

## **CAPÍTULO 2. MÉTODOS EMPLEADOS.**

En este apartado se presentan las distintas técnicas empleadas a la hora de resolver el problema que se ha planteado. En primer lugar se describe sucintamente el método de los elementos finitos, entrando en mayor profundidad en las características específicas del problema como el contacto y el submodelado en el programa de MEF empleado.

Además se describe un método analítico que se ha utilizado entre otros para validar en cierto modo la resolución del modelo empleado. Este método proporciona la solución para la entrada en contacto entre eje y cubo.

Por último se describe el criterio empleado para el cálculo de la vida. Este método es el de Smith-Watson y Topper que es el más adecuado para el problema ante el que nos encontramos.

### **2.1. El Método de los Elementos Finitos.**

Son muchas las facetas de la ingeniería en las que se precisa determinar la distribución de tensiones y deformaciones en un medio continuo. Para vencer la dificultad que representa la solución de problemas continuos reales, en los que el número de grados de libertad es infinito, se han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de discretización. La aplicación de estos métodos supone una aproximación, que se acercará más a la realidad conforme aumente el número de variables discretas.

Como métodos numéricos más importantes se puede destacar: el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos (MEF).

El método de los elementos finitos supone una metodología general aplicable a los sistemas discretos. Esto, tanto desde el punto de vista conceptual como del numérico es de la mayor importancia. Conceptualmente permite una mejor comprensión del problema, y numéricamente establece un criterio unificado para abordar una gran variedad de problemas y desarrollar procedimientos generales de cálculo. Todos los análisis con el método de los elementos finitos (MEF en adelante) siguen un patrón general que puede adaptarse universalmente a todos los sistemas discretos, de ahí su aceptación. Todo lo que se va a comentar a continuación se refiere al MEF, que es el que se ha empleado en la realización de este proyecto fin de carrera.

### 2.1.1. Fundamento teórico.

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un sólido deformable sometido a un estado de cargas general son las siguientes.

$$\text{- equilibrio:} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\text{- compatibilidad:} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \equiv \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.1.2)$$

$$\text{- comportamiento:} \quad \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad \equiv \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1.3)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el de deformaciones,  $\mathbf{u}$  el vector de desplazamientos y  $\mathbf{X}$  las fuerzas de volumen. Las ecuaciones (2.1.3) son conocidas como ecuaciones de Lamé, donde  $\lambda$  es la constante de Lamé,  $G$  el módulo de elasticidad tangencial y  $\theta$  el cambio unitario de volumen.

Para la unicidad de la solución se han considerar además las condiciones de contorno, ya sean en términos de fuerzas o de desplazamientos.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en} \quad \partial D_u \quad (2.1.4)$$

$$T_i^{ne} = \bar{t}_i \quad \text{en} \quad \partial D_t \quad (2.1.5)$$

$$\partial D = \partial D_u \cup \partial D_t \quad (2.1.6)$$

donde  $\bar{u}_i$  son los desplazamientos conocidos en la zona con desplazamiento impuesto  $\partial D_u$  y  $\bar{t}_i$  es la carga aplicada en el contorno del dominio  $\partial D_t$ .

Ésta es una formulación diferencial, es decir, que se imponen las ecuaciones en cada punto del continuo elástico. El Teorema de los Trabajos Virtuales supone la formulación integral o formulación débil. Éste en formulación matricial es:

$$\int_D \boldsymbol{\varepsilon}^{\psi T} \boldsymbol{\sigma} dV = \int_D \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{X} dV + \int_{\partial D} \boldsymbol{\psi}^{cT} \mathbf{t}^c dS \quad (2.1.7)$$

donde:

- $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{t}^c$  son respectivamente el campo de tensiones, de fuerzas de volumen y de fuerzas de contorno en equilibrio.
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{\psi}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  y  $\boldsymbol{\psi}^c$  representan un campo de deformaciones y desplazamientos compatibles, aunque no necesariamente la solución del problema elástico para el sistema de tensiones en equilibrio.

En el Teorema de los Trabajos Virtuales (en adelante TTV) se pueden imponer las relaciones y condiciones de contorno anteriores. De esta manera, y operando como se indica a

continuación se llega a una ecuación con una sola incógnita. Esta ecuación está en forma matricial y la incógnita es el campo de desplazamientos.

El primer paso es la definición de los vectores tensión, deformación y desplazamientos como se muestra a continuación.

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (2.1.8)$$

La relación entre las deformaciones y los desplazamientos es la siguiente:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u} \quad (2.1.9)$$

donde  $\underline{L}$  es un operador diferencial tal que esta ecuación es equivalente a (2.1.2) escrita en forma compacta

Las tensiones se relacionan con las deformaciones mediante la Ley de Comportamiento.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (2.1.10)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores se llega a la relación entre los desplazamientos y las tensiones.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u} \quad (2.1.11)$$

Introduciendo en el TTV estos vectores y las relaciones entre ellos se obtiene la formulación que sigue.

$$\int_D \underline{u}^{*T} \cdot \underline{L}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u} \cdot dV = \int_D \underline{u}^{*T} \cdot \underline{f} \cdot dV + \int_{eD} \underline{u}^{*T} \cdot \underline{t} \cdot dS \quad (2.1.12)$$

donde:

- $f$  y  $t$  son respectivamente las fuerzas de volumen y de contorno.
- $\underline{\varepsilon}^* = \underline{L} \cdot \underline{u}^*$  es el sistema virtual de desplazamientos y deformaciones compatible.

La próxima operación que se realiza es la discretización matemática del problema. En primer lugar se discretiza la geometría del problema, pasando de un número infinito de grados de libertad a un número finito de los mismos. En segundo lugar se discretizan los desplazamientos, los cuales se obtienen en los nodos.

La compatibilidad se impone forzando a que los nodos coincidentes en posición pero pertenecientes a distintos elementos tengan desplazamientos iguales.

La discretización de los desplazamientos se realiza mediante funciones de pequeño soporte o funciones de forma  $\underline{N}$  que aproximan, el campo de desplazamientos en esa zona del sólido. Esta discretización se realiza aproximando con las mismas funciones los desplazamientos del problema real y del virtual, para que la matriz de rigidez resulte simétrica como se verá más adelante. Cuando se utilizan las mismas funciones para aproximar la geometría y los desplazamientos se tienen los denominados elementos isoparamétricos.

La aproximación queda de la siguiente manera.

$$\text{- Sistema real de desplazamientos.} \quad \underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{\delta} \quad (2.1.13)$$

$$\text{- Sistema virtual de desplazamientos.} \quad \underline{u}^* = \underline{N} \cdot \underline{\delta}^* \quad (2.1.14)$$

$$\text{- Deformaciones en el sistema real.} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{L} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\delta} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{\delta} \quad (2.1.15)$$

$$\text{- Deformaciones en el sistema virtual.} \quad \underline{\varepsilon}^* = \underline{L} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\delta}^* \quad \underline{\varepsilon}^* = \underline{B} \cdot \underline{\delta}^* \quad (2.1.16)$$

Introduciendo las expresiones anteriores en el PTV se obtiene la formulación final.

$$\underline{\delta}^{*T} \cdot \left( \int_D \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV \right) \cdot \underline{\delta} = \underline{\delta}^{*T} \cdot \left( \int_D \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot dV \right) \cdot \underline{f} + \underline{\delta}^{*T} \cdot \left( \int_{\partial D} \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot dS \right) \cdot \underline{t} \quad (2.1.17)$$

La expresión anterior se debe cumplir para cualquier campo virtual de desplazamientos nodales  $\underline{\delta}^{*T}$ , con lo que se obtiene, eliminando los desplazamientos virtuales:

$$\underline{K} \cdot \underline{\delta} = \underline{P}_f + \underline{P}_t \quad (2.1.18)$$

donde:

- $\underline{K}$  es la matriz de rigidez del sistema  $\underline{K} = \int_D \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dv$
- $\underline{P}_f$  es el vector de fuerzas de volumen:  $\underline{P}_f = \left( \int_D \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot dv \right) \cdot \underline{f}$
- $\underline{P}_t$  es el vector de fuerzas de contorno  $\underline{P}_t = \left( \int_{\partial D} \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot ds \right) \cdot \underline{t}$

Sobre la elección de las funciones de aproximación de los desplazamientos como funciones de pequeño soporte hay que comentar que debido a esto, muchos términos de la matriz  $\underline{K}$  serán nulos, y los que no lo sean estarán definidos sobre una pequeña parte del dominio. De esta manera se reduce el número de operaciones a realizar y por tanto el tiempo de cálculo. Además estas funciones deberán tener su derivada no nula ya que en la matriz  $\underline{B}$  están contenidas las derivadas de las funciones de forma.

