

CAPÍTULO 5. RESULTADOS.

En este apartado se muestran los resultados finales obtenidos a lo largo del desarrollo del presente proyecto.

En primer lugar se muestran los resultados de las pruebas de los algoritmos de optimización desarrollados. Se utilizan varios problemas de comprobación consistentes en distintos tipos de vigas empotradas sujetos a ciertas cargas y restricciones. Se comparan entre sí los resultados analíticos dados por el algoritmo en *FORTRAN* y los obtenidos mediante el MEF dados por el algoritmo en *APDL*.

A continuación se resuelve el modelo del acoplamiento eje-cubo, validándose el proceso de submodelado, mostrando la singularidad que se da en el borde del contacto y realizándose el análisis a fatiga. Además se realiza el análisis de convergencia de la malla, que permite escoger un mallado concreto para realizar el proceso de optimización.

Respecto al proceso de optimización se muestran los parámetros utilizados durante el mismo y los resultados obtenidos haciéndose una valoración de los mismos. Por último se realiza un análisis de sensibilidad entorno al óptimo.

5.1. Prueba de los algoritmos de optimización.

Para la comprobación de los algoritmos de optimización implementados se han utilizado una serie de problemas de solución analítica conocida. De esta manera se compara la optimización del algoritmo implementado en *FORTRAN* utilizando la solución analítica con la del algoritmo en *APDL* y la solución de elementos finitos.

Se han utilizado varios problemas de comprobación. En todos ellos se trata de una viga, en la que se minimiza el peso del material empleado. Son vigas en voladizo de sección rectangular con una carga uniforme distribuida en su cara superior en las que se imponen dos restricciones: la tensión máxima en cualquier punto de la viga debe estar por debajo del límite elástico del material y por otro lado se limita la flecha máxima a una centésima parte de la longitud de la viga. En este problema las variables de diseño son el canto H y el ancho B de la viga. La relación entre el canto y el ancho está restringida y no puede ser mayor del doble.

El problema queda finalmente planteado como sigue:

Función objetivo.	Minimizar Volumen de material.
Restricciones.	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{eqv} \leq 275 MPa \\ u \leq Long./ 100 \\ H/B \leq 2 \\ 0.5 \leq H/B \\ \\ 0.01 < H, B < 0.5 \end{array} \right.$

Son dos los problemas de comprobación utilizados; uno en que la viga es de sección constante, por lo que habrá dos variables de diseño, y otro en que la viga tiene varias secciones, por lo que habrá el doble de variables de diseño que de secciones.

Además de comparar entre solución analítica y solución de elementos finitos se compara también entre algoritmo de primer y de segundo orden. Para ello se utilizan los mismos problemas de comprobación además de otro en el que la viga no tiene saltos en la sección al utilizar elementos sólidos para su modelado en elementos finitos.

Los parámetros empleados en el problema de comprobación son los siguientes:

- Una longitud de 2 metros.
- Una carga distribuida de 3000 N/m.
- El material es acero S 275
- La sección de la viga es rectangular.

5.1.1. Viga en voladizo de sección constante.

Este modelo es el más sencillo de los empleados, en el que la sección de la viga es uniforme $H \times B$. El resto de características y restricciones son las dadas anteriormente.

El modelo generado con la carga distribuida se muestra en la siguiente figura:

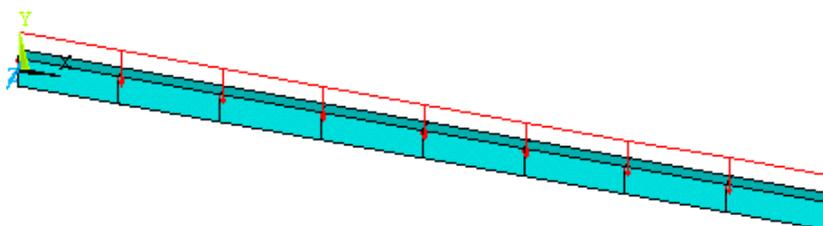


Figura 5.1. Viga empotrada de sección constante.

Las dos variables de diseño son el canto H y el ancho B de la sección de la viga. A continuación se recogen los resultados tanto optimizando mediante el algoritmo implementado

en *APDL* utilizando el MEF, como con el algoritmo implementado en *FORTRAN* y la solución analítica. Como resultados se recogen los valores de las variables de diseño H y B así como el valor de la función objetivo (volumen). Además se muestran las iteraciones necesarias para llegar a la solución óptima.

	MEF (<i>APDL</i>)		Opt. del problema analítico (<i>FORTRAN</i>)	
	Primer Orden	Segundo Orden	Primer Orden	Segundo Orden
Canto H/cm	7.621	7.618	7.653	7.652
Ancho B/cm	3.816	3.811	3.827	3.827
u/cm	2.034	2.038	1.998	1.9997
σ_{eqv}/MPa	162.8	164.1	160.6	160.7
Volumen $/m^3$	$5.813 \cdot 10^{-3}$	$5.806 \cdot 10^{-3}$	$5.857 \cdot 10^{-3}$	$5.856 \cdot 10^{-3}$
Actualizaciones de la penalización	5	5	30	30
Iteraciones totales	50	50	300	292

Tabla 5.1. Resultados obtenidos mediante la implementación en *APDL* y *FORTRAN* del modelo de viga en voladizo con sección constante.

En los resultados se observa que el método de segundo orden tiene una convergencia algo más rápida. Esto se desprende de que en el caso del *APDL* se alcanza una mejor solución para el mismo número de iteraciones, lo que indica una mejor convergencia. Para el caso del algoritmo implementado en *FORTRAN* se observa que el de segundo orden necesita menos iteraciones para alcanzar la misma solución. Respecto a los desplazamientos, se ve que éstos son menores en *FORTRAN*. Esto se debe a que se realizan más actualizaciones del parámetro de penalización, ajustándose así en mayor medida al límite de la restricción.

En *APDL* se observa que no se cumple estrictamente la restricción de desplazamiento. Esto es debido a que sólo se han realizado 5 actualizaciones del parámetro de penalización, con lo que ésta no es tan restrictiva como en el caso de la optimización en *FORTRAN*. Por ello permite que se reduzca la función objetivo a costa de violar ligeramente una de las restricciones.

Respecto a las tensiones se observa que no juegan un papel determinante en la optimización por estar lejos del límite de la restricción impuesta, siendo la condición de rigidez la más restrictiva.

A continuación se muestran las soluciones de elementos finitos para primer y segundo orden:

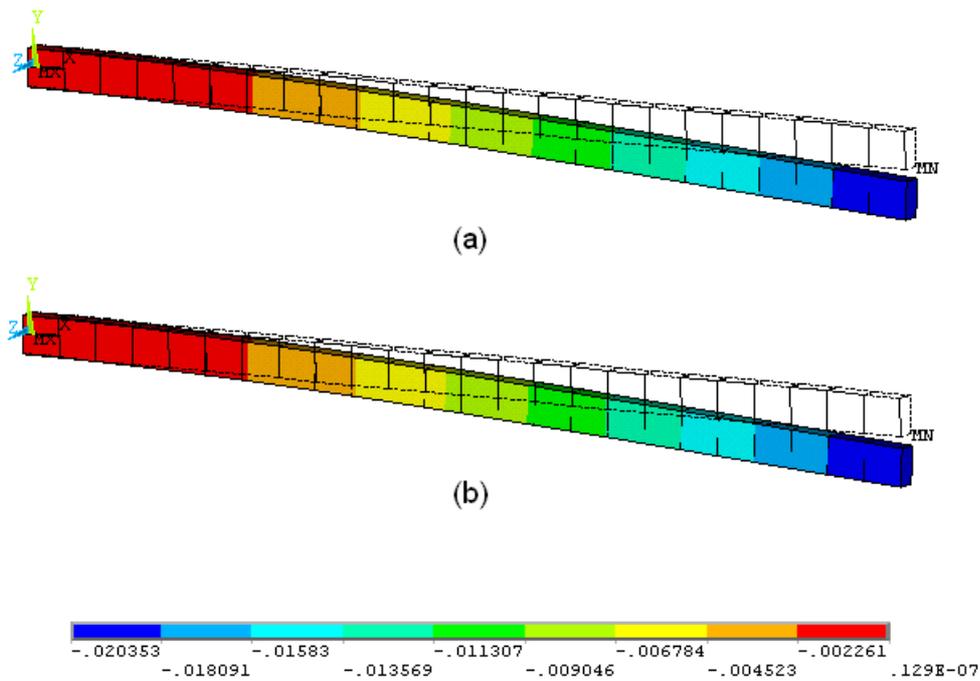


Figura 5.2. Desplazamientos para el óptimo en APDL de la viga de sección constante, para el algoritmo de a) primer orden y b) de segundo orden.

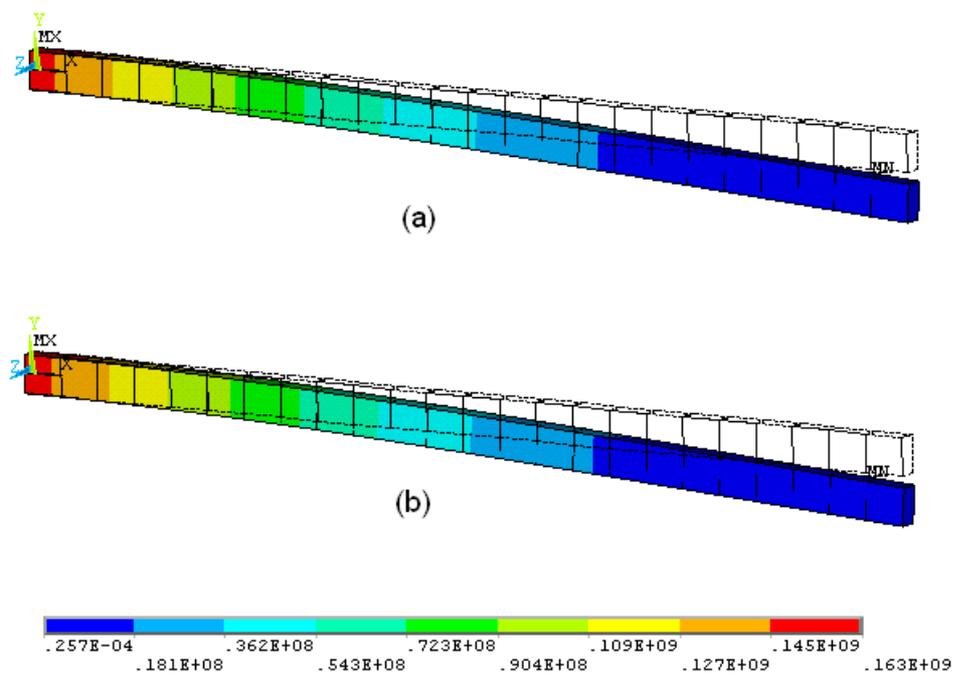


Figura 5.3. Tensiones para el óptimo en APDL de la viga de sección constante, para el algoritmo de a) primer orden y b) de segundo orden.

5.1.2. Viga en voladizo con varias secciones.

Para este problema de comprobación se han tomado seis secciones. En cada una de ellas se tiene un canto H y un ancho B diferentes. Se parte de una solución inicial de sección

constante y se busca minimizar el material de la viga pero cumpliendo las restricciones de tensiones, flecha y relación de aspecto de las secciones comentadas con anterioridad.

El modelo generado con la carga distribuida se muestra en la siguiente figura:

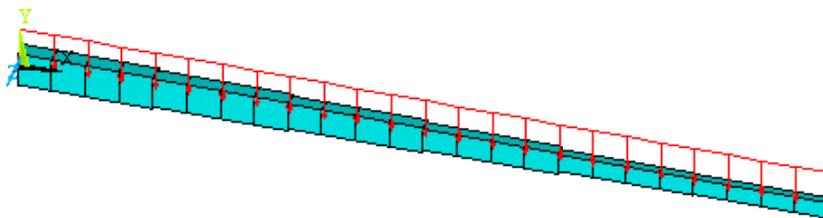


Figura 5.4. Modelo de la viga empotrada con 6 secciones distintas.

Igualmente en las siguientes tablas se muestran los valores óptimos de las doce variables de diseño (dos por cada sección) y los valores de desplazamiento, tensión y volumen, así como las iteraciones necesarias para llegar a la convergencia del proceso de optimización.

En primer lugar se muestra la resolución mediante el MEF y el algoritmo implementado en *APDL*.

	<i>APDL</i>											
	Primer Orden						Segundo Orden					
Canto H/cm	8.6	7.84	6.92	5.88	4.60	4.27	8.60	7.81	6.89	5.85	4.58	3.34
Ancho B/cm	4.4	3.98	3.55	3.03	2.42	2.24	4.41	4.02	3.58	3.08	2.45	2.31
u/cm	1.9999						2.00005					
σ_{eqv}/MPa	110.92						110.51					
Vol./m ³	$4.396 \cdot 10^{-3}$						$4.365 \cdot 10^{-3}$					
Actualiz. de la penal.	5						5					
Iteraciones totales	42						42					

Tabla 5.2. Resultados obtenidos mediante la implementación en *APDL* del modelo de viga en voladizo con 6 secciones diferentes.

También se ha resuelto el problema analíticamente para poder comparar la solución anterior con la dada por *FORTRAN*.

	<i>FORTRAN</i>											
	Primer Orden						Segundo Orden					
Canto H/cm	8.75	7.91	6.94	5.92	4.61	2.91	8.71	7.82	7.21	5.83	4.28	2.83
Ancho B/cm	4.45	4.03	3.55	3.04	2.38	1.53	4.38	4.00	3.62	2.92	2.67	2.43
u/cm	1.989						1.998					
σ_{eqv}/MPa	107.95						108.29					
Vol./m ³	$4.298 \cdot 10^{-3}$						$4.362 \cdot 10^{-3}$					

Actualiz. de la penal.	20	20
Iteraciones totales	600	600

Tabla 5.3. Resultados obtenidos mediante la implementación en *FORTRAN* del modelo de viga en voladizo con 6 secciones diferentes.

De nuevo es la flecha el factor determinante, mientras que la tensión equivalente no implica penalización alguna. En *FORTRAN* se observa que con el algoritmo de primer orden se obtienen mejores resultados que en *APDL*. Esta reducción de volumen se debe al mayor número de iteraciones y actualizaciones de la función penalización que permite que la solución se encuentre más cerca de los límites de las restricciones, en concreto ajustando más la relación entre el canto y el ancho de las secciones.

En el algoritmo de segundo orden se obtienen soluciones prácticamente iguales con ambos algoritmos. La única diferencia es que en *APDL*, al haber menos actualizaciones del parámetro de penalización se penalice menos, con lo que se permite violar ligeramente la penalización, aunque en una medida tan pequeña que no sobrepasa la tolerancia impuesta en la penalización.

