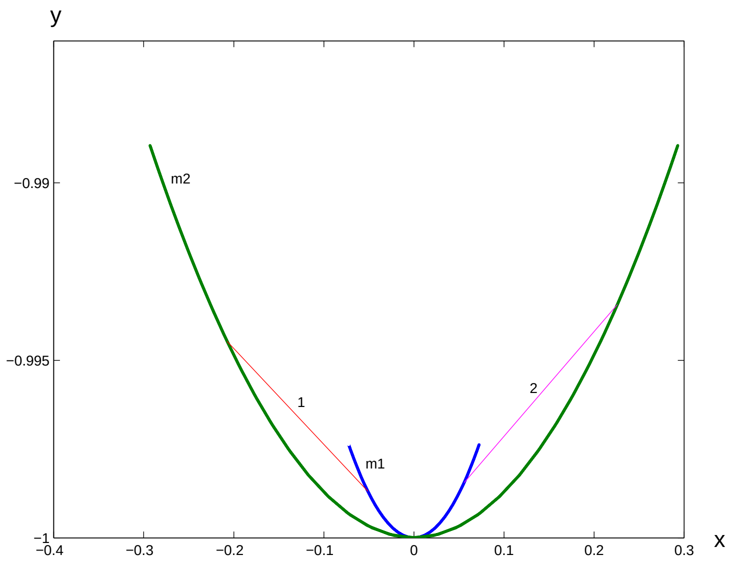
Figura 5.3: Amplitud frente a μ.

En cuanto a la continuación de órbitas periódicas, partimos de dos puntos distintos de coordenadas (μ, ν) =(3,0.07) y (1,0.12) , próximos a la curva de resonancia 2:1, Fig 5.2, para que al alcanzar la resonancia el programa de continuación numérica AUTO2000 detecte un punto de bifurcación de Hopf para cada uno de ellos. A partir de dichos puntos de Hopf hemos podido realizar la continuación de órbitas periódicas con dos posibles períodos iniciales, guardando estos períodos entre sí una proporción doble debido a la resonancia usada. Además cada vez que la resonancia es alcanzada durante la continuación nos aparecen puntos especiales, como por ejemplo, puntos de bifurcación doble período, en los cuales se duplica el período de las órbitas periódicas que se continúan a partir de ellos.

En el capítulo anterior se han desarrollado extensamente los resultados obtenidos a partir de la continuación de las órbitas periódicas para ambos casos. No obstante señalamos en este capítulos los tres movimientos relativos entre las masas m_1 y m_2 de nuestro sistema, así como un ejemplo de la estabilidad en las ramas de órbitas periódicas. Hemos obtenido las gráficas de dichos movimientos al pasar a coordenadas cartesianas los valores de los ángulos θ y φ que AUTO2000 nos ha ido proporcionando:

- *Movimiento en fase.*

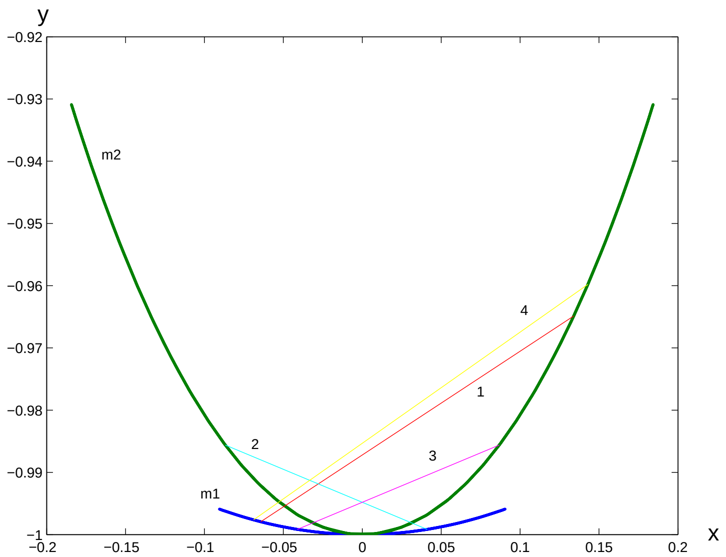
  Ambos masas se mueven en el mismo sentido, manteniendo una relación constante entre los ángulos que describen en su trayectoria.



En la gráfica anterior podemos ver que ambas masas, m_1 y m_2, llegan a pararse, su velocidad se hace cero, lo que se deduce al ver que los movimientos que dichas masas describen son arcos en lugar de curvas completas, parándose las masas en los extremos de dichos arcos.

- *Movimiento en contrafase.*

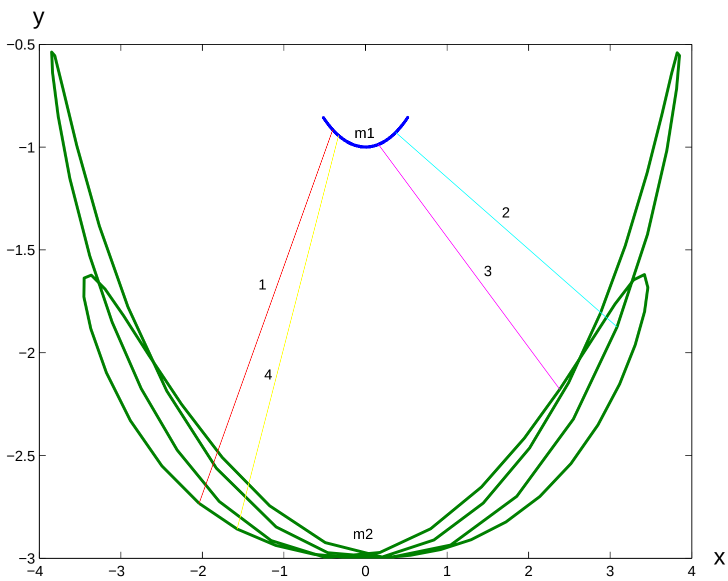
  En este movimiento las masas se mueven en sentido contrario, pero siguen manteniendo una relación constante entre sus ángulos.