Respecto a la matriz  $\underline{K}$  comentar que tiene un claro sentido físico. El elemento  $K_{ij}$  representa la fuerza que aparece en el nodo  $i$  al dar un desplazamiento unidad en el nodo  $j$  manteniendo cero todos los demás desplazamientos.

### 2.1.2. Funciones de forma y convergencia.

Las funciones de forma utilizadas al formular los problemas de elasticidad por el método de los desplazamientos tienen que satisfacer los siguientes criterios de convergencia:

- Deben presentar continuidad entre elementos, es decir, continuidad  $C_0$ . No se requiere continuidad de las derivadas primeras. Con esto se asegura la compatibilidad interelemental.
- La función ha de permitir la representación de cualquier forma lineal de manera que se satisfaga el criterio de deformación constante (primera derivada constante).

En el MEF no se exige compatibilidad en las líneas interelementales. Lo que sí se pide es la convergencia de la solución conforme aumenta el nivel de refinamiento de la malla, es decir, que cumpla el test de la parcela. Este test es una condición necesaria y suficiente de convergencia. Además valora la velocidad de convergencia del elemento probado, prueba la robustez del algoritmo y resulta un buen procedimiento para desarrollar nuevas formas de elementos.

El test de la parcela consiste básicamente en aplicar una deformación constante a una parcela de elementos. Si cuando la parcela se hace lo suficientemente pequeña reproduce exactamente el comportamiento constitutivo del material y proporciona las tensiones correctas, entonces se puede argumentar que la aproximación de elementos finitos converge.

Las integrales necesarias para la obtención de la matriz de rigidez se realiza mediante cuadraturas de Gauss, cuya expresión monodimensional es:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n_g} f(\xi_i) \cdot \omega_i \quad (2.1.19)$$

donde:

- $n_g$  es igual al número de puntos de cuadratura.
- $\xi_i$  son las coordenadas naturales.
- $\omega_i$  son los pesos, que dependen del número de puntos de evaluación.

Haciendo un cambio de variables para que los límites de integración no dependan del tamaño del elemento se tiene la expresión anterior en función de los ejes  $\xi_i$ .

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \sum_{i=1}^{n_g} f(\xi_i) \cdot \omega_i \cdot |J| \quad (2.1.20)$$

donde  $J$  representa el Jacobiano de la función.

Esta expresión integra de forma exacta polinomios de orden  $2 \cdot n_g - 1$ .

Una vez obtenidos los desplazamientos se pueden obtener las tensiones a partir de:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\delta} \quad (2.1.21)$$

La matriz  $\underline{B}$  contiene las derivadas de las funciones de forma, por lo que la aproximación de las tensiones es de un orden menor que los desplazamientos. Para obtener un error menor en las tensiones, se evalúan en los puntos de integración (puntos de Gauss), ya que una cuadratura de un orden menor a la función del integrando da resultados exactos si se evalúa en los puntos de integración. Una vez obtenidas las tensiones en los puntos de Gauss se extrapola el resultado a los nodos. Las tensiones nodales de cada elemento no tienen por que ser iguales en los elementos que concurren en un mismo nodo. ANSYS<sup>®</sup> soluciona este problema asignando en cada nodo la media de los valores nodales obtenidos en los elementos contiguos.

### 2.1.3. Problemas no lineales en el MEF.

Se pueden dar dos clases de problemas no lineales. La no linealidad del material, que implica leyes de comportamiento no lineales, y la no linealidad geométrica, debidas a variaciones no infinitesimales en la geometría del problema. Del primer tipo, un caso típico es el del análisis elasto-plástico de estructuras, donde la relación tensión-deformación no es lineal. Del segundo tipo se tiene un caso característico que es el de pandeo de estructuras, caso particular de grandes desplazamientos.

Para la resolución de problemas no lineales se pueden utilizar tres tipos de técnicas: las incrementales, las iterativas y las mixtas.

Para la explicación nos centraremos en procedimientos en los que se usa la solución de ecuaciones de la forma

$$\underline{K} \cdot \underline{\delta} = \underline{F} \quad (2.1.22)$$

En el caso que nos ocupa es el cambio en la zona de contacto el que hace que varíe la matriz de rigidez. Esta no linealidad es del segundo tipo. Por tanto puede expresarse de la forma

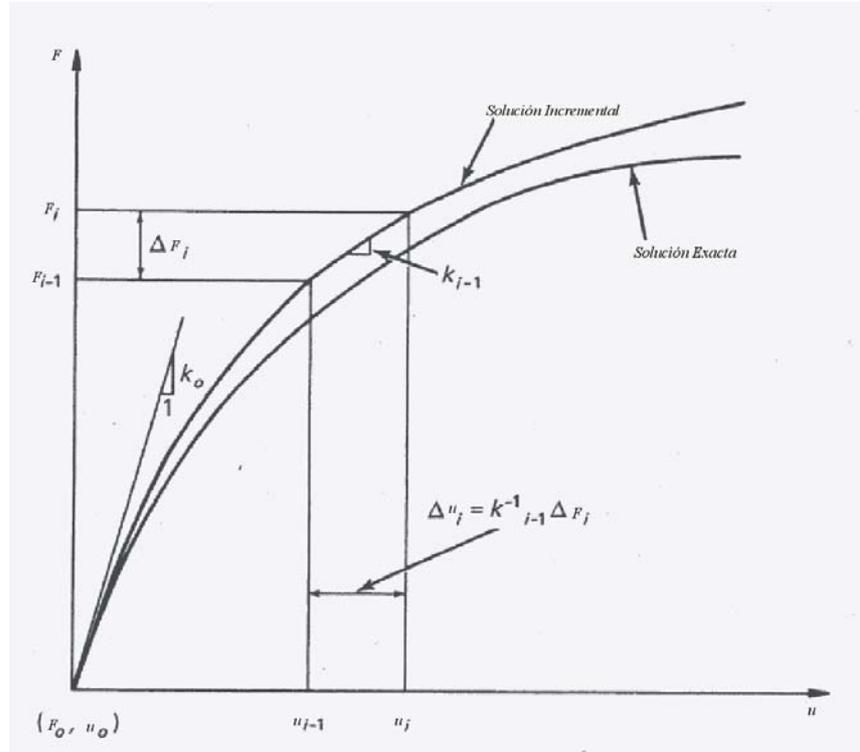
$$\underline{K} = \underline{K}(\delta, F) \quad (2.1.23)$$

En primer lugar están las técnicas incrementales. Éstas se basan en dividir la carga total a aplicar en pequeños incrementos de carga. De esta forma se resuelve el problema como la resolución consecutiva de varios subproblemas. Al inicio de cada incremento de carga se calcula la matriz  $\underline{K}$  continuando con el valor calculado hasta el final de dicho incremento de carga. Se puede formular como sigue:

$$\underline{K}_{i-1} \cdot \underline{\Delta \delta}_i = \underline{\Delta F}_i \quad (2.1.24)$$

donde la matriz de rigidez se obtiene con la evaluación de las variables en el paso anterior:

$$\underline{K}_{i-1} = \underline{K}_{i-1}(\underline{\delta}_{i-1}, \underline{F}_{i-1}) \quad (2.1.25)$$



**Figura 2.1. Procedimiento incremental.**

En segundo lugar se tienen las técnicas iterativas. De este tipo existen diferentes variantes. Todas aplican la carga en su totalidad al inicio. Se calcula la rigidez llegándose a una situación en la que no se ha alcanzado el equilibrio. A partir de ahí se aplica la carga no equilibrada (residuo) para la siguiente iteración.