A continuación se muestran las soluciones para primer y segundo orden y para *APDL*:

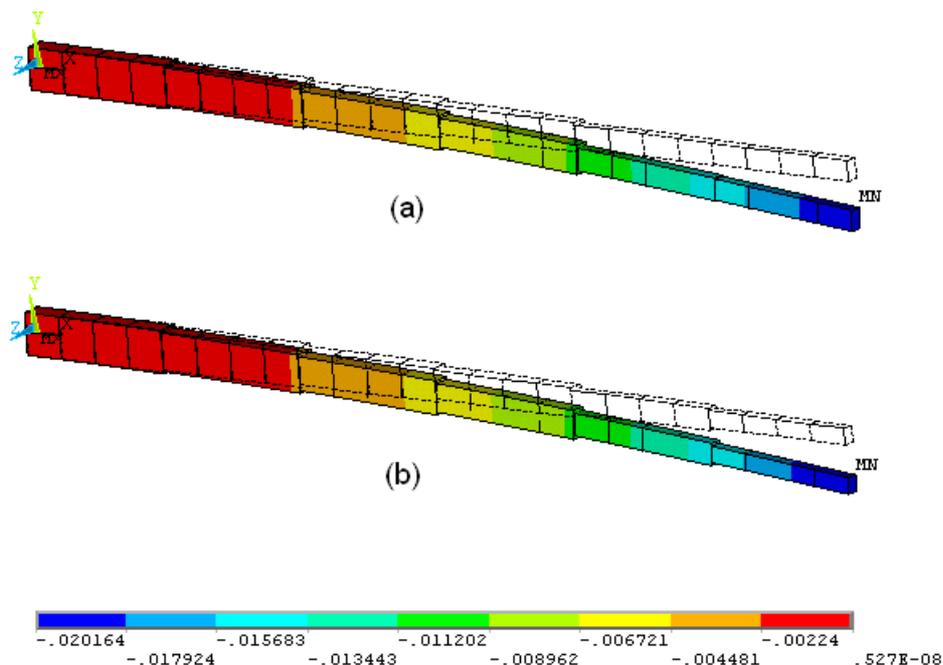


Figura 5.5. Desplazamientos para el óptimo en *APDL* de la viga de seis secciones, para el algoritmo de a) primer orden y b) de segundo orden.

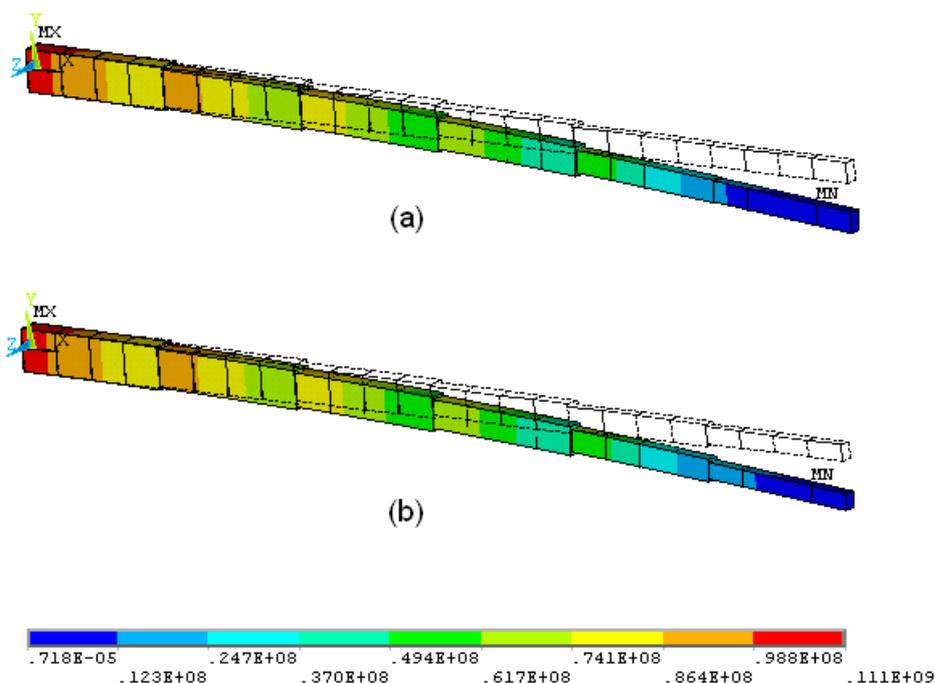


Figura 5.6. Tensiones para el óptimo en *APDL* de la viga de seis secciones, para el algoritmo de a) primer orden y b) de segundo orden.

5.1.3. Viga en voladizo con elementos tridimensionales y varias secciones.

En este modelo se tiene una viga que varía su sección de forma continua a lo largo de sus cinco tramos. De esta forma se tendrán seis secciones distintas, lo que implicará tener 12 variables de diseño al igual que en el problema de comprobación anterior. Se ha modelado con elementos tridimensionales evitando los saltos de sección entre uno y otro tramo. Se ha resuelto en *APDL* para comparar así el algoritmo de primer orden con el de segundo orden.

El modelo que se optimiza es el siguiente, con las mismas cargas y restricciones que se han impuesto en los anteriores.

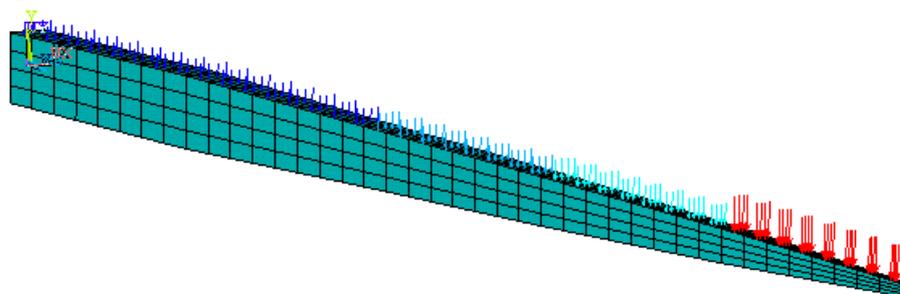


Figura 5.7. Modelo de la viga empotrada con 6 secciones continuas y elementos 3D.

Se muestran los mismos resultados de la optimización en *APDL* que los mostrados para los problemas anteriores:

	<i>APDL</i>											
	Primer Orden						Segundo Orden					
Canto <i>H</i> /cm	8.09	8.40	6.89	5.63	3.95	1.46	8.10	8.40	6.90	5.64	3.96	1.45
Ancho <i>B</i> /cm	4.39	4.33	3.60	3.36	2.28	1.01	4.39	4.33	3.60	3.35	2.28	1.01
<i>u</i> /cm	2.00009						1.99996					
σ_{eqv} /MPa	131.16						130.90					
Vol./m ³	4.26·10 ⁻³						4.26·10 ⁻³					
Actualiz. de la penal.	5						5					
Iteraciones totales	42						42					

Tabla 5.4. Resultados obtenidos mediante la implementación en *APDL* del modelo de viga en voladizo con 6 secciones continuas y elementos 3D.

Se observa una gran concordancia entre las soluciones de primer y de segundo orden. Los resultados son mejores para el algoritmo de segundo orden ya que se obtiene el mismo valor de la función objetivo (volumen) mientras que se cumple la restricción en desplazamientos. En el de primer orden no se cumple estrictamente la restricción de desplazamiento, pero la infracción es tan mínima que no implica una gran penalización, por lo que se da por buena la optimización.

Respecto a la comparación de los resultados del modelo 3D con los del modelo de 6 secciones diferentes era de esperar que el volumen del modelo en el que no existen saltos en la sección fuera menor, ya que se aprovecha todo el material de la viga. Este mejor uso del material queda reflejado en el aumento de las tensiones que se ha producido al ir reduciendo el volumen de la viga.

A continuación se muestran las soluciones en tensiones y desplazamientos para ambos métodos:

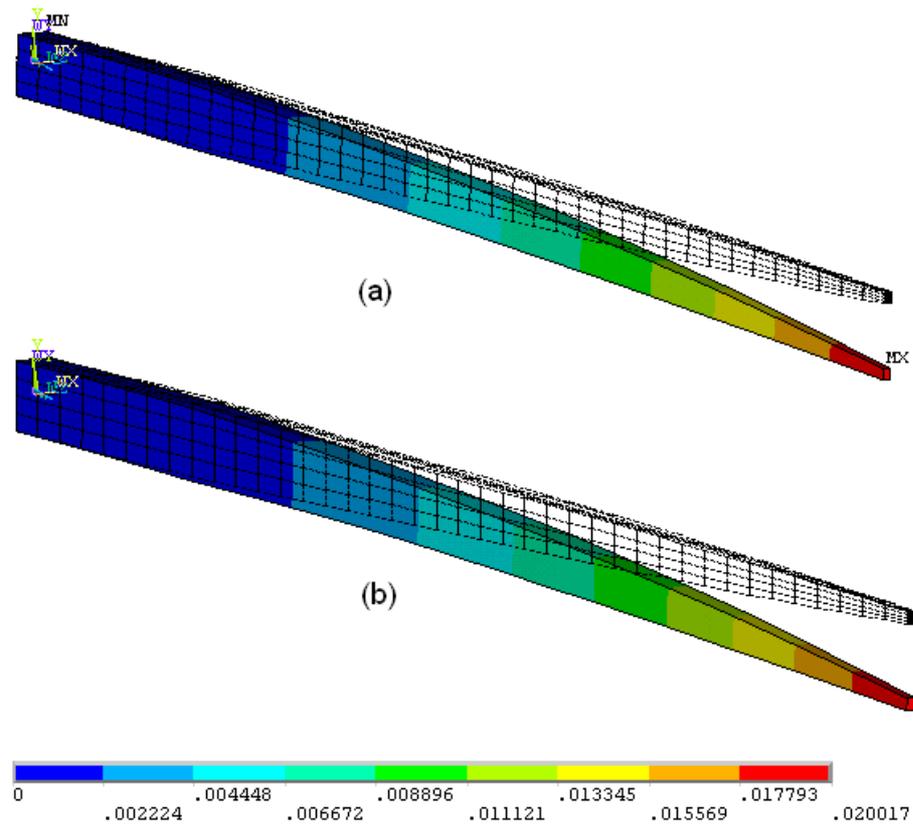


Figura 5.8. Desplazamientos para el óptimo en *APDL* de la viga con elementos 3D, para el algoritmo de a) primer orden y b) de segundo orden.

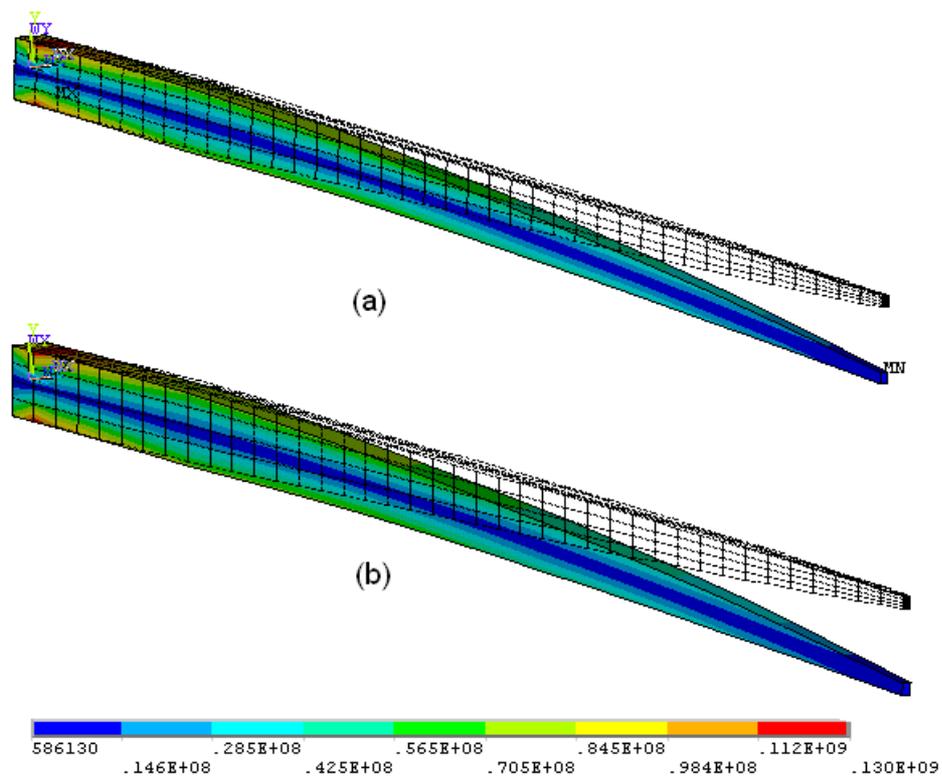


Figura 5.9. Tensiones para el óptimo en *APDL* de la viga con elementos 3D, para el algoritmo de a) primer orden y b) de segundo orden.

Se puede concluir que de este modo se validan los algoritmos implementados para su utilización en la optimización de problemas mecánicos mediante el MEF. Cabe señalar que el método de segundo orden ofrece mejores resultados que el de primer orden pero no tan buenos como era de esperar. Esto puede deberse a las características concretas del problema, que puede resultar suficientemente próximo a la linealidad para que se resuelva eficientemente con un método de primer orden, y que el uso de un algoritmo de segundo orden no implique claras ventajas a la hora de la optimización.

5.2. Resolución del modelo.

En este apartado se muestran los resultados obtenidos en la resolución del modelo del acoplamiento eje-cubo. El modelo comprende a su vez el modelo completo y el submodelo. Como se ha comentado anteriormente las dimensiones nominales empleadas en el modelo son las siguientes:

$d_{eje}^{nom} = 50mm$	Diámetro nominal del eje.
$d_{eje}^{ajuste} = 52.5mm$	Diámetro del eje en el ajuste.
$\delta = 50\mu m$	Interferencia.
$L = 300mm$	Longitud del eje.
$t = 50mm$	Ancho del cubo.
$d_{cubo}^{ext} = 212mm$	Diámetro exterior del cubo.
$r = 8mm$	Radio de acuerdo en el eje.
$r_{cubo} = 2.5$	Radio de acuerdo en el cubo

5.2.1. Resultados del modelo completo.

En primer lugar se muestran los resultados del modelo completo tras la entrada en contacto. Como se ha comentado anteriormente, ésta se realiza de forma directa suponiendo que el montaje se realiza con calentamiento del cubo.

Se muestran las tensiones equivalentes de Von Mises tanto del eje como del cubo. Para la representación de las tensiones en el eje se han eliminado los elementos del eje cercanos al apoyo debido a que tenían unas tensiones muy elevadas debido al carácter singular de la solución de tensiones en esa zona. La representación se centra en la mitad del modelo para que se observe la distribución de tensiones en el interior del eje y del cubo. Posteriormente se muestran las presiones de contacto y el estado de los elementos de contacto.