De nuevo, ambas masas se paran al llegar al extremo de los arcos que describen en sus respectivas trayectorias.

- *Movimiento de transición entre los dos anteriores.*

  Para este tipo de movimiento no existe una relación entre los ángulos que describen las masas, m_1 y m_2, de nuestro sistema, debido a que ya no estamos ni en fase ni en contrafase.



  En ella vemos que mientras la masa m_1 sigue describiendo un arco en su trayectoria (parándose al llegar a los extremos de dicho arco), como en los dos movimientos anteriores, la masa m_2 ya no describe un arco en su trayectoria sino que ahora ésta viene dada por dos curvas cerradas, lo que nos indica que la masa m_2 no llega a pararse en su movimiento.

En los siguientes gráficos se muestra un ejemplo de la evolución de los multiplicadores, en ella vemos el cambio de estabilidad en una rama de órbitas periódicas:

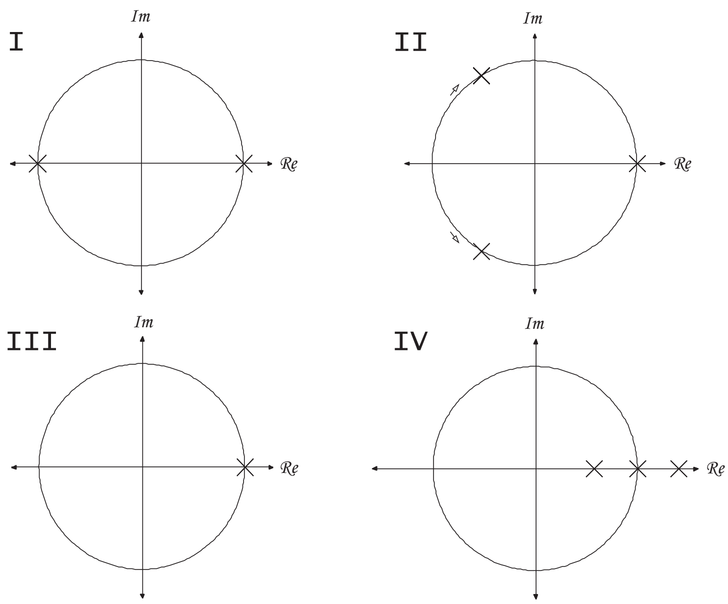


Figura 5.4: Multiplicadores para la rama de órbitas periódicas con origen en el punto de Hopf.

De la observación del gráfico anterior podemos señalar:

- Inicialmente, gráfico **I**, dos de ellos estarán en el valor 1 y los otros dos en el valor -1.
- En un segundo instante, gráfico **II**, los que están en el valor -1 empezarán a desplazarse siguiendo la circunferencia de radio unidad.
- En el gráfico **III** vemos que ya están los cuatro multiplicadores en el valor 1.
- Por último en el gráfico **IV** vemos como dos de los multiplicadores se salen del valor 1, uno adentrándose en la circunferencia de radio unidad y el otro saliendo de ella. Ésto es debido a que hemos encontrado un punto de bifurcación **BP**. Por tanto, a partir de este punto la rama de órbitas periódicas pasará a ser inestable.

Por todo lo anterior queda demostrado el conocimiento del programa AUTO2000 para la continuación de equilibrios y órbitas periódicas en función de uno o dos parámetros (relación de masas y de longitudes de las barras), lo cual era un objetivo implícito en la realización del proyecto.

Bibliografía

[1] Strogatz, S. H.: **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering.**
Addison-Wesley 1994

[2] Roseau, M.: **Vibrations in Mechanical system.**
Springer-Verlag

[3] Rañada, A.: **Dinámica Clásica.**
Alianza Universidad Textos

[4] Rodrígez Danta M.: **Cuadernos de Mecánica Dinámica.**
E.T.S.I. Universidad de Sevilla.

[5] Pagano, D. J.: **Bifurcaciones en sistemas de control no lineales.**
E.T.S.I. Universidad de Sevilla.

[6] Cascales, B.; Lucas, P.; Mira, J.M.; Pallarés, A.;Hayna I.; Schlegl E.: **Una descripción de LaTeX2.**
Noviembre 1998

[7] Kopka, H.; Daly, P.W.: **A guide to LaTeX. Document preparation for beginners and advanced Users.**
Edition. Addison.Wesley, 1999.

[8] Cascales, B.; Lucas, P.; Mira, J.M.; Pallarés, A.; Sánchez-Pedreño, S.: **LaTeX. Una impresora en tus manos**.
Madrid, Addison-Wesley 2000

[9] Pueyo, F.J.: **Procesamiento de textos con LaTeX.** .
Abril 2000

[10] Sánchez,I.; González, Lorenzo.: **Manual básico de LaTeX.**
Marzo 2003

[11] Aldarias Raya,P.: **Introducción a LaTeX.**
Febrero 2004

[12] Sanguino, J: **Iniciación a LaTeX2. Un sistema para producir documentos.**
Universidad politécnica de Madrid, Addison-Wesley