La principal y más usada es el método de Newton-Raphson. En este método se tiene, en una iteración general, una carga  $\underline{F}$  a aplicar y una carga equilibrada  $\underline{F}_{e,i-1}$  en el paso anterior.

$$\underline{F}_i = \underline{F} - \underline{F}_{e,i-1} \quad (2.1.26)$$

Los incrementos de desplazamientos se obtienen en cada paso mediante la relación:

$$\underline{K}_{i-1} \cdot \underline{\delta}_i = \underline{F}_i \quad (2.1.27)$$

los desplazamientos totales se obtienen en cada iteración mediante:

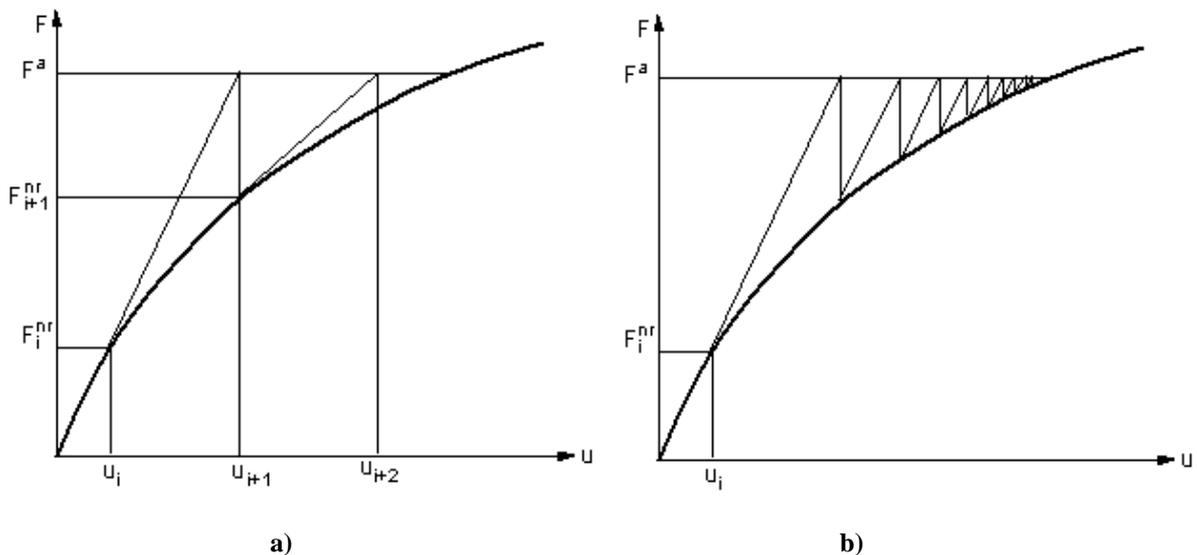
$$\underline{\delta}_i = \underline{\delta}_0 + \sum_{j=1}^i \underline{\Delta \delta}_j \quad (2.1.28)$$

Finalmente  $\underline{F}_{e,i}$  se calcula como la carga necesaria para mantener los desplazamientos  $\underline{\delta}_i$ . Con este valor de la carga equilibrada y teniendo en cuenta la ecuación (2.1.26) se continua con la siguiente iteración.

Este algoritmo produce una rápida convergencia, siendo de hecho cuadrática. Pero resulta caro computacionalmente ya que se ha de formar la nueva matriz  $K$  para cada iteración y además hay casos en los que no es simétrica, como es el de contacto.

Por ello se utiliza a veces el método de Newton-Raphson modificado en el que la matriz de rigidez usada en cada iteración es la misma e igual a la inicial. En este caso la relación entre los desplazamientos y las fuerzas quedaría según la siguiente ecuación.

$$\underline{K}_0 \cdot \underline{\delta}_i = \underline{F}_i \quad (2.1.29)$$



**Figura 2.2. Métodos iterativos. a) Newton-Raphson y b) Newton-Raphson modificado.**

Las técnicas mixtas usan las dos anteriores conjuntamente. Es decir, se divide la carga total en incrementos de carga y en cada incremento se aplica una de las técnicas iterativas anteriormente expuestas.

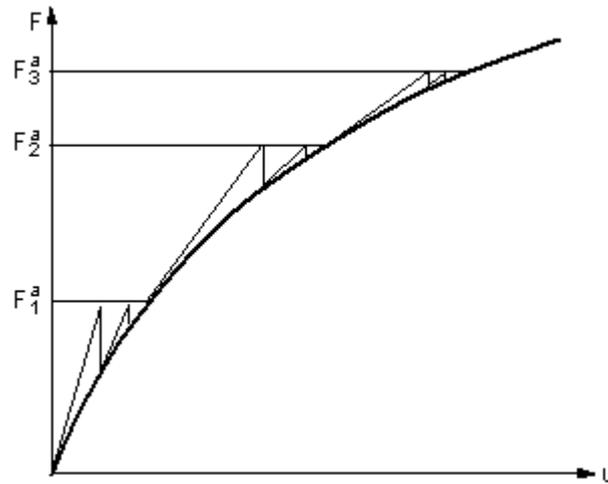


Figura 2.3. Técnica mixta.

#### 2.1.4. El software de MEF.

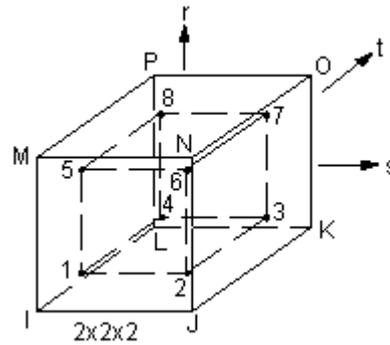
Para la resolución del problema se ha utilizado la versión 7.1 del programa ANSYS®. En primer lugar se explicará cómo resuelve internamente las situaciones que se plantean en el problema y posteriormente se verá cómo se trabaja con ANSYS®.

##### 2.1.4.1. El MEF en ANSYS®.

En ANSYS® se utilizan las formulaciones generales explicadas más arriba, basadas en el Principio de los Trabajos Virtuales. Se utiliza como norma general la formulación clásica que como se ha comentado anteriormente tiene como única incógnita los desplazamientos. A partir de estos se obtienen el resto de variables, ya sean deformaciones, tensiones u otras variables.

En el proceso de resolución de problemas no lineales se suelen utilizar técnicas de las llamadas anteriormente mixtas, en las que se utilizan conjuntamente las incrementales con las iterativas. El más utilizado es el método de Newton-Raphson, que es el que se ha utilizado en el presente proyecto.

ANSYS® integra mediante cuadraturas de Gauss. De esta forma se obtienen en primer lugar las variables como tensiones y deformaciones en los puntos de Gauss, mientras que para los nodos se extrapolan estos valores. El esquema de integración que utiliza depende del tipo de elemento, y se definirá a la hora de describir los elementos utilizados. En los elementos hexaédricos de 8 nodos se tiene generalmente un esquema 2x2x2. Tiene 8 puntos de Gauss o de integración en el interior del elemento como se muestra en la siguiente figura.