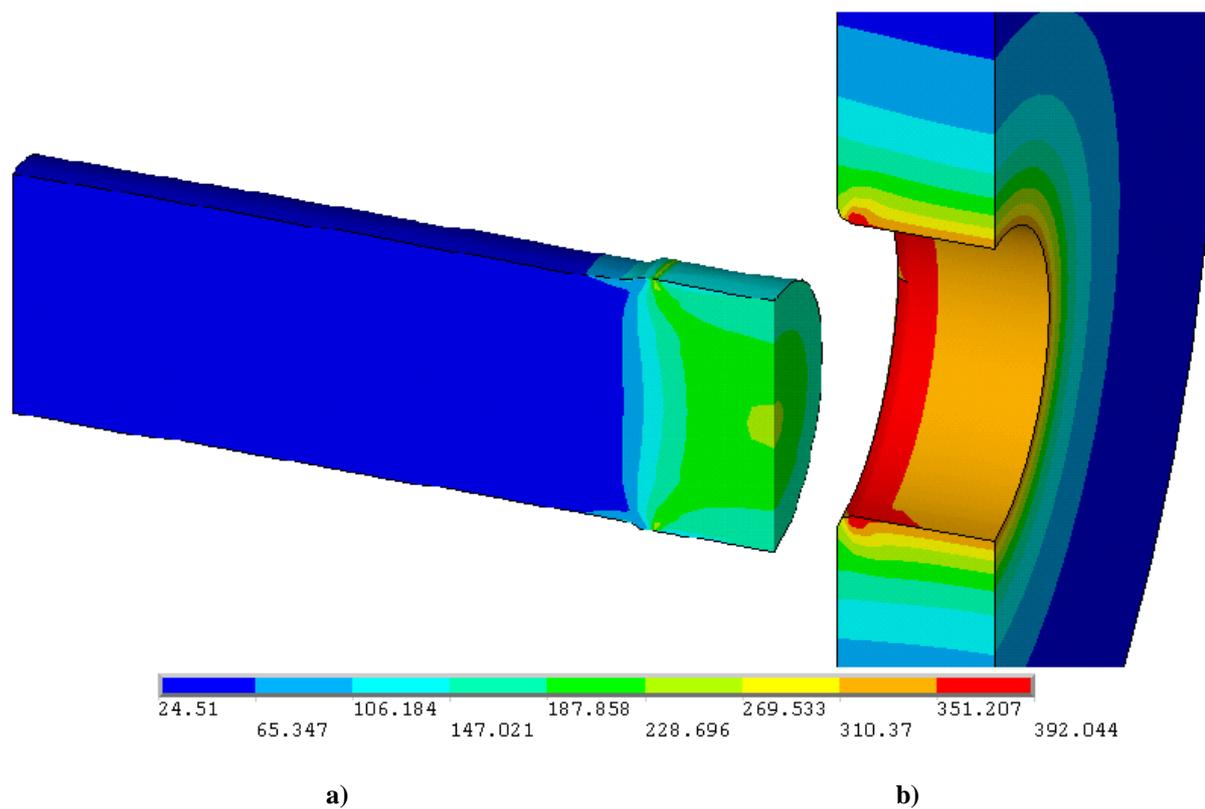


Figura 5.10. Tensión equivalente de Von Mises en el eje (a) y en el cubo (b) tras el montaje con calentamiento del cubo.

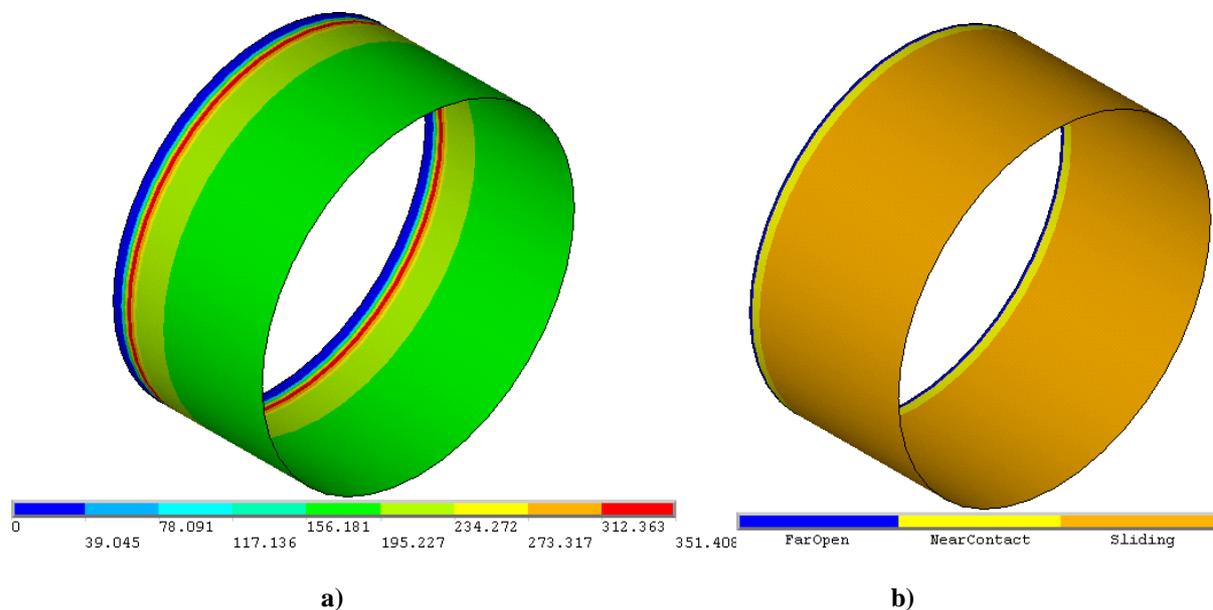


Figura 5.11. Presión normal de contacto (a) y estado de los elementos de contacto (b) tras el montaje con calentamiento del cubo.

En la figura 5.11 se observa cómo se clava la zona del radio de acuerdo del cubo r_{cubo} , en el eje. Esto se observa por las altas presiones que se aprecian en el borde del contacto.

Para la validación de esta solución se comparan los resultados con las presiones obtenidas mediante el estudio teórico del apartado 2.2. Particularizando aquel estudio para el caso actual, se tiene:

$$p = \frac{E\delta}{2bc^2}(c^2 - b^2) = \frac{2.1 \cdot 10^5 \cdot 0.05}{2 \cdot \frac{55}{2} \cdot \left(\frac{212}{2}\right)^2} \left(\left(\frac{212}{2}\right)^2 - \left(\frac{55}{2}\right)^2 \right) = 222.82 \text{ MPa} \quad (5.2.2)$$

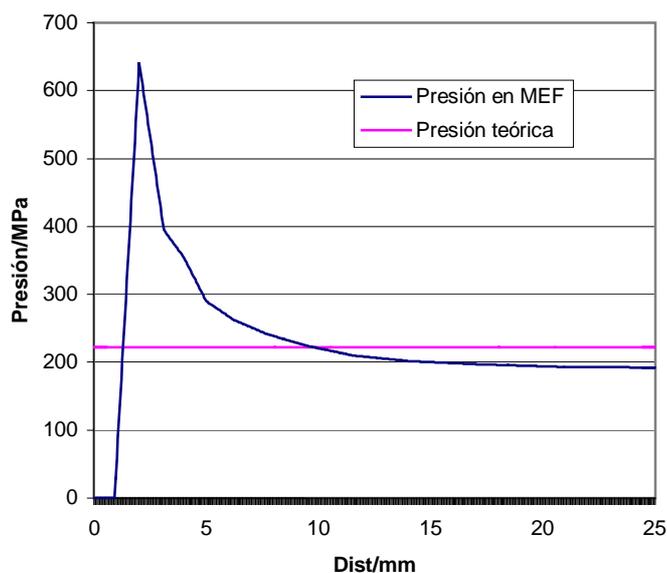


Figura 5.12. Comparación entre la presión obtenida con el MEF y la teórica.

Se observa cómo la presión teórica es aproximadamente la media de la presión obtenida. Esto se debe a que la teórica se calcula suponiendo que el eje y el cubo son de la misma longitud, mientras que en realidad el eje tiene más material fuera del contacto, que ofrece resistencia, de ahí el pico de presión en el borde del contacto.

Del estudio teórico también se deducía que la tensión radial era igual a la presión de contacto. Esto se observa en la siguiente figura en la que se muestra la tensión radial.

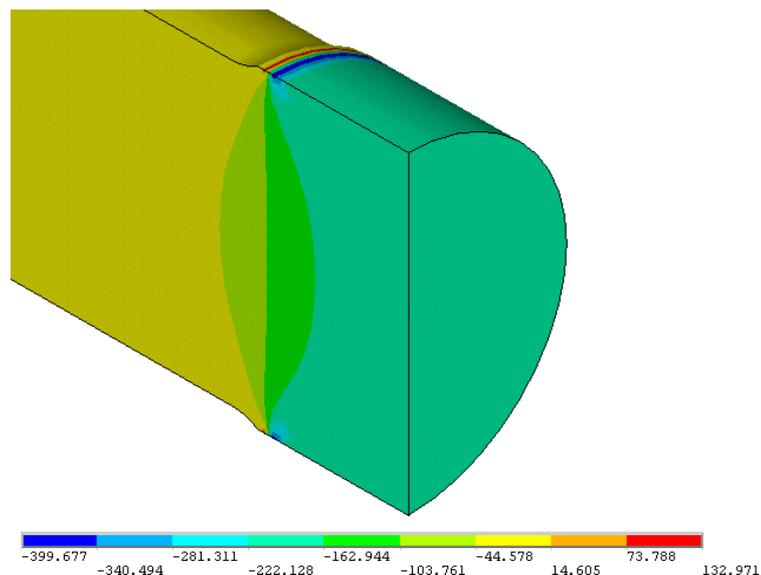


Figura 5.13. Tensión radial en el eje tras el montaje con calentamiento del cubo.

Se observa cómo la tensión radial en el eje es aproximadamente constante exceptuando el borde del contacto e igual a la presión de contacto. Además es aproximadamente constante en la profundidad como predecía el estudio teórico.

Estas comparaciones entre los resultados analíticos de la teoría de la elasticidad, y los resultados obtenidos mediante la resolución del MEF validan la resolución del contacto del modelo completo.

Los resultados tras la carga se muestran a continuación.

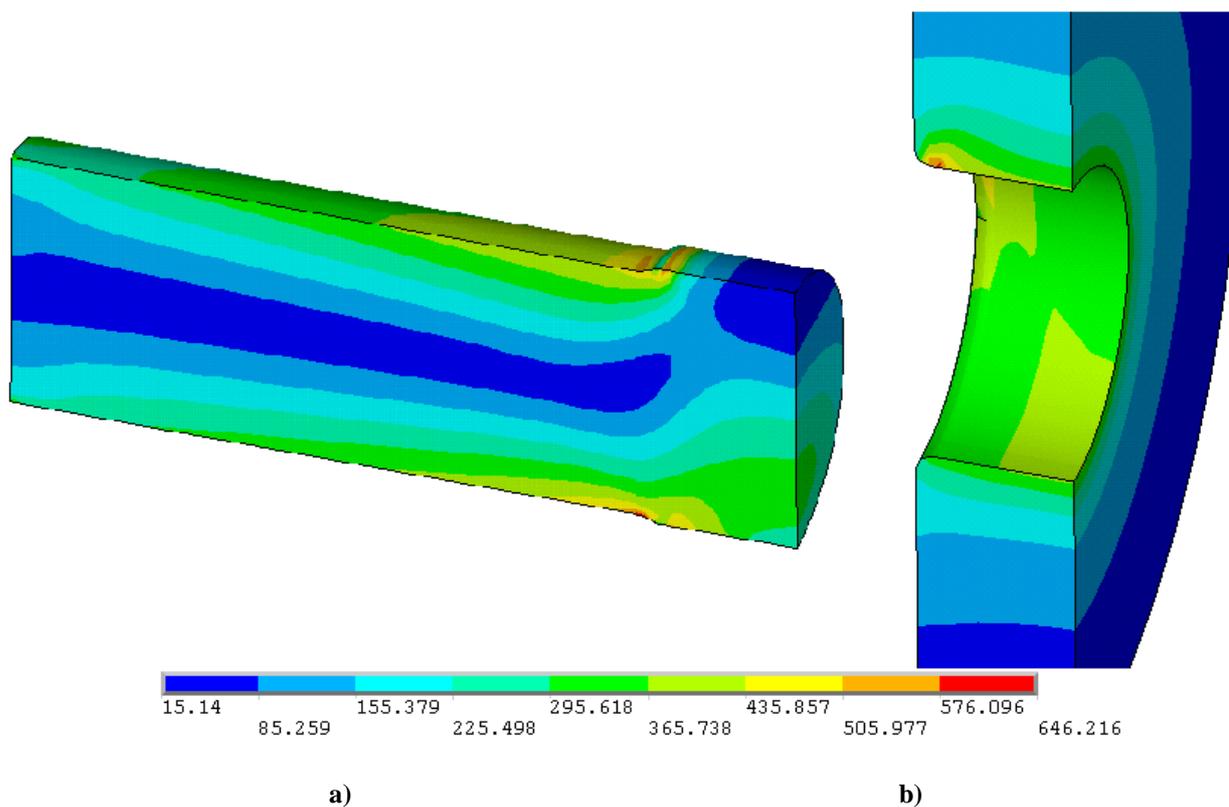


Figura 5.14. Tensiones equivalentes de Von Mises en el eje (a) y en el cubo tras la carga en el modelo completo.

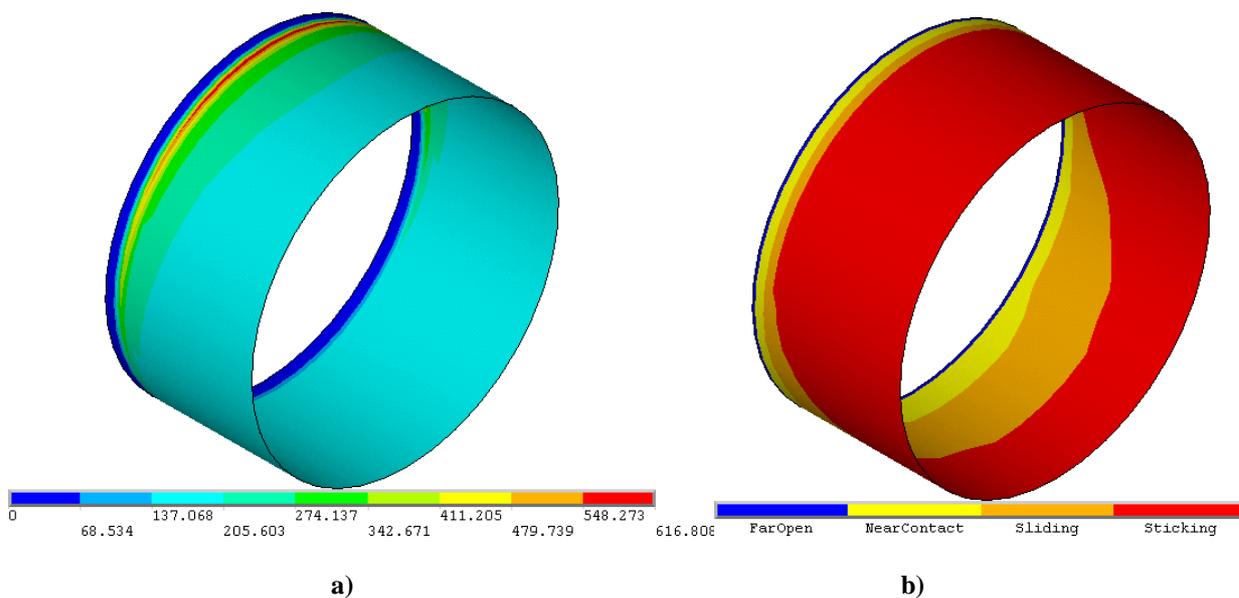


Figura 5.15. Presión normal de contacto (a) y estado de los elementos de contacto (b) tras la carga en el modelo completo.