**Figura 2.4. Puntos de integración en un elemento hexaédrico de 8 nodos.**

La integración en este tipo de elementos es según la siguiente expresión.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l H_k H_j H_i f(x_i, y_j, z_k) \quad (2.1.30)$$

donde  $f(x, y, z)$  es la función que se integra

$H_i, H_j, H_k$  son los pesos de integración.

$x_i, y_j, z_k$  son las posiciones de los puntos de integración.

$l, m, n$  son los números de puntos de integración.

Los elementos tipo sólido, ya sean hexaedros o tetraedros, deben satisfacer una serie de restricciones referentes a su geometría. De esta manera se evita que se produzcan errores por un mallado incorrecto en el que existen elementos con una geometría muy distorsionada. Una de estas restricciones es la relación de aspecto, que relaciona dos dimensiones del elemento entre sí comprobando que no tenga una forma demasiado alargada o “aplastada”. Otras comprobaciones son la de paralelismo entre las caras opuestas de un elemento o de perpendicularidad en las caras contiguas del mismo. También se comprueba que las caras de los elementos no se encuentran demasiado alabeadas y se limita el jacobiano del elemento a un rango de valores. Con todas estas comprobaciones se evita tener elementos con geometrías tan distorsionadas que introducirían errores en los cálculos.

#### **2.1.4.2. El problema de contacto.**

El problema de contacto requiere una gran capacidad computacional debido a su carácter altamente no lineal. El programa identifica el contacto gracias a los pares de contacto que son la pareja de superficies pertenecientes a distintos sólidos que pueden entrar en contacto en cualquier momento del proceso de carga-descarga. Estos pares de contacto se identifican por los elementos de contacto que utiliza el programa y que están superpuestos al sólido al que pertenece dicha superficie. El mayor coste computacional se requiere para encontrar los puntos

de una y otra superficie que se encuentran en contacto, así como detectar cuándo cambia el estado de algún par de contacto. Otro factor importante es la fricción, como se comentará más adelante.

ANSYS® divide el contacto en dos tipos principales: el contacto rígido-flexible y el flexible-flexible. El segundo es el caso general, y el primero es un caso particular en el que una de las superficies se puede considerar infinitamente rígida respecto a la otra.

También se divide según el algoritmo de detección del contacto en otros tres tipos, que son nodo-nodo, nodo-superficie y superficie-superficie. A partir de ahora se explicará el contacto superficie-superficie y flexible-flexible, que es el que se adapta al problema que se quiere resolver.

Para que el programa sepa que existe un contacto entre dos superficies, a éstas hay que asignarles un par de contacto. Éste consiste en mallar una superficie, la llamada tipo *contact*, con elementos tipo *CONTA173* o *CONTA174*, y la otra, la tipo *target*, con elementos tipo *TARGE170*. A cada pareja de superficies *contact-target* que pueden entrar en contacto se les asigna una constante real para que en caso de haber más de una, el programa distinga cual entra en contacto con cual.

Los pasos para resolver el problema de contacto a partir de la geometría mallada son los siguientes:

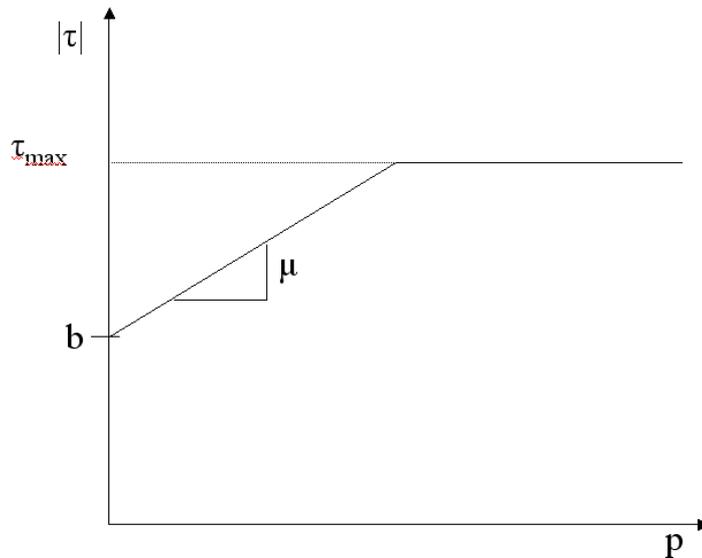
- Identificar los pares de contacto. Hay que identificar cuales son las superficies que entraran en contacto durante la resolución del modelo. Estas superficies deben ser lo suficientemente grandes para abarcar cualquier situación de posible contacto, pero no excesivamente grandes, para minimizar el tiempo de computación. Ello requiere un conocimiento previo del problema para poder identificar correctamente los pares de contacto.
- Designar las superficies *contact* y *target* de cada par de contacto. Los puntos de Gauss de la superficie *contact* no podrán atravesar la superficie *target*, mientras que a la inversa si es posible. Por ello se elige como superficie *target* la más rígida. Cuando no está claro cuál es la superficie más rígida, como se da en el caso flexible-flexible, se elige como superficie *target* la plana o cóncava, la de malla mas grosera, la que lleve elementos de menor orden o la que sea más grande.
- Mallado de las superficies de contacto con los elementos de designados. Se eligen los nodos pertenecientes a dicha superficie de contacto y sobre estos se malla con los elementos de contacto. De este modo los elementos de contacto transmitirán las reacciones resultantes del contacto a los elementos que tienen bajo ellos. La orientación

es un factor importante a la hora de mallar las superficies de contacto. Todos los elementos de contacto deben tener la misma orientación y estar enfrentados a los del correspondiente par de contacto para una adecuada detección del contacto por parte del programa.

- Imposición de las constantes reales. Los parámetros más importantes que utiliza el programa son: el factor de rigidez  $FKN$ , rigidez que utiliza para calcular la fuerza con la que expulsa los nodos de la superficie *contact* de la *target* en cada iteración del proceso de resolución; la penetración máxima tolerada  $FTOLN$  y el tamaño de la región en la que se evalúa la posibilidad de contacto  $PINB$ .
- Selección del comportamiento de la superficie de contacto. Existen varios tipos: contacto unilateral estándar, en el que no se considera contacto si la presión normal se anula; contacto perfectamente rugoso, en el que una vez alcanzado el contacto se tiene deslizamiento nulo o  $\mu=\infty$ ; contacto sin separación, en el que se permite deslizamiento pero no separación entre las superficies; y contacto vinculado, en el que las superficies de contacto se mueven solidariamente en todas direcciones. El comportamiento que se utiliza aquí es el unilateral estándar que es el que mejor se ajusta a las propiedades del modelo.
- Resolución del modelo.

El procedimiento que utiliza ANSYS® para resolver problemas con contacto con interferencia inicial es el siguiente. Se parte del estado inicial en el que existe cierta interferencia. Lo primero que se hace es intentar expulsar los nodos de la superficie *contact* con una fuerza proporcional a la rigidez del contacto considerada ( $FKN$ ). Si tras esta iteración no se reduce la penetración hasta un valor menor que la penetración máxima permitida  $FTOLN$  se procede a la siguiente iteración en la que se actúa de la misma manera. El valor de la penetración tras el proceso de resolución debería ser nulo en un caso ideal, pero numéricamente es inviable por lo que se define el valor  $FTOLN$ .

El modelo de fricción que se utiliza es el modelo básico de fricción de Coulomb. En este modelo se tiene que las tensiones tangenciales aumentan linealmente con la presión, como se observa en la siguiente gráfica, hasta que se llega al límite impuesto por el coeficiente de fricción  $\mu$ . En la gráfica se presenta la tensión tangencial  $\tau$  que se puede transmitir entre ambas superficies para cada valor de la presión normal  $p$ . Se le puede dar un valor de cohesión  $b$  que indica la capacidad de soportar tensiones tangenciales para una presión nula.



**Figura 2.5. Modelo de fricción de Coulomb**

La fricción influye muy decisivamente a la hora de elegir el método de resolución que utiliza ANSYS®. Por defecto el programa resuelve el problema aproximando la matriz de rigidez por una simétrica. Por tanto para valores del coeficiente de fricción no muy elevados existen algoritmos que utilizan una matriz de rigidez simétrica. Pero para valores elevados esta aproximación no es válida provocando problemas de convergencia, por lo que suele resultar más eficiente la resolución con la matriz de rigidez completa.

#### **2.1.4.3. Submodelado.**

El submodelado es una técnica de MEF utilizada para conseguir unos resultados más exactos en una región concreta del modelo en estudio. Su utilización está justificada cuando en el modelo a estudiar se quieren conseguir unos resultados muy exactos en cierta zona que requiere un mallado demasiado fino.

En el problema que se estudia se justifica el empleo del submodelado por crearse, en el caso de no utilizar dicha técnica, un modelo con un número de grados de libertad tan elevado que hace muy lenta la resolución e inviable la optimización. Con el submodelado se consigue reducir un problema de muy costosa resolución a dos problemas de más factible resolución. Uno es el modelo completo que se denomina grosero por tener una malla más grosera, mientras que el otro es el submodelo. Estos modelos son tales que el tiempo de computación de los dos es bastante menor que el del modelo original.

Con el submodelado se consigue reducir o eliminar complicadas regiones de transición en el modelo de elementos finitos, se puede experimentar con diferentes diseños de la región de interés. Presenta restricciones como que sólo es válido para elementos tipo *shell* y tipo *solid*, y

que la frontera de corte debe estar suficientemente alejada de los concentradores de tensión. En el caso que nos ocupa esto no se cumple al tener que cortar por el concentrador de tensiones, pero sí se cumple que la zona que se estudia está lo suficientemente alejado de la frontera de corte. De esta forma la influencia de cortar por una singularidad no afecta a la zona en la que se estudia la solución. En cualquier caso hay que comprobar que la frontera de corte está suficientemente alejada de la zona de interés.

El submodelado, también conocido como el método de los desplazamientos de la frontera de corte, sigue un procedimiento que es el siguiente.

i. Generación y resolución del modelo grosero. En este paso se crea y se resuelve como en cualquier otro problema el modelo completo.

ii. Generación del submodelo. En este paso se genera tanto la geometría como la malla del submodelo.

iii. Definir la frontera de corte. Ésta serán las zonas del submodelo por donde se han realizado los cortes a partir del modelo completo. En este paso se escriben en un archivo los nodos que pertenecen a la frontera de corte.

iv. Interpolación de los desplazamientos en la frontera de corte. Es en este paso donde se relacionan el modelo completo o grosero y el submodelo. A partir del archivo de nodos frontera se interpolan los desplazamientos de la solución del modelo completo para obtener los desplazamientos en dichos nodos. De este modo se genera otro archivo en el que a cada nodo de la frontera de corte se le asigna un desplazamiento procedente de la interpolación.

v. Imposición de los desplazamientos en la frontera de corte. Los desplazamientos obtenidos del paso anterior se imponen en los correspondientes nodos del submodelo.

vi. Resolución del submodelo. Con los desplazamientos impuestos en la frontera de corte y con las cargas que haya en la zona del submodelo si las hubiere, se resuelve el submodelo.

vii. Validación del submodelo. Para ello se comprueba que los resultados a lo largo de la frontera de corte sean semejantes entre el modelo completo y el submodelo.

#### **2.1.4.4. Trabajando en ANSYS®.**

En ANSYS® se sigue un procedimiento de trabajo bastante claro que se puede dividir en tres partes.

a) Preproceso, en el que se construye el modelo. En primer lugar se definen los parámetros, se seleccionan los tipos de elementos que se van a utilizar, sus constantes reales, y las propiedades del material. Posteriormente se crea la geometría del modelo. Cuando la

geometría es muy complejas a veces se utilizan programas gráficos externos para la creación de la misma. Por último en este paso se genera la malla, que no es más que la discretización de la geometría. El proceso de mallado es muy importante para una resolución eficiente, por lo que es complejo y se puede encontrar controlado por multitud de parámetros como en el modelo estudiado.

b) Solución. Aquí se aplican generalmente las cargas, aunque también se pueden aplicar en el preproceso. Dentro de las cargas se incluyen las cargas como tal, que son las fuerzas y momentos tanto distribuidos como concentrados, presiones y fuerzas de inercia, y las condiciones de contorno, en las que lo que se imponen son desplazamientos en ciertos nodos. En la solución además se indica el tipo de análisis que se va a realizar, así como las opciones de resolución. Estas opciones son el número de iteraciones máximas, los pasos de carga, los subpasos, el procedimiento de resolución, criterios de convergencia, etc. Los pasos y subpasos de carga se utilizan para la resolución de problemas no lineales, y están directamente relacionados con las técnicas mixtas explicadas en el apartado 2.1.3. En el apartado de solución también se da la orden de resolución del modelo. Durante la resolución, que se realiza según todos los datos aportados en el preprocesado y postprocesado, se puede seguir la evolución del proceso iterativo.

c) Postproceso. Tras la resolución del problema se pueden obtener y manipular los resultados, a esto se le llama postproceso. De esta manera se obtiene casi cualquier resultado a partir del campo de desplazamientos obtenidos por el proceso de resolución. Aquí se pueden estudiar los resultados así como su evolución durante el análisis.

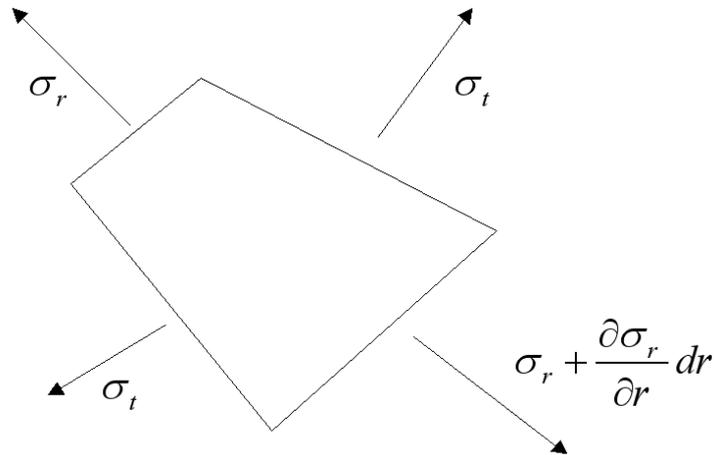
## **2.2. Cálculo analítico de la entrada en contacto.**

Este cálculo se utiliza principalmente como problema de comprobación de la resolución mediante el MEF. También es usado como medio de cálculo de la presión media a lo largo de la superficie de contacto para otros fines como el cálculo de los límites del intervalo de la interferencia como se comentará en posteriores apartados.

Se trata de resolver el problema de interferencia entre dos cilindros concéntricos que tendrán generalmente un radio interior y uno exterior.

En primer lugar se considera un cilindro en el que las paredes interna y externa se encuentran sometidas a una presión uniforme. Tras hallar la solución de este problema se calculará la del problema de interferencia a partir de las soluciones obtenidas para un cilindro con presión.