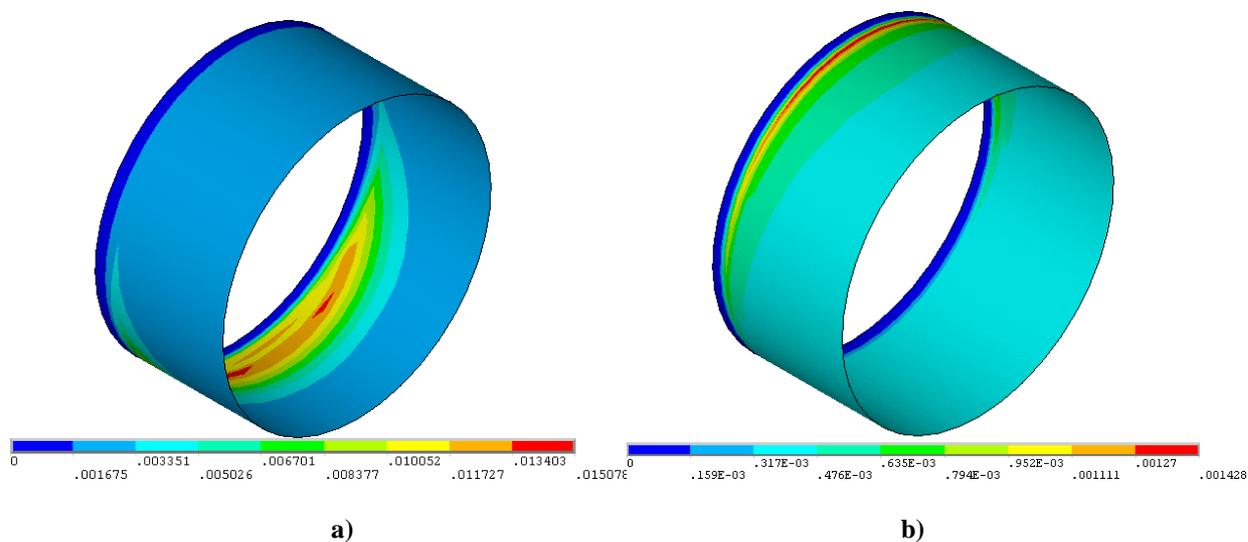


Figura 5.16. Deslizamiento (a) y penetración (b) entre las superficies de contacto tras la carga en el modelo completo.

Se observa cómo la penetración se mantiene en unos valores dentro de los márgenes aceptados al ser la máxima de aproximadamente 1.5 micras.

Los resultados tras la carga en sentido contrario se muestran a continuación..

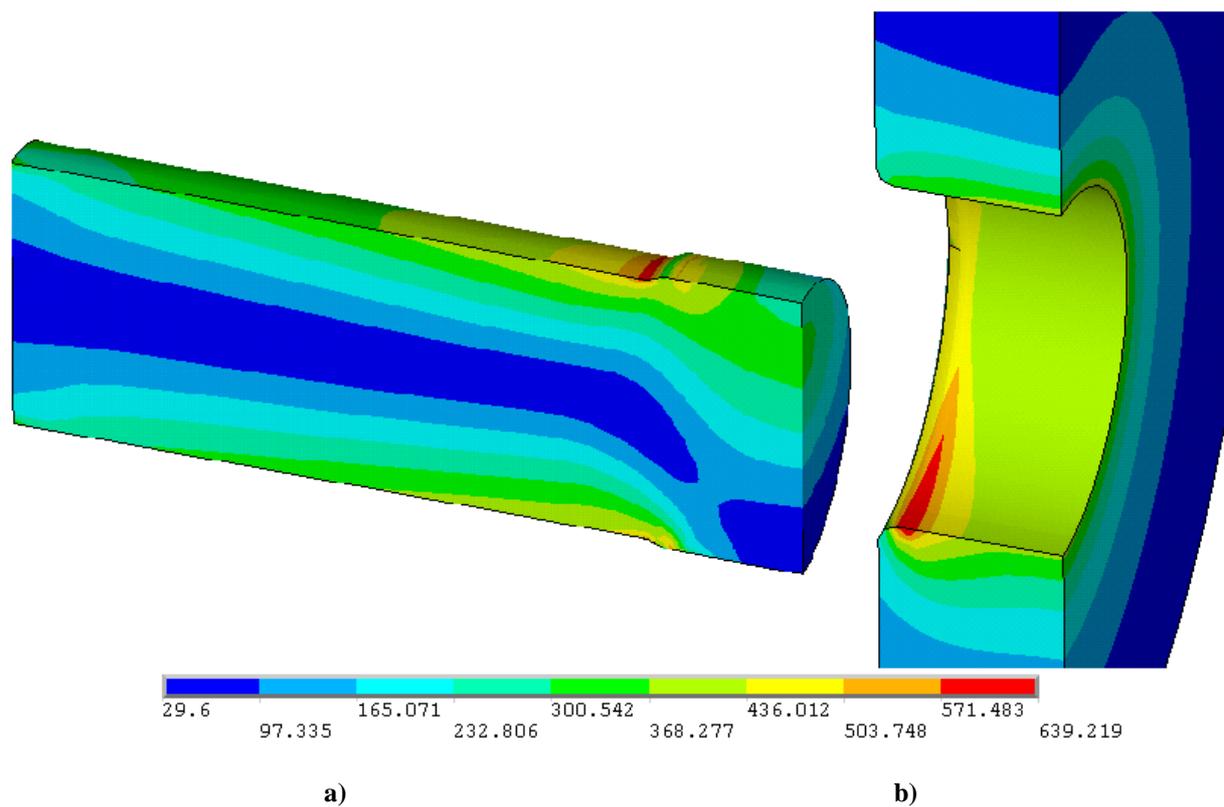


Figura 5.17. Tensiones equivalentes de Von Mises en el eje (a) y en el cubo tras la carga en el modelo completo.

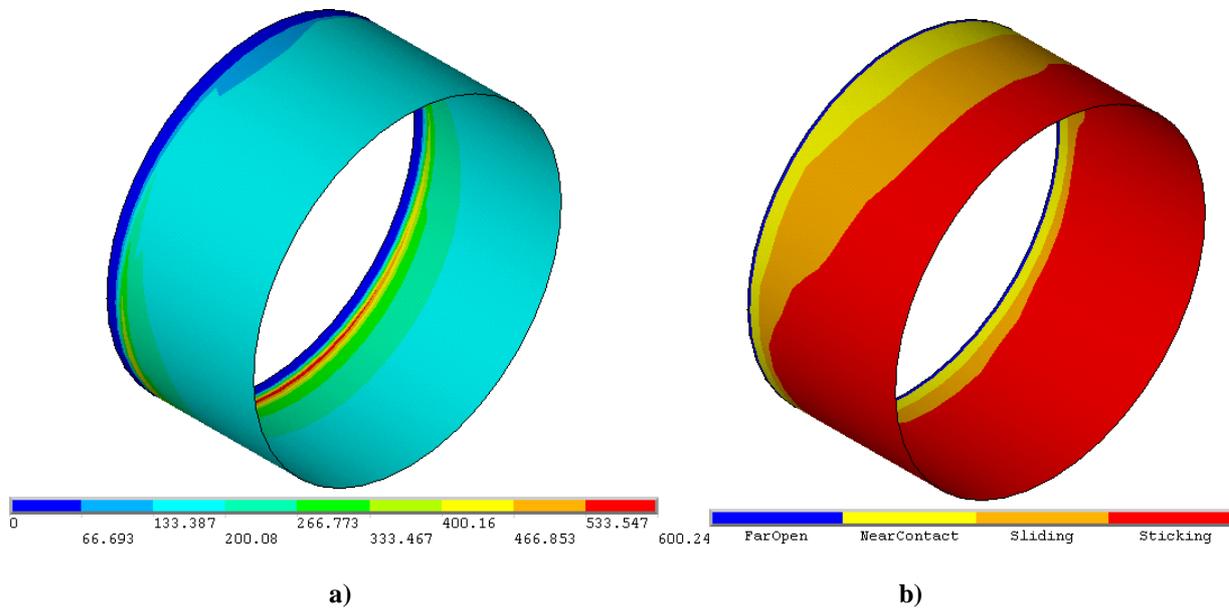


Figura 5.18. Presión normal de contacto (a) y estado de los elementos de contacto (b) tras la carga en el modelo completo.

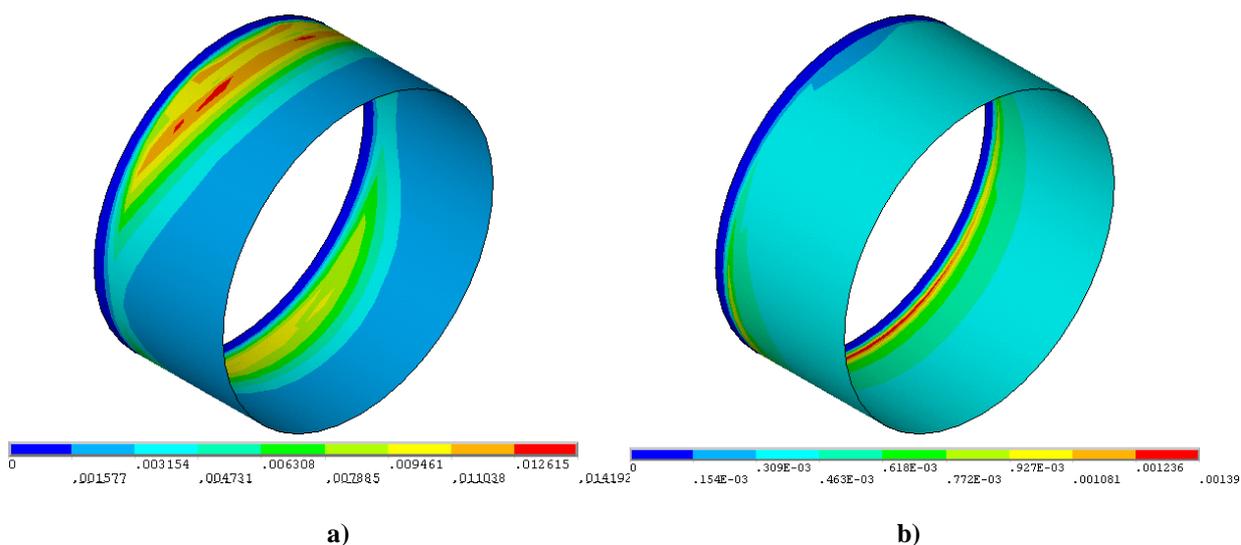


Figura 5.19. Deslizamiento (a) y penetración (b) entre las superficies de contacto tras la carga en el modelo completo.

5.2.2. Resultados del submodelo.

A partir de los desplazamientos del modelo completo y la imposición de éstos en la frontera de corte del submodelo, se procede a la resolución del mismo. De esta forma se obtienen los resultados que se muestran a continuación.

Para la entrada en contacto se tiene la siguiente distribución de tensiones equivalentes de Von Mises en el plano medio.

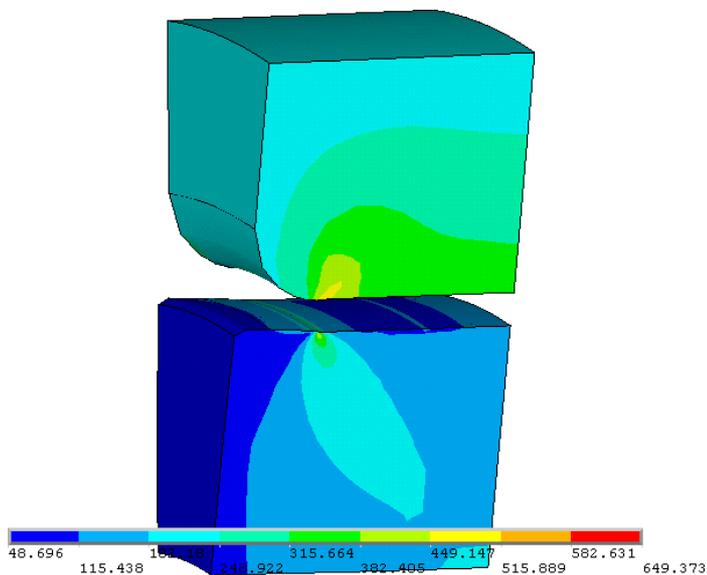


Figura 5.20. Tensión equivalente de Von Mises en el eje y cubo tras el montaje con calentamiento del cubo.

La singularidad del campo de tensiones que existe en el borde del contacto como se verá más adelante, se observa claramente en el cubo debido a que el mallado de éste es más grueso. Esto hace que la influencia de la singularidad llegue más lejos que en el eje que tiene los

elementos más pequeños, ya que normalmente la influencia de una singularidad se observa en los primeros dos elementos a partir del punto de singularidad.

Además, el método de submodelado ha incluido unos efectos de borde indeseados. Éstos se producen donde la frontera de corte coincide con la singularidad del borde del contacto como se aprecia en la siguiente figura, en la que se representan las tensiones de Von Mises en el eje. Estos efectos se verán amplificados en los estados de carga y descarga.

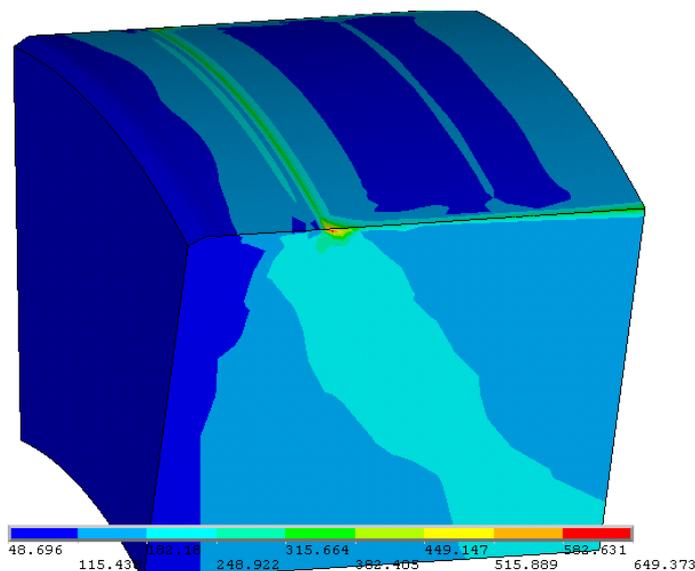


Figura 5.21. Tensión equivalente de Von Mises en el eje tras el montaje.

Las tensiones en la zona crítica dónde se estudia el fenómeno de fretting se muestran en la siguiente figura. La zona mostrada es el plano medio de la zona de contacto entre el cubo y el eje.

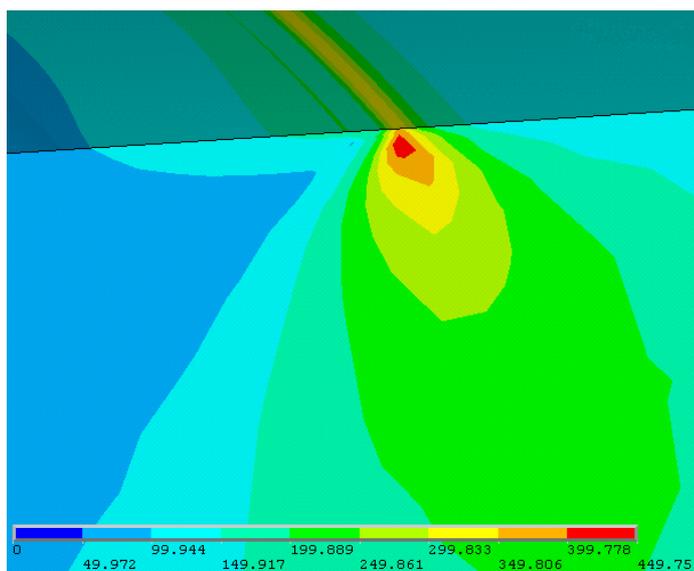


Figura 5.22. Tensión equivalente de Von Mises en la zona crítica tras el montaje.

En las siguientes figuras se muestra la presión, estado y penetración en la zona de contacto.