Sea un cilindro de pared gruesa sometido a presión interna y externa. Esta presión provocará una deformación y un estado de tensiones que será simétrico respecto al eje de revolución. Tras aplicar simetría queda el elemento diferencial con las tensiones que se muestran en la siguiente figura:



**Figura 2.6. Elemento diferencial cilíndrico tras aplicar simetría.**

Haciendo equilibrio de fuerzas en un elemento diferencial y despreciando términos de orden superior se llega a la ecuación de equilibrio que relaciona la tensión tangencial  $\sigma_t$  con la radial  $\sigma_r$ .

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0 \quad (2.2.1)$$

Se tienen dos incógnitas que son las tensiones tangencial y radial, mientras que se dispone de una única ecuación. La otra ecuación necesaria se obtiene considerando la deformación del cilindro. Se sabe que es simétrica respecto al eje, por lo que consiste en un movimiento puramente radial de todos los puntos de la pared del cilindro. Este desplazamiento varía con el radio, por lo que será una función del mismo.

Si se denota  $u$  al desplazamiento radial en un punto que está a un radio  $r$ , el desplazamiento en  $r+dr$  será  $u + \frac{du}{dr} dr$ . Por lo tanto el alargamiento unitario en la dirección

radial será  $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ . El alargamiento unitario en dirección tangencial será por tanto igual al

alargamiento unitario del radio correspondiente, es decir,  $\varepsilon_t = \frac{u}{r}$ . Sustituyendo en las relaciones

entre tensiones y deformaciones y aplicando la hipótesis de deformación plana se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right)\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento.

Sustituyendo las anteriores relaciones en (2.2.1) se tiene la siguiente ecuación en desplazamientos.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0\tag{2.2.3}$$

La solución general de esta ecuación es del tipo

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}\tag{2.2.4}$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen al imponer las condiciones de contorno de presión en las superficies interior y exterior del cilindro. Estas condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=b} &= -p_0 \\ (\sigma_r)_{r=a} &= -p_i\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

donde el segundo miembro de cada condición de contorno es negativo por tomarse como positivo las tensiones de tracción, siendo  $p_0$  y  $p_i$  las presiones externa e interna respectivamente.

Sustituyendo los valores que se obtienen de las constantes en la ecuación (2.2.4) se obtienen los desplazamientos:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_i - p_0)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r}\tag{2.2.6}$$

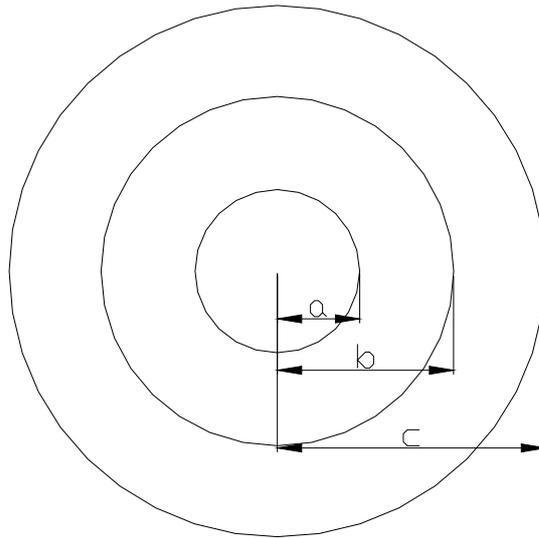
Introduciendo los desplazamientos en (2.2.2) se llega a la solución general en tensiones del cilindro de pared gruesa sometido a presión en sus caras interna y externa:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_t &= -\frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

donde  $a$  y  $b$  son los radios interior y exterior del cilindro.

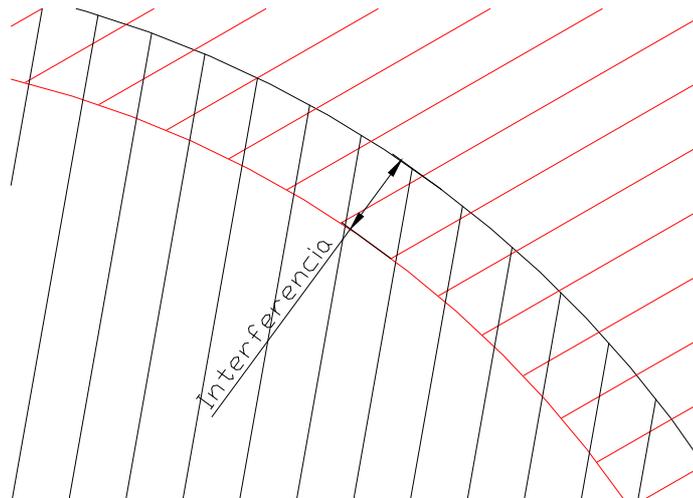
Como se observa, la suma de las dos tensiones permanece constante, lo que implica que la deformación de todos los elementos en la dirección del eje del cilindro es la misma, y las secciones rectas del mismo permanecen planas después de la deformación. Esto no es más que la hipótesis de la deformación plana.

Una vez que se tiene esta solución se busca la del problema de interferencia. En este se monta un cilindro dentro de otro, donde el radio externo del cilindro interior es mayor que el radio interior del cilindro exterior. Se supone que se monta mediante calentamiento del cilindro externo, que tras su enfriamiento entra en contacto con el interno hasta alcanzar la posición de equilibrio que es la que se tiene en la siguiente figura. Para alcanzar el equilibrio se produce una presión constante  $p$  en las caras que entran en contacto.



**Figura 2.7. Problema de interferencia entre dos cilindros de pared gruesa.**

En dicho equilibrio se impone que el incremento del radio interno del cilindro exterior más la disminución del radio externo del cilindro interior producidos por  $p$  debe ser igual a la interferencia  $\delta$ .



**Figura 2.8. Interferencia entre dos cilindros de pared gruesa.**

Particularizando la ecuación (2.2.6) para un cilindro sometido únicamente a presión interna se obtiene el desplazamiento en la superficie interior:

$$(u)_{r=a} = \frac{ap_i}{E} \left( \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \mu \right) \quad (2.2.8)$$

Y para el caso de presión interna nula, el desplazamiento en la cara exterior es el siguiente:

$$(u)_{r=b} = \frac{bp_0}{E} \left( \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) \quad (2.2.9)$$

Como la interferencia es la suma de los dos desplazamientos calculados anteriormente, con  $p_0=p_i=p$ :

$$\frac{bp}{E} \left( \frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \mu \right) + \frac{bp}{E} \left( \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \mu \right) = \delta \quad (2.2.10)$$

de donde se obtiene la presión del contacto  $p$

$$p = \frac{E\delta}{b} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{2b^2(c^2 - a^2)} \quad (2.2.11)$$

Una vez que se tiene la solución del problema de interferencia se pueden calcular diversos valores como las tensiones en la superficie externa del cilindro interno.

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p(b^2 + c^2)}{(c^2 - b^2)} \\ \sigma_r &= -p \\ \tau_{\max} &= \frac{E\delta c^2 (b^2 - a^2)}{2b^3 (c^2 - a^2)} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

que particularizando para el caso en estudio, en el que se tiene un eje macizo se tiene:

$$\begin{aligned} p &= \frac{E\delta}{2bc^2} (c^2 - b^2) \\ \sigma_t &= \frac{p(b^2 + c^2)}{(c^2 - b^2)} \\ \sigma_r &= -p \\ \tau_{\max} &= \frac{E\delta}{2b} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Todo el procedimiento que se ha seguido para el cálculo de la presión media del ajuste eje-cubo supone que tanto el eje como el cubo tienen la misma longitud. Esto no es así, ya que la zona del eje exterior al cubo se opone a la compresión induciendo un aumento de la presión en el borde del cubo. Este mismo fenómeno se produce con las secciones del cubo que no están en contacto con el eje, es decir, las que se encuentran por encima del radio de acuerdo del cubo.

Por tanto, esta presión obtenida de forma analítica saldrá menor que la real, pero sirve como primera aproximación de las que se obtengan.

### **2.3. Estudio de la vida a fatiga.**

La definición de fatiga según ASTM (American Society for Testing and Materials) es la siguiente: “El proceso de cambio estructural, permanente, progresivo o localizado ocurrido en un material sujeto a condiciones que produzcan tensiones y deformaciones fluctuantes en algún punto o puntos, y que pueda culminar en grietas o fractura completa después de un número suficiente de fluctuaciones”.

Para el diseño a fatiga se requieren dos consideraciones: un juicio sobre si existe la posibilidad de fallo por fatiga y el conocimiento de los factores que pueden agravar o disminuir su efecto.

#### **2.3.1. La fatiga bajo condiciones de fretting.**

Los fallos en muchos componentes mecánicos están causados por la fatiga. Las grietas que se crean pueden ser debidas a defectos macroscópicos o, en caso de componentes altamente cargados, a regiones cercanas a un concentrador de tensiones. De hecho algunos concentradores de tensión pueden estar causados por alguna inclusión en el material o por algún defecto inadvertido de mecanizado. Otra causa de daño de la superficie es el deslizamiento relativo entre superficies causado generalmente por una carga tangencial cíclica. El daño ocasionado por el fretting puede llevar a diversos problemas de desgaste, pero es su influencia en la iniciación de grietas lo que nos lleva a su estudio para hallar la resistencia a fatiga del sistema mecánico que nos ocupa.

En el diseño de un componente mecánico dos criterios juegan un papel muy importante: evitar la plastificación del material y evitar la fractura frágil.

El diseño contra la plastificación del material es bastante sencillo. Basta con encontrar en cada punto un parámetro de tensiones compuestas a partir de los valores individuales de las tensiones y mantenerlo bajo el límite elástico del material.

El diseño frente a la fractura frágil es más complejo. No requiere únicamente el cálculo de las tensiones, sino que además es necesaria cierta especulación sobre la forma, localización y origen de los defectos iniciales, que generalmente crecen durante la vida de servicio del componente hasta que provocan la rotura frágil del mismo.

Es importante hacer notar que la vida a fatiga de una grieta tiene dos fases diferentes. Éstas son las fases de iniciación y propagación. La proporción de cada una de las dos fases en la

vida total varía en gran medida con muchos parámetros. En estructuras soldadas o con acabados superficiales deficientes existirá desde la generación de las mismas cierto número de defectos de tamaño apreciable debido a la soldadura, a inclusiones o a escoria. En componentes de este tipo no hay apenas vida de iniciación así que toda la vida del componente es en propagación de la grieta. Sin embargo, los componentes mecánicos críticos en aplicaciones de alta tecnología están fabricados por otros procedimientos, y el acabado de las superficies es habitualmente muy bueno. Por ello no existen defectos macroscópicos y es complicado especular con dónde se van a formar. De hecho es misión del diseñador del componente el intentar que las probabilidades de que se inicie la grieta se reduzcan al mínimo. Esto se consigue reduciendo los concentradores de tensión como radios de acuerdo, chavetas, abruptos cambios de sección y roscas. Con ello se consigue mantener el estado de tensiones lo más uniforme posible, y resulta positivo cuando los sitios posibles de iniciación se encuentran en una superficie libre. Sin embargo cuando existe un contacto entre dos superficies como en el caso en estudio otra forma de iniciación de grietas aparece. Éste es el fretting.

El fretting ocurre cuando una unión entre dos componentes está sujeta a una fuerza oscilatoria, dando lugar a desplazamiento tangencial relativo en al menos parte de la unión. En la mayoría de los casos se da en uniones atornilladas o mecánicas.

Para que se inicie la grieta es necesario un estado de tensiones tangenciales inversas de manera que se creen las condiciones adecuadas para formar bandas de deslizamiento. Esto implica que un elevado coeficiente de fricción unido con una elevada fuerza tangencial, limitada obviamente por el coeficiente de fricción, produce unas condiciones muy exigentes. La presencia de una tensión de tracción paralela a la superficie también ayuda al desarrollo de la grieta, probablemente porque ayuda a mantener la grieta abierta.

El deslizamiento relativo tiene una marcada influencia. En primer lugar, cuando se tiene un deslizamiento relativo de pequeña amplitud la influencia del fretting es pequeña. Según aumenta el deslizamiento relativo aumenta el fenómeno de fretting hasta cierto valor a partir del cual vuelve a decrecer para grandes amplitudes. Se acepta que esta disminución del efecto fretting para grandes amplitudes se debe a que el defecto que se genere es eliminado por el desgaste producido por el deslizamiento.

Cabe destacar que la iniciación se ve muy poco afectada por la plasticidad, y sí en gran medida por las tensiones necesarias para causar el deslizamiento de una dislocación en cierto grano del material.

Con ello se justifica el cálculo a fatiga que se va a realizar en el presente proyecto. En este cálculo se va a hallar la vida de iniciación, que va a ser un valor muy importante en la vida

total del componente. Además se comprueba que el problema que se intenta resolver encaja perfectamente con las condiciones y causas que se han descrito para la aparición del fenómeno de fretting fatiga.

Para modelos complejos es necesaria su resolución con métodos numéricos, y en la mayoría de los casos el elegido será el modelado mediante el MEF. Con una malla suficientemente fina en la zona crítica del contacto se obtienen las tensiones y deslizamientos en dicha zona, que son los que van a determinar el nacimiento de la grieta.

### 2.3.2. Consideraciones teóricas.

Los términos utilizados en el ensayo de tracción para el diseño a fatiga son los siguientes: límite elástico  $S_y$  (MPa), tensión última  $S_u$  (MPa), tensión real de fractura  $\sigma_f$  (MPa), la deformación real de fractura o ductilidad  $\epsilon_f$  (mm/mm), el exponente de dureza en deformación  $n$  y el coeficiente de resistencia  $K$  (MPa). Y se tienen las siguientes relaciones:

$$S_{max}=S_m+S_a \quad (2.3.1)$$

$$S_{min}=S_m-S_a \quad (2.3.2)$$

$$R=S_{min}/S_{max} \quad (2.3.3)$$

donde  $S_{max}$  es la tensión máxima en el ciclo,  $S_m$  es la tensión media,  $S_{min}$  es la tensión mínima en el ciclo,  $S_a$  es la amplitud de la tensión y  $R$  el coeficiente de asimetría del ciclo.

A la hora del estudio a fatiga, las curvas más empleadas son las  $S-N$  (tensión-número de ciclos). En estas curvas  $S$  es la tensión cíclica aplicada, generalmente  $S_a$ , y  $N$  es la vida o número de ciclos de carga hasta que se produce el fallo. Normalmente se representan en escala logarítmica. Una característica importante de estas curvas es el límite de fatiga,  $S_f$ , que es el valor límite de la resistencia media a fatiga que se tiene para un número elevado de ciclos.

Este tipo de curvas  $S-N$  suelen tener la forma que se muestra en la siguiente figura.