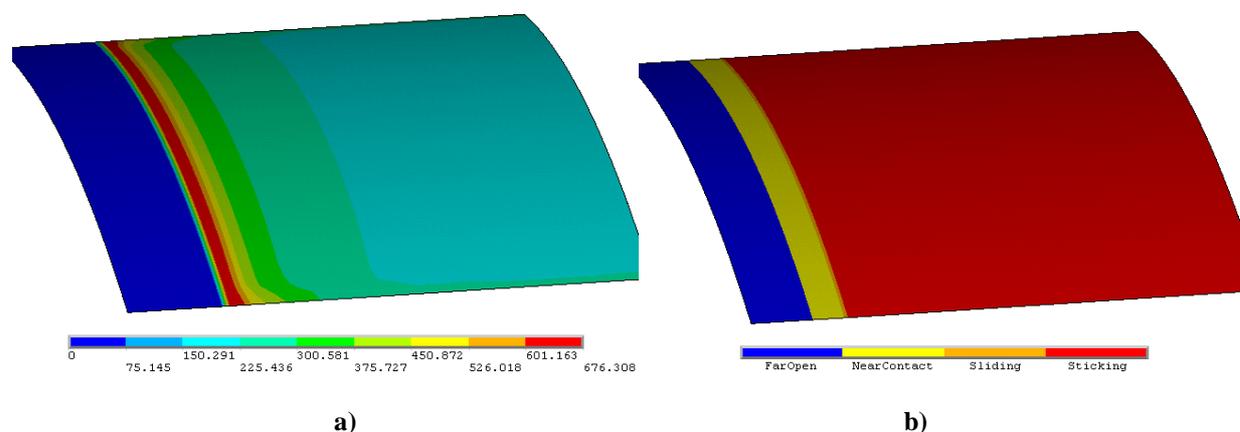


Figura 5.23. Presión normal de contacto (a) y estado de los elementos de contacto (b) tras el montaje en el submodelo.

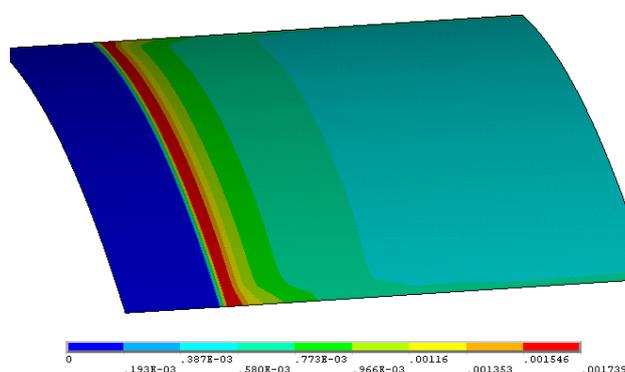


Figura 5.24. Penetración entre las superficies de contacto tras el montaje en el submodelo.

También se aprecia en el submodelo una penetración dentro de la tolerancia, ya que no llega a las 2 micras.

A continuación se muestran los resultados tras la carga.

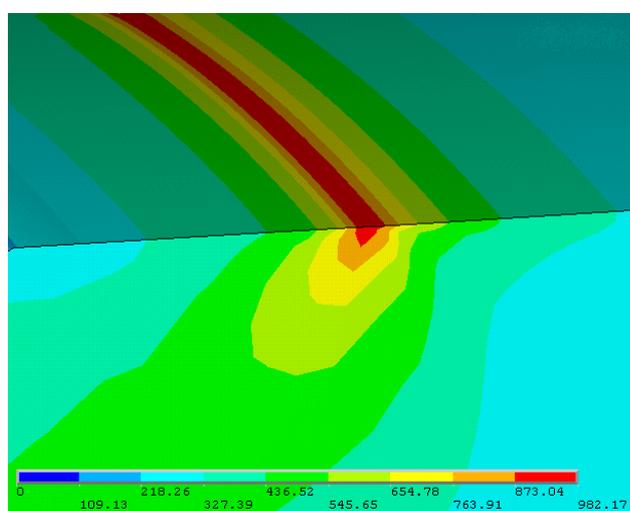


Figura 5.25. Tensión equivalente de Von Mises en la zona crítica tras la carga.

Se debe aclarar que las tensiones en los tres elementos más cercanos a la superficie están distorsionadas por la singularidad. Por tanto éstas no han de ser tenidas en cuenta en el postprocesado de la solución y si se requieren las tensiones en esta zona convendría hacer una extrapolación de los resultados de los elementos subyacentes.

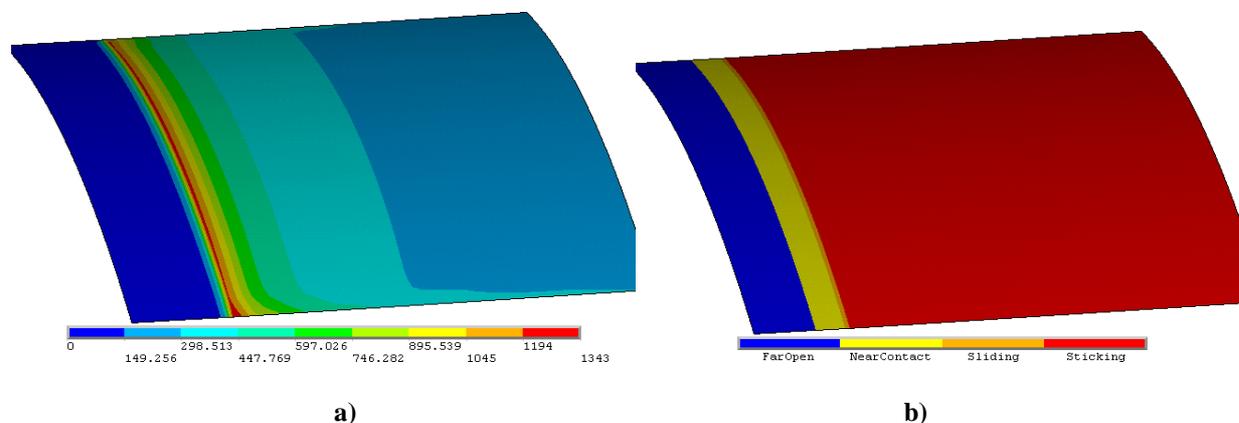


Figura 5.26. Presión normal de contacto (a) y estado de los elementos de contacto (b) tras la carga en el submodelo.

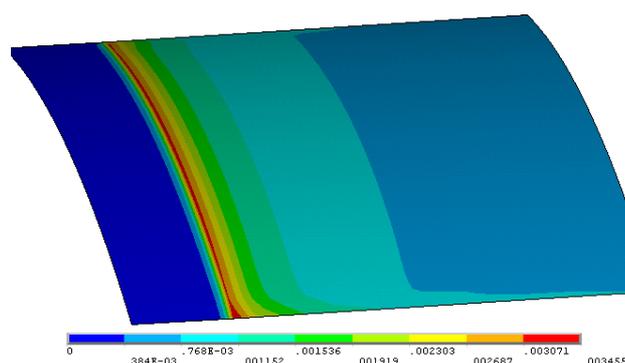


Figura 5.27. Penetración entre las superficies de contacto tras la carga en el submodelo.

Los indeseados efectos de borde tras la carga se muestran en la siguiente figura:

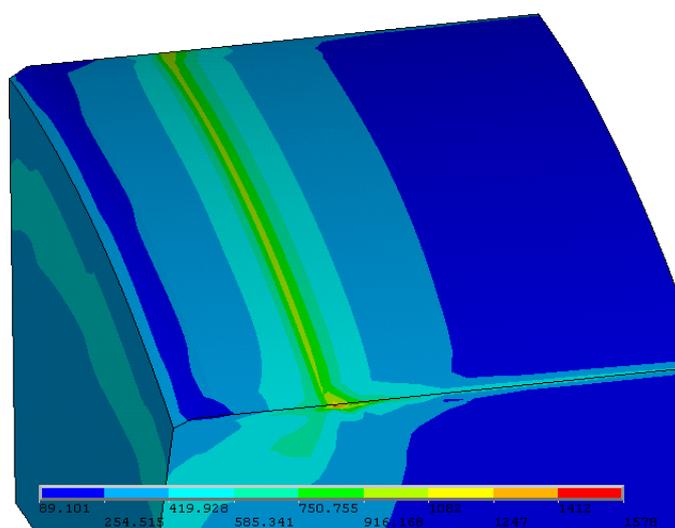


Figura 5.28. Tensiones equivalentes de Von Mises tras la carga.

Para validar la solución es necesario comprobar que la influencia de esas singularidades que aparecen en la intersección del borde del contacto con la frontera de corte del submodelo no llega a la zona de estudio. Esto se muestra en la siguiente gráfica, en la que se representan las presiones de contacto en un camino circunferencial que recorre todo el borde del contacto. En ella se ve cómo la influencia desaparece cerca de la frontera de corte, concretamente a partir del segundo elemento.

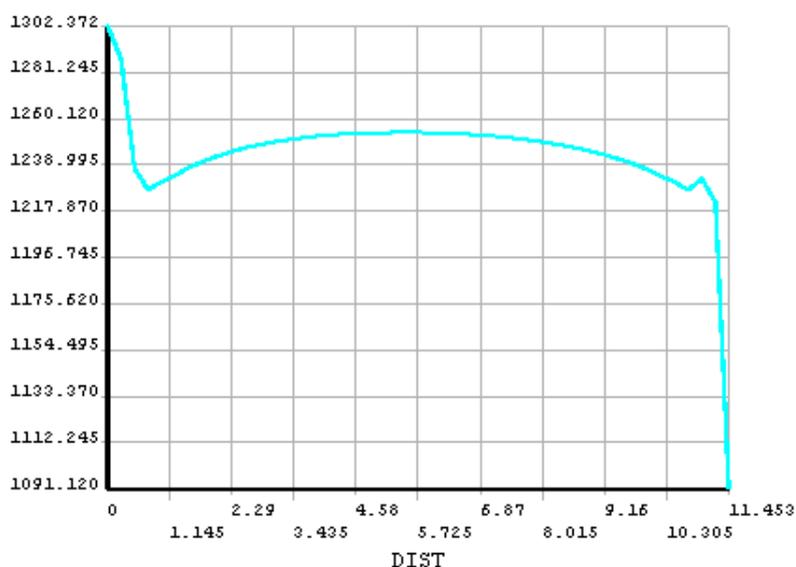


Figura 5.29. Presiones de contacto en camino que recorre el borde del contacto tras la carga.

Y por último los resultados tras la carga en sentido contrario:

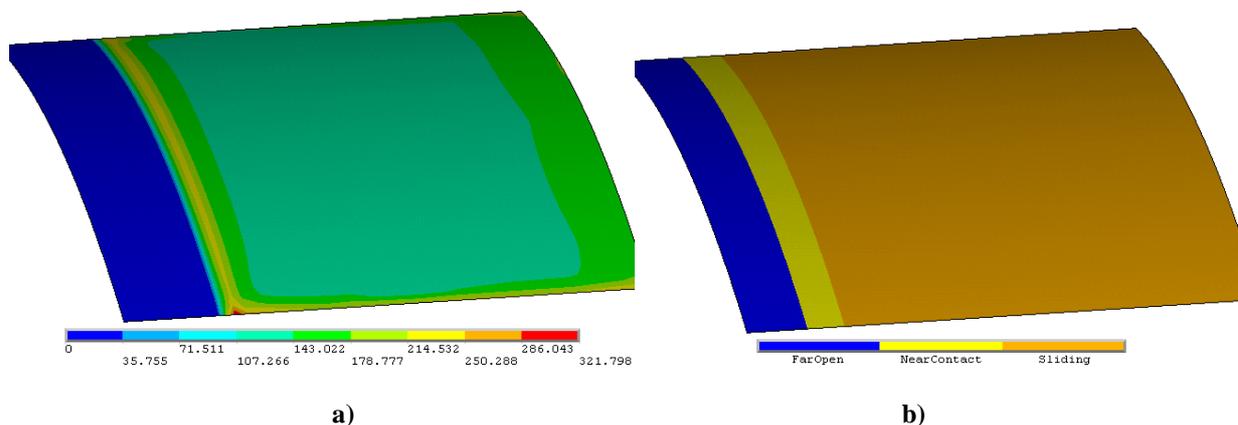


Figura 5.30. Presión normal de contacto (a) y estado de los elementos de contacto (b) tras la descarga en el submodelo.

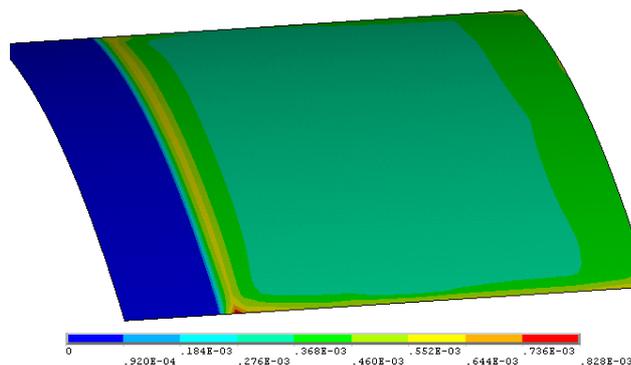


Figura 5.31. Penetración entre las superficies de contacto tras la descarga en el submodelo.

5.2.3. Validación del submodelado

Para comprobar que el submodelado se resuelve de manera correcta es necesario justificar que las fronteras de corte son adecuadas. Esto se comprueba con la comparación de los resultados del modelo completo y del submodelo en dichas fronteras. Esta comparación se ha realizado procesando los resultados en un camino que recorre una de las fronteras de corte. Estos resultados son los que se muestran en las siguientes figuras para la carga y la descarga. Los resultados comparados son las tensiones equivalentes de Von Mises y los desplazamientos. El camino escogido es uno que pasa por el borde del contacto y que va en dirección radial del eje por una de las fronteras de corte según la siguiente figura:

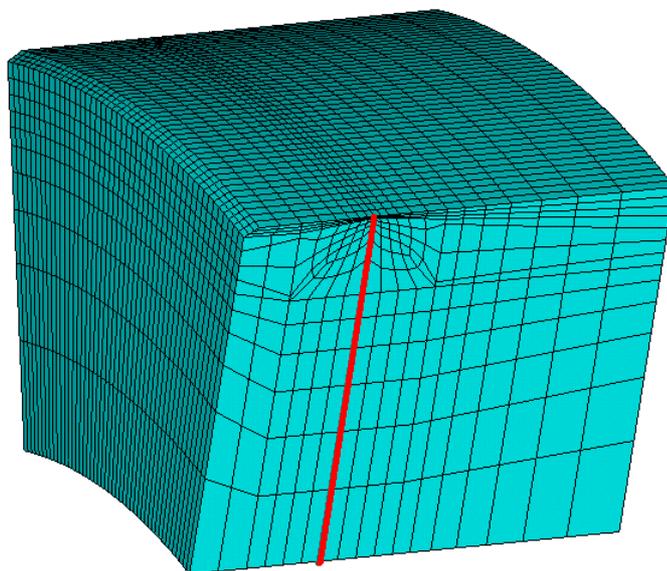


Figura 5.32. Camino 1 para validación del submodelado.