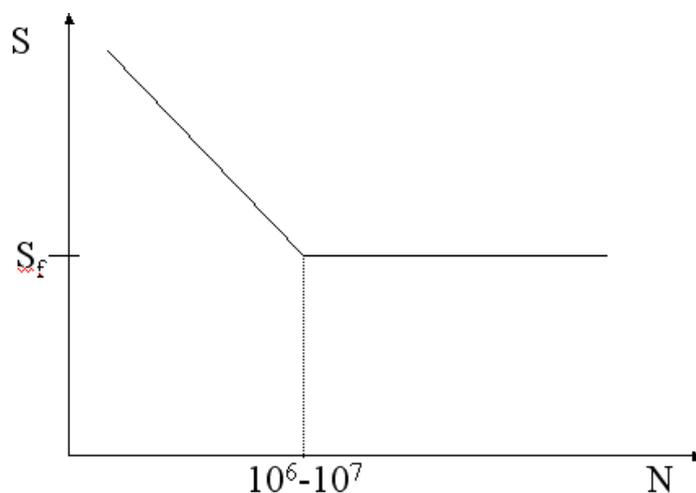


Figura 2.9. Curva  $S-N$  estándar.

En un componente en el que existe un concentrador con cargas cíclicas externas es más adecuado el considerar el comportamiento del material en términos de deformaciones, a partir de las restricciones elásticas que existen en el entorno de la zona plástica local de la entalla. De esta manera se puede obtener un valor aceptable de la vida a fatiga basado en la iniciación de la grieta a partir del conocimiento de la evolución temporal de las deformaciones locales en el concentrador del componente y de las propiedades de fatiga del material sin entalla.

Es de considerar que para que se de el fallo a fatiga el nivel de tensiones debe ser suficientemente alto no sólo en el punto de máximas tensiones, si no que también debe serlo a cierta distancia del mismo. La mayoría de las teorías indican que el parámetro más relevante es la media sobre cierto volumen crítico, pero por razones de cálculo se simplifica a las tensiones en cierto punto. Este punto se toma a cierta distancia del concentrador. Esta distancia depende del material. Se encontraron leyes empíricas para materiales específicos, pero se obtenían grandes errores por las estimaciones realizadas sobre el material. Actualmente se acepta que el valor de esta distancia crítica está relacionado con el parámetro de El-Haddad [17]  $a_0$ , previamente definido para problemas de grietas pequeñas. El valor de este parámetro viene dado por la siguiente expresión.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_f} \right)^2 \quad (2.3.4)$$

donde  $\Delta K_{th}$  es el incremento del factor de intensidad de tensiones umbral

$\Delta \sigma_f$  es el límite de fatiga del material en amplitud

Ambos parámetros anteriores deben ser evaluados para una relación de carga  $R$  apropiada a la que se produce en el punto a estudiar.

Tanaka [8] consideró dos raíces posibles como solución. En una se utiliza únicamente el valor en un punto que es  $a_0/2$ , mientras que en la otra se calcula la media en una distancia que es  $2a_0$ . Es el primer método el que se va a utilizar en el presente proyecto debido a dos factores. El primero es que el postproceso es más fácil de implementar debido a que basta con obtener en un punto el estado de tensiones y deformaciones. El segundo es que debido a la singularidad que aparece en el borde del contacto, no se conocerá la solución en los dos elementos más cercanos a dicha singularidad. Esto implica que para obtener la solución en esos elementos habría que realizar algún tipo de extrapolación de los resultados. Por lo tanto se calculará el parámetro que defina la vida a fatiga a una profundidad de  $a_0/2$  de la superficie de contacto.

### 2.3.3. Criterio de cálculo de vida.

La amplitud total de la deformación puede dividirse en sus componentes elástica y plástica: la componente plástica será predominante para grandes deformaciones (vidas cortas), y lo será la elástica para pequeñas deformaciones (vidas largas). En el caso que se estudia se intenta buscar vida larga por lo que se tendrá componente elástica predominante. Por tanto, se tiene la siguiente ecuación para la vida, en términos de deformación, para elementos axiales lisos pequeños:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma_f'}{E}(2N)^b + \varepsilon_f'(2N)^c \quad (2.3.5)$$

$$\text{con } \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} = \frac{\sigma_a}{E} \quad (2.3.6)$$

donde  $\sigma_f'$  y  $\varepsilon_f'$  son los coeficientes de resistencia y ductilidad a fatiga,  $b$  y  $c$  son los exponentes de resistencia y ductilidad a fatiga,  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\sigma_a$  es la amplitud de la tensión.

En estas ecuaciones se han incluido las relaciones dadas por Basquin (1910) [18] según el cual el comportamiento elástico lineal se puede transformar según  $\Delta\sigma/2 = \sigma_a = \sigma_f' \cdot (2N)^b$ , y por Manson [19] y Coffin [20] que relaciona vida y deformación plástica según  $\Delta\varepsilon_p/2 = \varepsilon_f' \cdot (2N)^c$ .

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{(\sigma_f' - \sigma_m)}{E}(2N)^b + \varepsilon_f'(2N)^c \quad (2.3.7)$$

Otra ecuación de vida, basada en la deformación y fractura obtenida a través de las tensiones principales, es la dada por Smith, Watson y Topper [21]:

$$\sigma_{\max} \cdot \varepsilon_a \cdot E = (\sigma_f')^2 \cdot (2N)^{2b} + \sigma_f' \cdot \varepsilon_f' \cdot E \cdot (2N)^{b+c} \quad (2.3.8)$$

siendo este el criterio a utilizar durante el proyecto, donde  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  y  $\varepsilon_a$  es la amplitud de la deformación. Para el caso en que la tensión máxima sea nula, la ecuación anterior predice vida infinita.

Al término  $\sqrt{\sigma_{\max} \cdot \varepsilon_a \cdot E}$  se le conoce como el parámetro de Smith-Watson y Topper (SWT).

A continuación se aclara el criterio de SWT. En éste se considerará como punto más desfavorable el de mayor parámetro de SWT, es decir, aquel en el que el producto del incremento de deformación principal máxima (entre carga y descarga) por la tensión máxima en el ciclo en la dirección de deformación principal máxima sea más elevado.

### 2.3.4. Aplicación al problema.

En definitiva se aplica conjuntamente el criterio SWT con las conclusiones de Tanaka [8]. Es decir, se calcula el parámetro de SWT a una distancia  $a_0/2$  del contacto en toda la zona crítica del problema. Dado que al aumentar dicho parámetro disminuye el número de ciclos, será el valor máximo obtenido el que se utilice para el cálculo de la vida.

Como se ha explicado anteriormente en el problema se ha optado por realizar la evaluación del parámetro SWT en  $a_0/2$  y no la integral en  $2 \cdot a_0$  por sencillez de implementación y debido a la singularidad que aparece en el borde del contacto.

El material utilizado es un AISI/SAE 1045 con acabado Quenched & Tempered. Las propiedades de este material para el cálculo de la vida a fatiga son las siguientes:

- Módulo de Young	210 Gpa
- Coeficiente de resistencia a la fatiga ( $\sigma_f'$ )	1225 Mpa
- Exponente de resistencia a la fatiga ( $b$ )	-0.095
- Coeficiente de ductilidad a la fatiga ( $\epsilon_f'$ )	1
- Exponente de ductilidad a la fatiga ( $c$ )	-0.66
- $\Delta K_{th}$ (R=-1)	3.8

Para un número de  $10^7$  ciclos se tiene que:

$$\sigma_f = \sigma_f' \cdot (2N)^b = 248 \text{MPa}$$

Tanto para  $\Delta K_{th}$  como  $\Delta \sigma_f$  han de ser calculados para la relación de carga  $R$  que se tenga en el punto de estudio, por lo que será dependiente de la solución. Por ello se estudiará en el apartado de resultados.

Finalmente, al no considerarse deformación plástica en la resolución del problema, el criterio SWT queda según la siguiente ecuación:

$$\sigma_{\max} \cdot \epsilon_a \cdot E = (\sigma_f')^2 \cdot (2N)^{2b} \quad (2.3.9)$$

en la que se ha eliminado el término referente a la deformación plástica dado por Manson-Coffin.