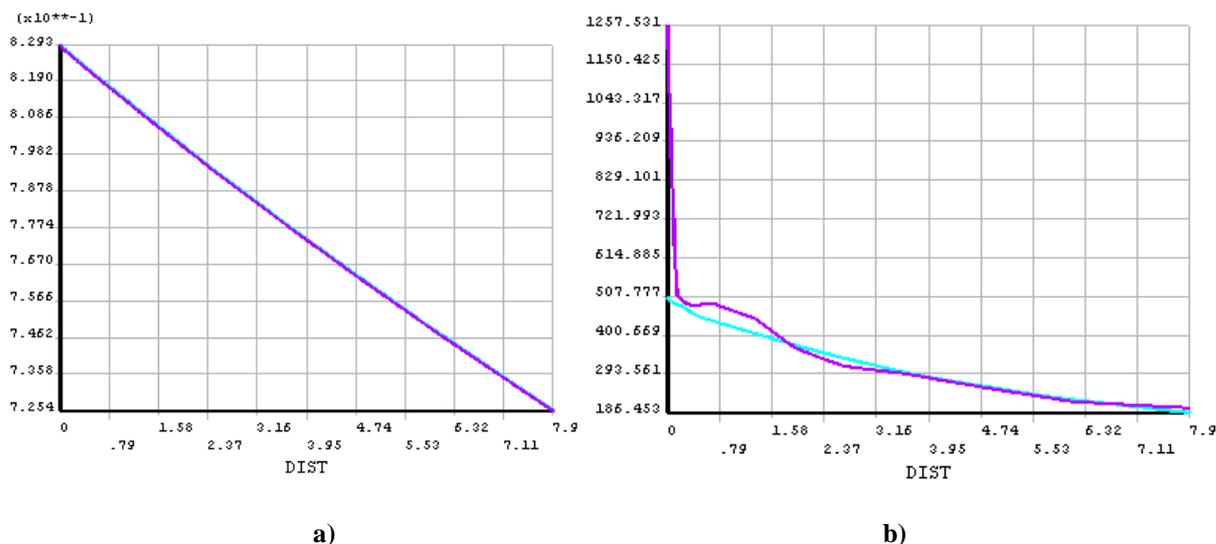


Figura 5.33. Comparación de los desplazamientos (a) y de las tensiones equivalentes de Von Mises en el camino 1 tras la carga.

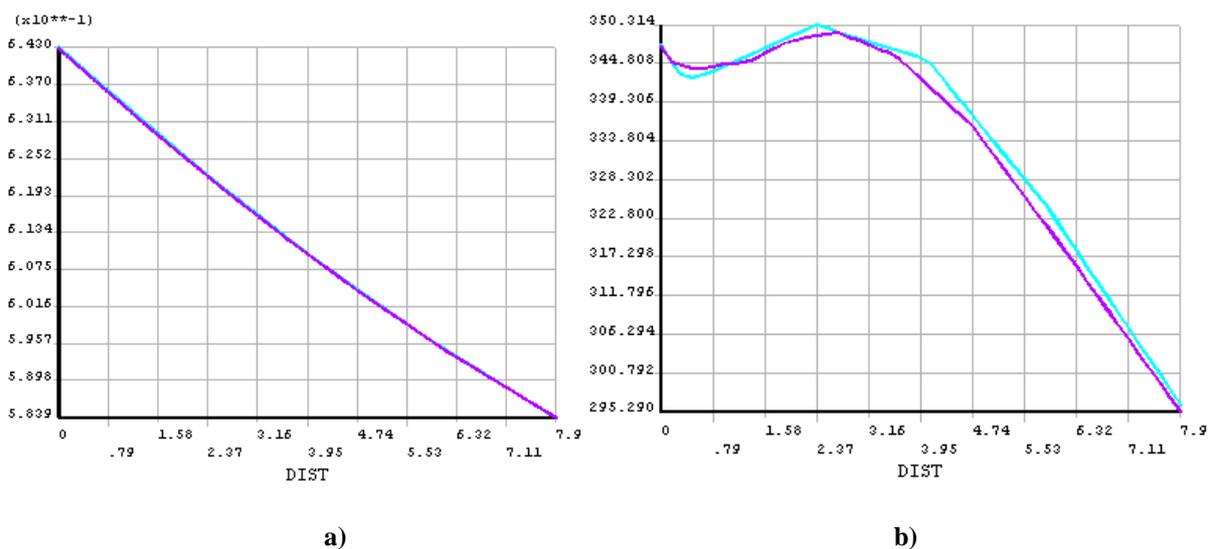


Figura 5.34. Comparación de los desplazamientos (a) y de las tensiones equivalentes de Von Mises en el camino 1 tras la descarga.

En la gráfica de desplazamientos, figura 5.32 (a), no se distinguen los valores de ambos modelos, por estar ambas superpuestas. Por ello se presentan estos valores, tras la carga, en la siguiente tabla:

x/mm	Modelo completo	Submodelo	Modelo completo	Submodelo
	u_{sum}/mm		S_{eqv}/MPa	
0.0000	0.82933	0.82924	504.01	1257.5
0.7900	0.81758	0.81714	434.23	481.44
1.5800	0.80633	0.80587	391.63	411.83
2.3700	0.79515	0.79486	350.98	334.25
3.1600	0.78470	0.78427	315.86	303.62
3.9500	0.77426	0.77396	284.73	282.69
4.7400	0.76426	0.76382	260.92	257.54

5. 5300	0. 75430	0. 75400	237. 84	234. 38
6. 3200	0. 74466	0. 74428	218. 98	214. 94
7. 1100	0. 73519	0. 73487	202. 33	207. 16
7. 9000	0. 72582	0. 72547	186. 45	199. 70

Tabla 5.5. Valores de los desplazamientos totales y tensiones equivalentes de Von Mises en la frontera de corte del submodelo en el modelo completo y en el submodelo.

Se observa que en la tensión existe una gran diferencia en el primer valor. En la gráfica queda patente que es un pico que afecta únicamente al primer elemento. Esto se debe al efecto de cortar por el borde del contacto donde hay una singularidad, efecto que se atenúa en el segundo elemento y que desaparece a partir de éste como se comentó anteriormente. Si el camino que se sigue para comparar modelo y submodelo se separa de la frontera un 5% del tamaño del submodelo según el camino 2, se tiene que los valores son aún más parecidos, desapareciendo ese pico que se observaba en el camino de la frontera de corte.

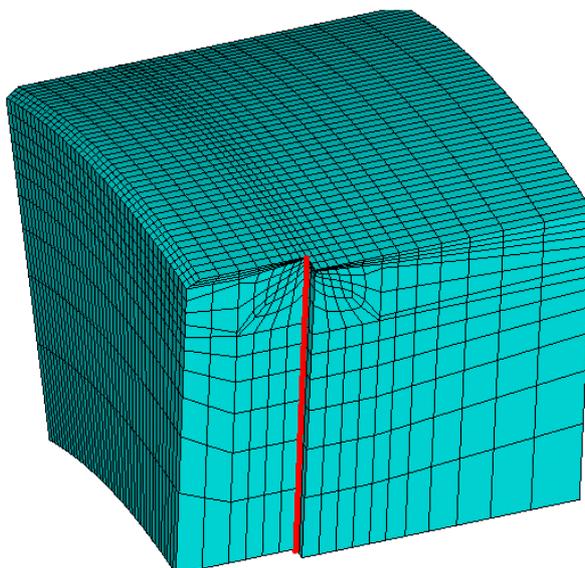


Figura 5.35. Camino 2 para validación del submodelado.

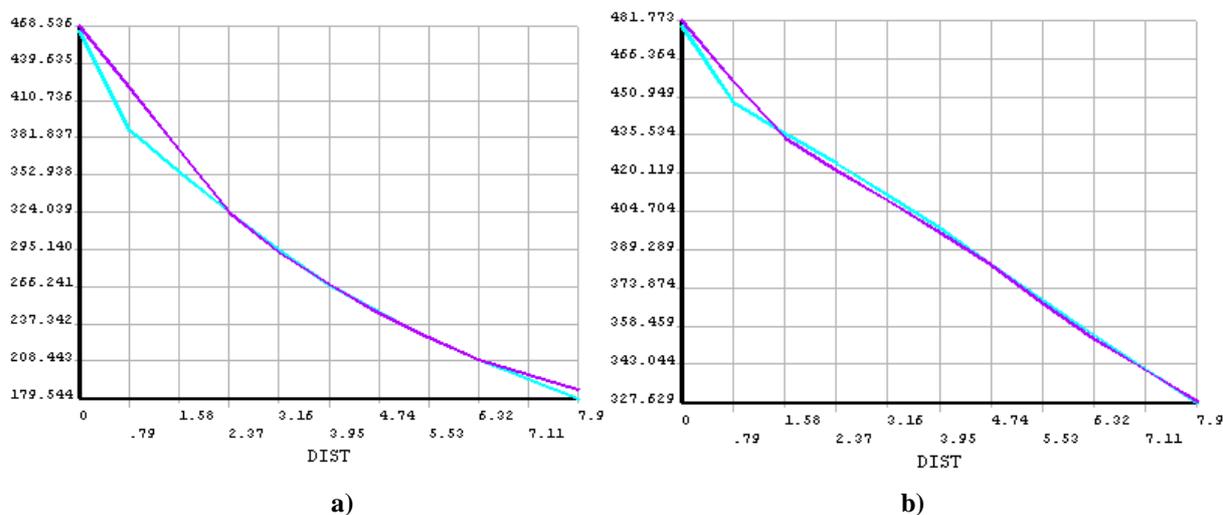


Figura 5.36. Comparación de las tensiones equivalentes de Von Mises tras la carga (a) y tras la descarga (b) en el camino 2.

5.2.4. Singularidad en el borde del contacto.

Cuando se tiene una singularidad, ésta provoca que en dicha zona las tensiones tiendan a infinito. Esto se refleja así si el sistema a estudiar presenta infinitos grados de libertad. En el MEF esto no es posible, por lo tanto nunca se tendrán tensiones infinitas. Para detectar una singularidad en el MEF es necesario comparar los resultados obtenidos con dos mallados de diferente densidad. De esta forma se comprueba que existe una singularidad si al refinar la malla en dicha zona aumentan las tensiones sin pararse en ningún valor.

Tras la resolución del problema se ha comprobado que en el borde del contacto se produce este fenómeno. La existencia de una singularidad implica que alrededor de la misma se debe de guardar una distancia de incertidumbre de los resultados correspondiente a al menos dos elementos.

Para comprobar la existencia de esta singularidad se va a comparar la solución del modelo con la del submodelo en dicha zona. El modelo tendrá muy pocos elementos alrededor de la singularidad, mientras que el submodelo tendrá bastantes más.

Como norma general las soluciones alrededor de una singularidad no son válidas en los primeros dos elementos, por tanto podremos comparar a partir del tercero de la malla más grosera.

El camino elegido se muestra en la siguiente figura:

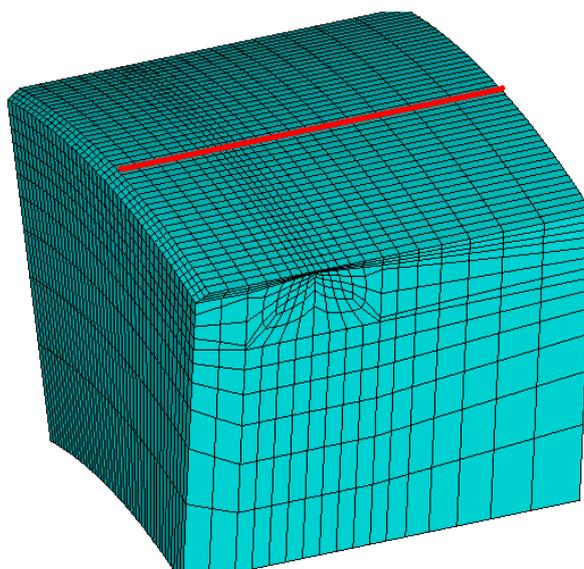


Figura 5.37. Camino elegido para comparación de resultados en la singularidad.

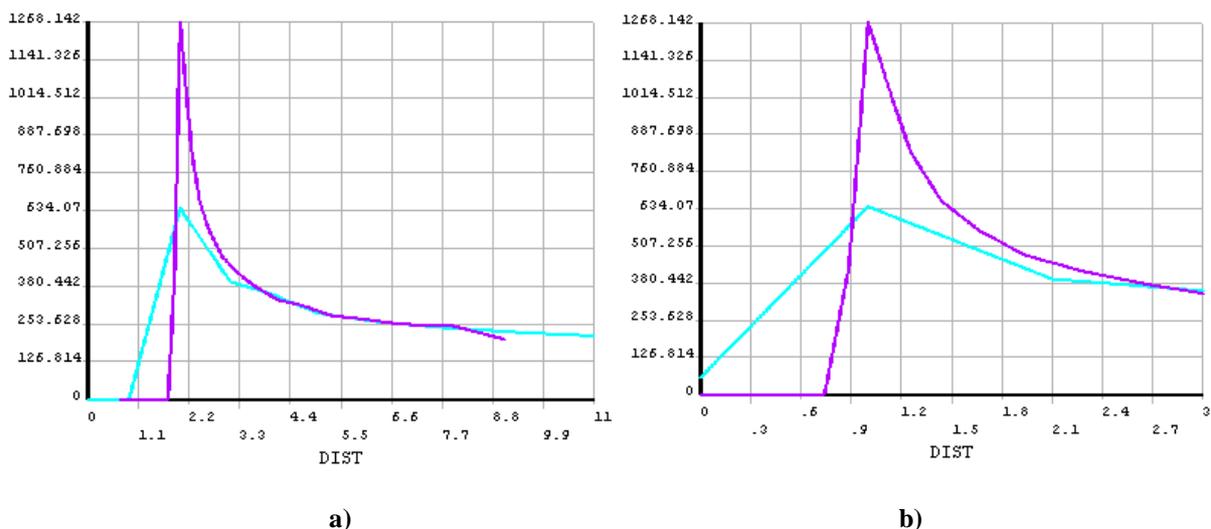


Figura 5.38. Comparación de presiones entre modelo completo y submodelo en toda la zona de submodelado (a) y en la zona de la singularidad (b).

En la figura (a) ya se observa claramente cómo al aumentar el número de elementos que se usan alrededor de la singularidad, se representa mejor ésta. En la figura (b) se muestra lo que se comentaba anteriormente. En esta figura se muestran únicamente tres elementos del modelo completo, y se aprecia que la solución en los dos elementos que rodean a la singularidad no es coincidente, mientras que a partir del segundo elemento en dirección hacia la zona de contacto se unen las soluciones para llegar ya a una zona válida. Por tanto los resultados habrá que mirarlos más allá del segundo elemento de la singularidad.

Algo similar ocurre con la tensión equivalente de Von Mises como se observa en la siguiente figura.

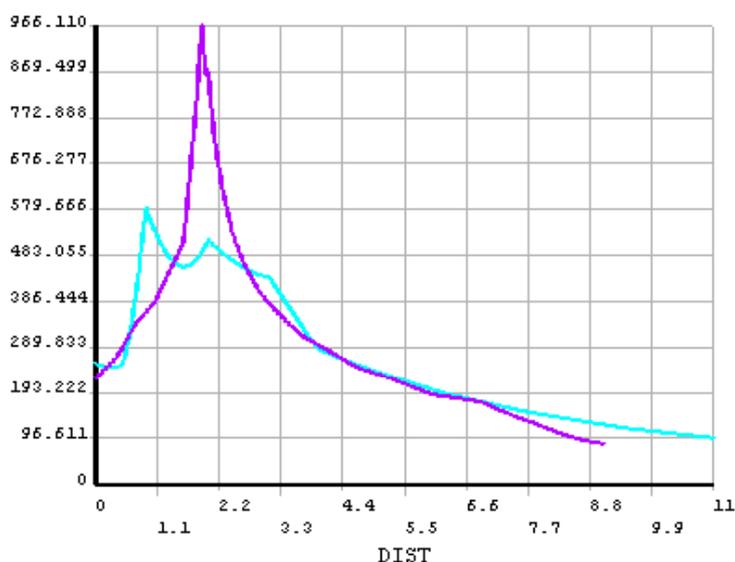


Figura 5.39. Comparación de tensiones equivalentes de Von Mises entre modelo completo y submodelo en toda la zona de submodelado.

Esto explica la restricción que se impuso al modelo usado para obtener los resultados a una profundidad $a_0/2$. Éste debía tener al menos dos elementos hasta esa profundidad. Para estar del lado de la seguridad se tomaron tres elementos como se comentó anteriormente.

5.2.5. Análisis de la vida a fatiga.

El análisis de vida a fatiga se realiza con el método de Smith-Watson y Topper. Para ello se han de obtener los estados de tensiones y de deformaciones para todos los puntos que se encuentren a una profundidad $a_0/2$. Este parámetro, denominado de El Haddad viene dada por las propiedades del material y se calcula a continuación. Las propiedades a fatiga son las siguientes para el material escogido:

Material AISI/SAE 1045 Quenched & Tempered

- Coeficiente de resistencia a la fatiga (σ_f')	1225 MPa
- Exponente de resistencia a la fatiga (b)	-0.095
- Coeficiente de ductilidad a la fatiga (ε_f')	1
- Exponente de ductilidad a la fatiga (c)	-0.66
- Incremento del factor de intensidad de tensiones umbral (ΔK_{th}) para $R=-1$	$3.8 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$

En el problema para el que se presentan los resultados, el parámetro de carga R resulta salir aproximadamente -1.42 , ya que éste varía ligeramente según el punto en que se calcule. Dado que no se poseen datos ni de ΔK_{th} ni de σ_f para parámetros de carga distintos de -1 o de 0 se puede suponer que tanto ΔK_{th} como $\Delta\sigma_f$ varían de forma parecida al variar R , con lo que el parámetro de El-Haddad obtenido, a_0 , sería el mismo que para $R=-1$ esto es:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}^{R=-1.4}}{\Delta\sigma_f^{R=-1.4}} \right)^2 \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{1.4 \cdot \Delta K_{th}^{R=-1}}{1.4 \cdot \Delta\sigma_f^{R=-1}} \right)^2 = 74.7 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (5.2.3.)$$

Por lo tanto la distancia a la que se tomarán los resultados es a $37.35 \mu\text{m}$.

Una vez que se sabe dónde tomar los resultados hay que ver qué resultados se toman. Para obtener el parámetro SWT es necesaria la deformación principal máxima y la tensión máxima en dicha dirección. Para ello se ha obtenido el estado de tensiones y deformaciones en todos los puntos que se encuentran a $37.35 \mu\text{m}$ de la superficie. A partir de las deformaciones se obtiene el tensor de incremento de deformación entre carga y descarga. A este tensor se le calculan las direcciones principales. Para obtener la tensión máxima en la dirección del incremento de deformación principal máxima se hace un cambio de coordenadas del estado de tensiones tras la carga y tras la descarga. El nuevo sistema de coordenadas es paralelo a las direcciones

principales de los incrementos de deformación. De esta manera se obtiene la tensión tras la carga y tras la descarga proyectada en dirección del incremento de deformación principal máximo. De esta manera ya se tiene el valor del parámetro SWT, a partir del cual se obtiene la vida de forma directa.

Los resultados, para las dimensiones nominales, son los siguientes

Parámetro $SWT = 417.27 \text{ MPa}$

Vida $N = 0.42 \cdot 10^5 \text{ ciclos.}$

5.3. Análisis de convergencia de la malla del modelo.

El modelo se ha realizado con distintos tipos de mallas y de elementos, lo que al final implica distinto número de grados de libertad. Según el número de grados de libertad se tienen distintas soluciones, más cercanas a la realidad conforme dicho número aumenta. Sin embargo al aumentar el número de grados de libertad aumenta notablemente el tiempo de resolución, lo que implica que se ha de llegar a un compromiso entre ambos factores. Para alcanzarlo se realiza el estudio de convergencia, que busca la malla que proporciona unos resultados más eficientes, es decir, buenos resultados a un coste computacional razonable para el posterior proceso de resolución.

Para realizar este análisis se han tomado los desplazamientos en un nodo que se encuentra en el mismo lugar para todos los modelos.

El análisis de convergencia se va a realizar independientemente en el modelo completo y en el submodelo. Se buscará que el tiempo de resolución para cada uno sea similar. Para este estudio se ha elegido un nodo del eje cercano a la zona crítica, pero que no se encuentre en el borde del contacto para que no se vea afectado por la singularidad existente.

5.3.1. Análisis de convergencia del modelo completo.

La posición del nodo elegido para el análisis de convergencia se muestra en la siguiente figura:

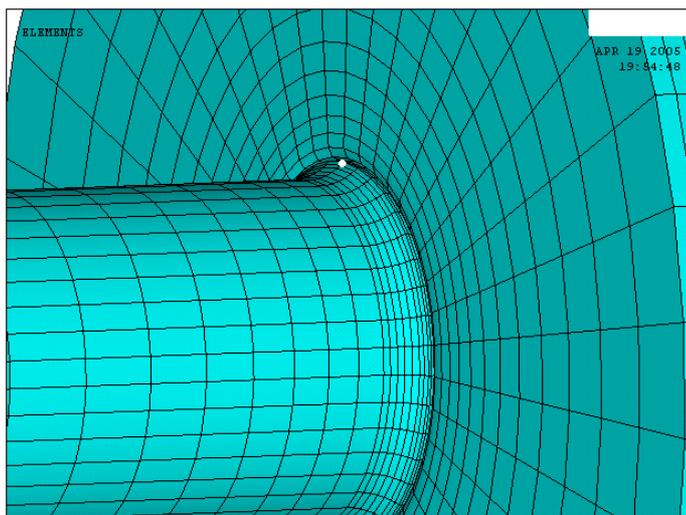


Figura 5.40. Nodo utilizado para el análisis de convergencia del modelo completo.

A continuación se muestra el resultado del análisis de convergencia, en el que se muestran los desplazamientos del nodo para los diferentes mallados. Estos resultados se muestran tanto para la carga como para la descarga, entendiendo por descarga la carga que tiende a separar el cubo del eje en la zona crítica.

En primer lugar se presentan estos resultados en forma de tabla y posteriormente en gráficas donde se aprecia mejor la tendencia de los resultados.

GDL	DESCARGA				CARGA				Tipo de elemento
	u_x (mm)	u_y (mm)	u_z (mm)	u_{sum} (mm)	u_x (mm)	u_y (mm)	u_z (mm)	u_{sum} (mm)	
15258	-2,62E-02	0,5304	3,93E-01	0,6604	1,58E-02	-0,5466	3,96E-01	6,75E-01	lineal
22197	-2,63E-02	0,5418	4,37E-01	0,6964	1,59E-02	-0,5582	4,40E-01	0,7111	lineal
42873	-2,58E-02	0,5340	4,33E-01	0,6878	1,56E-02	-0,5522	4,37E-01	7,05E-01	parabólico
58308	-2,56E-01	0,5454	4,89E-01	0,7331	1,51E-02	-0,5633	4,93E-01	0,7490	lineal
85323	-2,57E-01	0,5489	4,98E-01	0,7417	1,54E-02	-0,5676	5,03E-01	7,59E-01	parabólico

Tabla 5.6. Desplazamientos para el análisis de convergencia del modelo completo en función del número de grados de libertad (GDL) y del tipo de elemento.

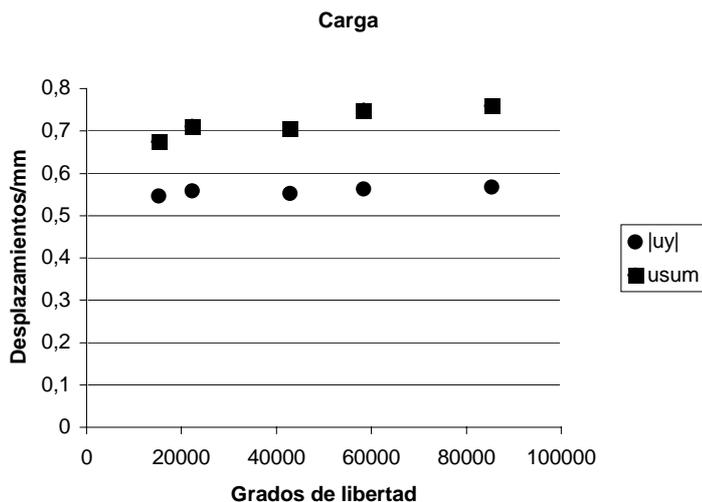


Figura 5.41. Resultados del análisis de convergencia del modelo completo tras la carga. Se muestran los desplazamientos verticales (en y) y los totales en función de los grados de libertad.

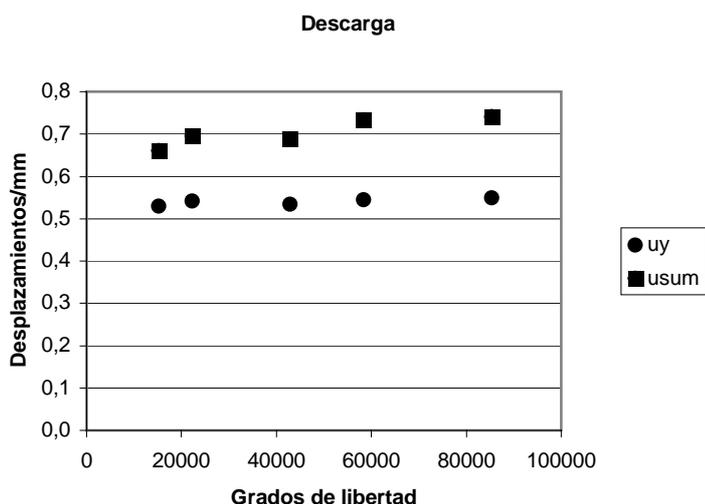


Figura 5.42. Resultados del análisis de convergencia del modelo completo tras la descarga. Se muestran los desplazamientos verticales (en y) y los totales en función de los grados de libertad.

Con respecto a los desplazamientos se observa que como era de esperar se producen variaciones entre los resultados que proporcionan las distintas mallas. Estas variaciones se deben a dos factores principalmente: el primero es que al aumentar el número de elementos se reproduce más fielmente la forma del modelo, el segundo es que al aumentar el número de grados de libertad aumenta la flexibilidad del modelo tendiendo ésta a la del sistema continuo real conforme se aumenta el número de grados de libertad. En modelos más flexibles los desplazamientos son mayores. De este último factor viene la tendencia ascendente al aumentar el número de grados de libertad. Esta tendencia sólo la rompe el modelo de elementos parabólicos de 42873 debido a que ese modelo en concreto tiene menos grados de libertad en la

zona del eje en la que se produce la mayor flexión, lo que implica que sea más rígido y por tanto el desplazamiento u_y , que es el predominante, sea menor.

Respecto a la convergencia se observa que ya la malla de 58308 grados de libertad presenta unos resultados muy similares a los de la malla de 85323.

A continuación se muestra el tiempo de resolución para las diferentes mallas. Este tiempo es orientativo ya que no se ha podido asegurar que el estado del ordenador en el que se han medido fuera el mismo para cada resolución.

GDL	Tiempo/(min)	Tipo de elemento
15258	3,5	lineal
22197	6,28	lineal
42873	45,35	parabólico
58308	96,14	lineal
85323	176,5	parabólico

Tabla 5.7. Tiempo de resolución para el análisis de convergencia en función del número de grados de libertad (GDL) y del tipo de elemento.

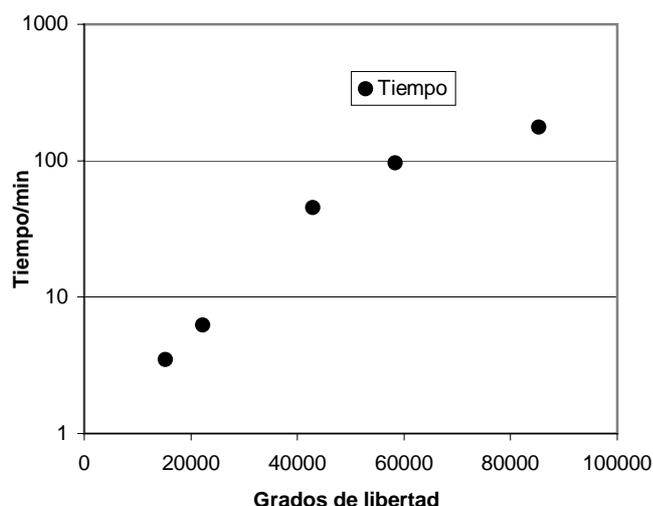


Figura 5.43. Tiempo de resolución del proceso de montaje, carga y descarga del modelo completo en función del número de grados de libertad.

Aun teniendo en cuenta que los tiempos de resolución son orientativos la tendencia como se observa en la figura 5.13 es exponencial, como era de esperar.

Respecto a la malla más adecuada combinando los resultados del análisis de convergencia en desplazamientos y de los tiempos de resolución parece ser que es la de 58308 grados de libertad. Esta malla proporciona unos resultados bastante buenos y un tiempo de

resolución que aunque es bastante alto parece factible para la posterior optimización. Por ello se ha elegido esta malla para la resolución del problema.

5.3.2. Análisis de convergencia del submodelo.

Para el análisis de convergencia del submodelo se ha elegido el nodo que se muestra en la siguiente figura por estar cerca de la zona crítica y no estar a su vez afectado por ésta, ya que se encuentra alejado de la singularidad varios elementos alejado de la singularidad. Este nodo se encuentra en la misma posición para todos los tipos de malla.

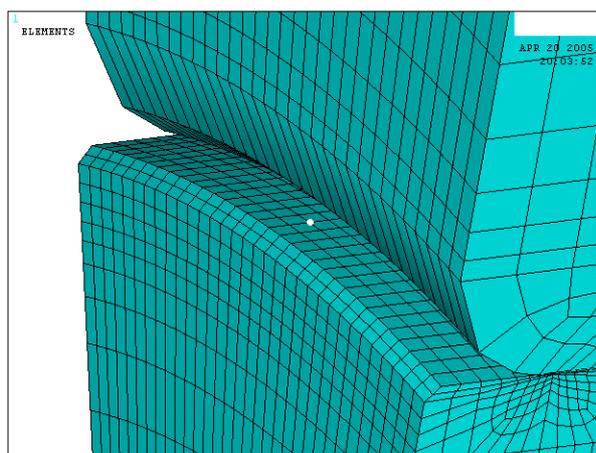


Figura 5.44. Nodo utilizado para el análisis de convergencia del submodelo.

En la tabla 5.8 se muestra el resultado del análisis de convergencia. En ella se muestran los desplazamientos del nodo en cuestión para los diferentes modelos. Los resultados se muestran tanto para la carga como para la descarga.

En primer lugar se presentan estos resultados en forma de tabla y posteriormente en gráficas donde se aprecia mejor la tendencia de los resultados.

GDL	DESCARGA				CARGA				Tipo de elemento
	u_x (mm)	u_y (mm)	u_z (mm)	u_{sum} (mm)	u_x (mm)	u_y (mm)	u_z (mm)	u_{sum} (mm)	
15402	-2,60E-02	0,53047	3,93E-01	0,66076	1,58E-02	-0,54836	3,97E-01	6,77E-01	lineal
37719	-2,60E-02	0,54196	4,37E-01	0,69687	1,57E-02	-0,55998	4,41E-01	7,13E-01	lineal
58305	-2,56E-02	0,53408	4,33E-01	0,68815	1,54E-02	-0,55395	4,38E-01	7,06E-01	parabólico
75264	-2,54E-02	0,54543	4,90E-01	0,73355	1,49E-02	-0,56505	4,94E-01	7,51E-01	lineal
144486	-2,55E-02	0,54896	4,99E-01	0,74209	1,53E-02	-0,56937	5,04E-01	7,60E-01	parabólico

Tabla 5.8. Desplazamientos para el análisis de convergencia del submodelo en función del número de grados de libertad (GDL) y del tipo de elemento.

Los desplazamientos se han representado adimensionados para una mayor claridad y mejor interpretación de los resultados.

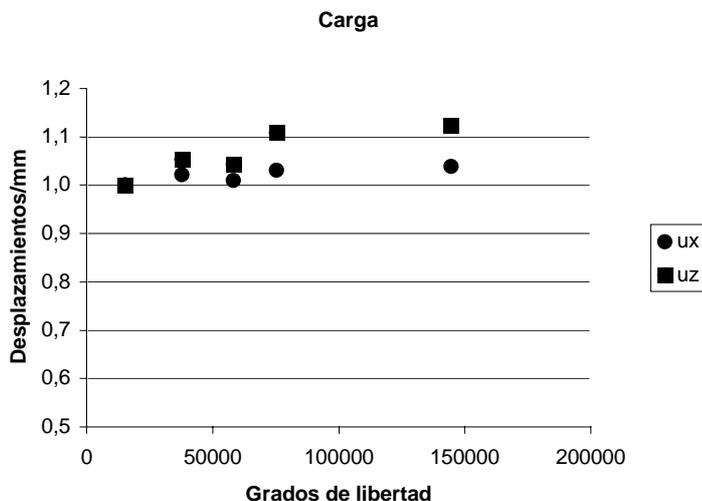


Figura 5.45. Resultados del análisis de convergencia del submodelo tras la carga. Se muestran los desplazamientos en x y en z en función de los grados de libertad.

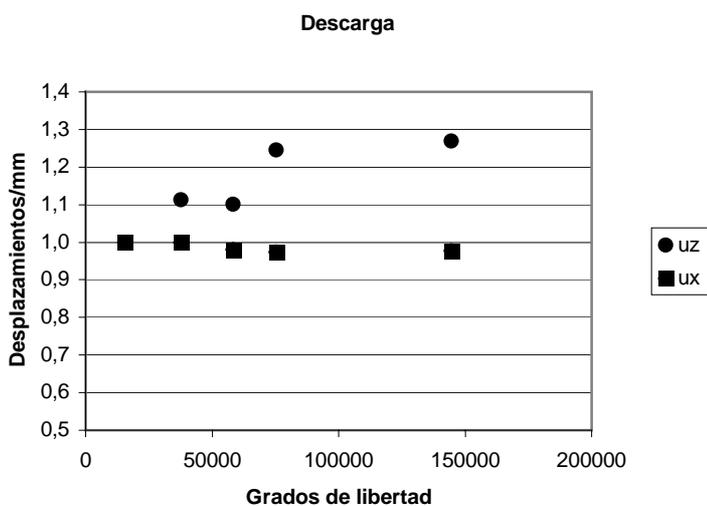


Figura 5.46. Resultados del análisis de convergencia del submodelo tras la descarga. Se muestran los desplazamientos en x y en z en función de los grados de libertad.

Se observa que la tendencia de nuevo es a aumentar los desplazamientos con el número de grados de libertad, ya que aumenta la flexibilidad del modelo como se comentó anteriormente.

Los desplazamientos de los dos modelos más flexibles son bastante parecidos, lo que indica que serían adecuados para la resolución del problema.

A continuación se muestra el tiempo de resolución para las diferentes mallas. De nuevo hay que hacer notar que este tiempo es orientativo ya que no se ha podido asegurar que el estado del ordenador en el que se han medido fuera el mismo para cada resolución.

GDL	Tiempo/(min)	Tipo de elemento
15402	2,02	lineal
37719	10	lineal
58305	39,46	parabólico
75264	60,51	lineal
144486	247,81	parabólico

Tabla 5.6. Tiempo de resolución para el análisis de convergencia del submodelo en función del número de grados de libertad (GDL) y del tipo de elemento.

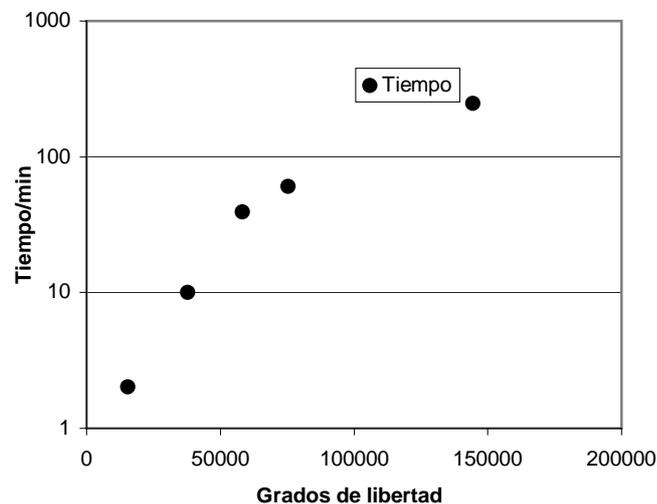


Figura 5.9. Tiempo de resolución del proceso de montaje, carga y descarga del submodelo en función del número de grados de libertad.

Aun siendo orientativos los tiempos de resolución, se observa la clara tendencia a aumentar de manera casi exponencial con el número de grados de libertad.

Dado que las dos mallas más flexibles proporcionaban valores similares de desplazamientos se ha optado por utilizar en el proceso de optimización la malla de 75264 grados de libertad al ser la de menor tiempo de resolución de las dos.

5.4. Proceso de optimización.

Para el proceso de optimización se aplica sólo el primer ciclo de carga. De esta forma se reduce el tiempo de resolución, ya que introducir otro ciclo de carga implicaría

aproximadamente el doble de tiempo de resolución. Esto trae consigo un problema que es la diferencia existente entre la solución en el primer ciclo de carga y los restantes.

En la siguiente figura se muestran los desplazamientos de dos nodos que se encuentran inicialmente enfrentados, uno del eje y otro del cubo. Ambos están en el borde del contacto. De este modo se observa tanto los desplazamientos de dichos nodos como el deslizamiento relativo en dicha zona.

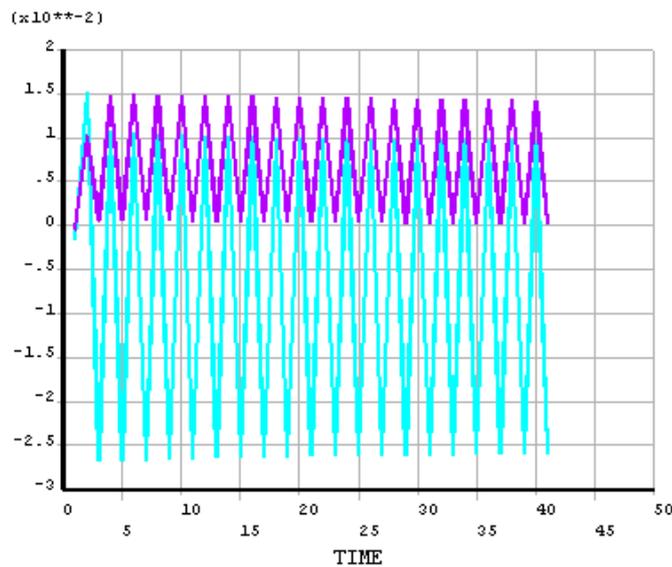


Figura 5.47. Desplazamientos axiales (u_x) de dos nodos del eje y del cubo del borde del contacto inicialmente enfrentados.

Se aprecia cómo a partir del primer ciclo de carga en el cubo y a partir del sexto aproximadamente en el eje se produce la estabilización de los resultados. Dado que para el proceso de optimización se busca la tendencia de la solución con el cambio de los parámetros, y no la solución absoluta del problema, y que la solución obtenida con el primer ciclo no varía mucho con la obtenida con los ciclos restantes, se puede realizar la optimización aplicando únicamente el primer ciclo de carga.

Los parámetros usados para el proceso de optimización son la relación entre el diámetro del eje en el ajuste y el nominal $d_{eje}^{ajuste} / d_{eje}^{nom}$; la interferencia, δ ; el radio de acuerdo entre secciones del eje, r ; y el radio de acuerdo en el cubo, r_{cubo} . El resto de dimensiones son las nominales.

La optimización busca maximizar la resistencia a fatiga del sistema y por tanto minimizar el parámetro SWT. Además debe mantenerse unas relaciones y unos límites en las variables de diseño que se muestran a continuación.

Función objetivo.

Minimizar parámetro SWT.

Restricciones.

$$\left(d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}} - 1\right) \frac{d_{\text{eje}}^{\text{nom}}}{2} - r \leq 0$$

$$1.01 \leq d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}} \leq 1.2$$

$$30 \cdot 10^{-3} \leq \delta / \mu\text{m} \leq 80 \cdot 10^{-3}$$

$$7.5 \leq r/\text{mm} \leq 15$$

$$1 \leq r_{\text{cubo}}/\text{mm} \leq 6$$

El estimado inicial para la optimización es el dado por los siguientes valores de las variables de diseño.

Variable	$d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}}$	$\delta / \mu\text{m}$	r / mm	$r_{\text{cubo}} / \text{mm}$
Valor/mm	1.05	50	8	2.5
Vida/ciclos	$1.8 \cdot 10^4$			

Tabla 5.10. Valores de partida para la optimización

Al comenzar la optimización se observa que la sensibilidad de la solución a variaciones en la relación de diámetros $d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}}$ e interferencia δ es mucho mayor que la que tiene a variaciones del radio de acuerdo en el eje r y en el cubo r_{cubo} . Esto implica que la dirección de búsqueda tienda a cambiar únicamente en la relación de diámetros y la interferencia. Por ello, y para economizar tiempo de resolución se ha realizado una primera optimización con dos variables de diseño $d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}}$ y δ .

Los parámetros de optimización que se han empleado en este algoritmo son en primer lugar un valor inicial del parámetro de penalización λ de $1 \cdot 10^{-2}$ que junto al exponente de $a=1/2$ y a la constante multiplicativa de $C=2$ generan un valor del parámetro de transición $\varepsilon=-0.2$ según la ecuación (3.4.12) dada por Haftka y Starnes [16]. Los resultados de esta optimización, para ambos algoritmos de primer y de segundo orden, son los siguientes:

Variable	Algoritmo de 1 ^{er} orden				Algoritmo de 2 ^o orden			
	$d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}}$	$\delta / \mu\text{m}$	r / mm	$r_{\text{cubo}} / \text{mm}$	$d_{\text{eje}}^{\text{ajuste}} / d_{\text{eje}}^{\text{nom}}$	$\delta / \mu\text{m}$	r / mm	$r_{\text{cubo}} / \text{mm}$
Valor/mm	1.2	38.39	8	2.5	1.2	38.61	8	2.5
Iteraciones	9				9			
Vida/ciclos	$7.8 \cdot 10^8$				$7.8 \cdot 10^8$			

Tabla 5.11. Valores del óptimo tras la primera optimización.

La interferencia óptima ha tomado un valor bajo pero no el mínimo del intervalo impuesto. En la fatiga por fretting que se da en este tipo de acoplamientos hay dos factores que influyen. Uno son las tensiones de compresión que aplica el cubo sobre el eje, así como las elevadas tensiones tangenciales que se producen en el borde del contacto. Otro es el deslizamiento relativo entre las superficies. Es lógico que al disminuir la interferencia aumenta el deslizamiento relativo, pero a su vez disminuyen las tensiones tangenciales en el borde del contacto. Estos dos factores opuestos parecen haber encontrado un óptimo en el valor que se obtiene para la interferencia en el proceso de optimización. De hecho la interferencia obtenida es muy cercana a la mínima que mantiene el cubo y el eje en contacto en la zona crítica. De ser algo menor la interferencia, se produciría la separación de ambas superficies y por tanto unos mayores deslizamientos.

Respecto a la relación de diámetros del eje óptima, ésta se encuentra en el límite superior impuesto. Esto implica que cuanto mayor sea la sección del eje en la zona de contacto mejor será su comportamiento a fatiga por fretting en la zona estudiada (borde del contacto). Esto se debe a dos factores que son el aumento de rigidez del eje en la zona de contacto al aumentar su sección y el alejamiento de la zona crítica de las líneas de tensión axial que recorren el eje.

A continuación, partiendo de la solución de esta primera optimización se ha realizado una segunda, en la que las variables de diseño de la optimización pasan a ser r y r_{cubo} mientras que tanto la relación de diámetros y la interferencia permanecen con los valores obtenidos en la primera optimización. Los resultados de esta segunda optimización son:

	<i>Algoritmo de 1^{er} orden</i>				<i>Algoritmo de 2^o orden</i>			
<i>Variable</i>	$d_{eje}^{ajuste} / d_{eje}^{nom}$	$\delta/\mu m$	r/mm	r_{cubo}/mm	$d_{eje}^{ajuste} / d_{eje}^{nom}$	$\delta/\mu m$	r/mm	r_{cubo}/mm
<i>Valor/mm</i>	1.2	38.39	7.5	1	1.2	38.61	7.5	1
<i>Iteraciones</i>	5				5			
<i>Vida/ciclos</i>	$17.5 \cdot 10^8$				$17.5 \cdot 10^8$			

Tabla 5.12. Valores del óptimo tras la segunda optimización.

El radio de acuerdo óptimo en el eje es el límite inferior impuesto. Esta tendencia a reducir el radio de acuerdo se debe a que de esta manera se consiguen alejar las líneas de tensión axial de la zona crítica. Al ser esta tensión axial la más influyente en la fatiga se

consigue aumentar la resistencia en el borde del contacto reduciendo el radio de acuerdo en el eje.

Respecto al radio de acuerdo del cubo óptimo, éste es el límite inferior impuesto. La tendencia a disminuir este radio se debe a que de esta manera se separa el problema de fretting en el borde del contacto de la influencia de la flexión. Esta separación se produce porque al disminuir el radio, el borde del contacto se desplaza a una zona que cuenta con menores tensiones.

5.5. Análisis de sensibilidad en el óptimo.

Para conocer la evolución de la resistencia para valores de las variables de diseño en torno al óptimo se ha realizado un análisis de sensibilidad. Para ello se han ido variando un 10% las variables de diseño. El único parámetro variado por exceso y por defecto es la interferencia. Los demás, al estar en el límite de la región factible, se han variado en una única dirección. El resultado del análisis de sensibilidad se muestra en la siguiente tabla:

Parámetro	$d_{eje}^{ajuste} / d_{eje}^{nom}$	$\delta / \mu m$	r / mm	r_{cubo} / mm	Vida/ciclos
Óptimo	1.2	38.39	7.5	1	$17.5 \cdot 10^8$
90% $d_{eje}^{ajuste} / d_{eje}^{nom}$	1.08	38.39	7.5	1	$4.8 \cdot 10^6$
90% δ	1.2	34.55	7.5	1	$12.3 \cdot 10^8$
110% δ	1.2	42.23	7.5	1	$23.12 \cdot 10^8$
110% r	1.2	38.39	8.25	1	$14.12 \cdot 10^8$
110% r_{cubo}	1.2	38.39	7.5	1.1	$15.47 \cdot 10^8$

Tabla 5.13. Análisis de sensibilidad en torno al óptimo.