ANEXO

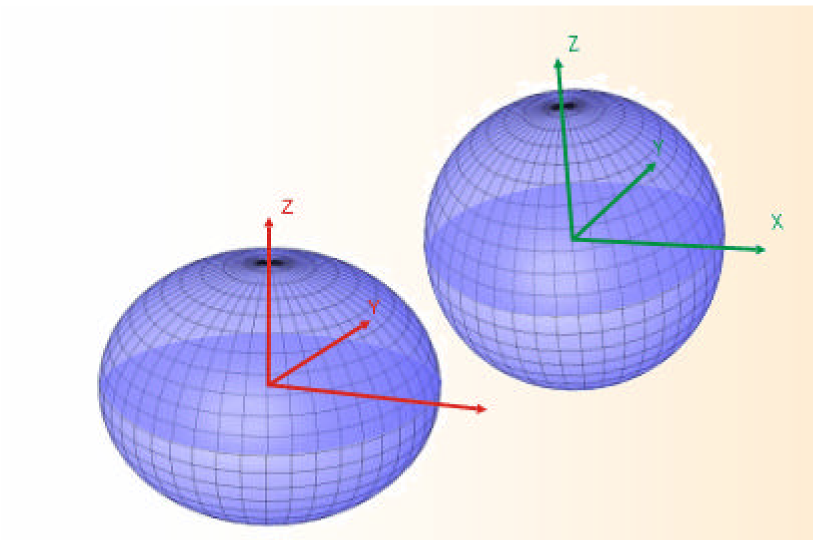
Índice

1. Transformación datum

Como es sabido, la Tierra no es redonda sino que se encuentra un poco achatada por los polos, debido a esto es necesario buscar modelos matemáticos para idealizar la forma de la Tierra y para ello se usan geoides.

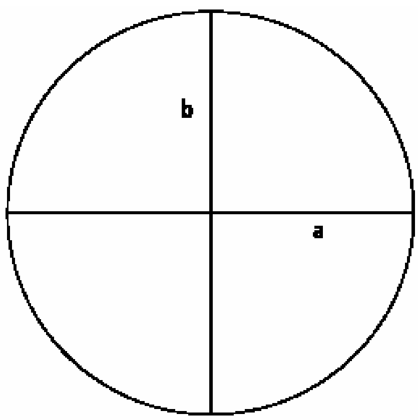
//Cambiar de geoide a elipsoide

Según la zona de la Tierra a idealizar se utiliza un geoide u otro, por lo que unas coordenadas de lat/lon referidas en un geoide no coinciden con la lat/lon en otro geoide.



Los parámetros usados para definir un geoide son:

$$b = a(1-f)$$
$$f = \frac{1}{298.257223563}$$
$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$
$$e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}$$



Donde *a* es el semieje mayor, *b* el semieje menor, *f* el factor de achatamiento y *e/é* son la primera y segunda excentricidad.

El sistema GPS utiliza el geoide WGS84, por lo que todos los datos de lat/lon recibidos están referidos a este geoide.

Los datos de este geoide son:

a: 6378137

f: 0.00335281066474748

Por otra parte los mapas donde se representarán los datos están hechos referidos a un geoide en concreto, por lo que si se representa directamente los datos obtenidos por el GPS, si el geoide usado por el mapa no es el WGS84, se estará incurriendo en un error de posicionamiento siendo apreciable o no según la diferencia existente entre los geoides.

El paso de parámetros de un geoide a otro es lo que se conoce como transformación datum, esta transformación puede ser desde un simple ajuste de lat/lon a otros sistemas más sofisticados, entre los más conocidos se tienen el algoritmo de Molodensky de 3 parámetros y el algoritmo de Bursa-Wolf de 7 parámetros

1.1. Transformación de Molodensky (3 parámetros)

En el caso de tener conocimiento de 3 parámetros (ΔX, ΔY, ΔZ) podemos utilizar la transformación de Molodensky para realizar la transformación datum.

Las ecuaciones de Molodensky son:

$$\Delta \phi = [-\Delta X \sin\phi \cos\lambda - \Delta Y \sin\phi \sin\lambda + \Delta Z \cos\phi + (f \quad \Delta a + a \quad \Delta f) \sin 2\phi\ ] / \rho$$

$$\Delta \lambda = (-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda\ ) / (\nu \cos\phi\ )$$

Donde λ,ϕ son longitud y latitud en radianes

Δa es la diferencia entre (a'-a) los semiejes mayores de los elipsoides

ρ y ν son parámetro del elipsoide origen (WGS84)

Una vez obtenido los incrementos correspondientes los nuevos valores de lon/lat pero ya referido al elipsoide del mapa donde se representarán los datos son:

$$\phi'=\phi+\Delta\phi$$

$$\lambda'=\lambda+\Delta\lambda$$

Los parámetros del elipsoide WGS84 son:

a: 6378137.000

1/f: 298.257224

ν es el radio de curvatura en el primer vertical a la latitud ϕ, donde

$$\upsilon = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

ρ es el radio de curvatura del meridiano en la latitud ϕ,donde

$$\rho = a\ (1-e^2)/(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}$$

1.2. Transformación de Bursa-Wolf

La transformación de Bursa-Wolf está basada en 7 parámetros, tres de desplazamiento (ΔX, ΔY, ΔZ) , los tres giros de cada eje en cartesianas(R_X, R_Y, R_Z) y un parámetro de escala *e*

Versión Bursa-Wolf

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1+e) \cdot \begin{bmatrix} 1 & Rz & -Ry \\ -Rz & 1 & Rx \\ Ry & -Rx & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Coordenadas Datum Destino

Coordenadas Datum Origen

Donde:

$$\left.\begin{matrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{matrix}\right\} \text{Términos de Traslación} \qquad \left.\begin{matrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{matrix}\right\} \text{Términos de Rotación} \qquad e = \text{Factor de Escala}$$

El paso de lat/lon a coordenadas cartesianas se realiza con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} X &= (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ Y &= (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ Z &= (\frac{b^2}{a^2}N+h)\sin\varphi \end{aligned}$$

Los datos geodésicos son φ, λ y h. Al trabajar en 2D este último parámetro que es la altura se toma como 0.

Donde N es el radio de curvatura anteriormente definido con la letra ν

Una vez obtenido los nuevos valores en cartesiano del punto, los pasamos nuevamente a coordenadas geodésicas:

$$\lambda = \arctan\frac{Y}{X}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Z + e'^2 b \sin^3\theta}{p - e^2 a \cos^3\theta}$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{Za}{pb}$$

2. Sistema Mercator

La proyección de Mercator es una proyección geográfica ideada por Gerardus Mercator en 1569. La idea de Mercator responde a las exigencias matemáticas de la proyección cilíndrica. La característica más destacable de esta proyección es que tanto los meridianos como los paralelos son líneas rectas y se cortan perpendicularmente. Los meridianos son líneas rectas paralelas entre sí dispuestas verticalmente a la misma distancia unos de otros. Los paralelos son líneas rectas paralelas entre sí dispuestas horizontalmente pero aumentando la escala a medida que nos alejamos de la línea del ecuador. Este aumento de escala hace que no sea posible representar en el mapa las latitudes por encima de los 80º. Obsérvese también que la isla de Groenlandia aparece casi tan grande como América del Norte y más grande que América del Sur.

El éxito de la proyección de Mercator se debe a que cualquier línea recta que se trace marca el rumbo real, con lo cual se puede navegar siguiendo con la brújula el ángulo que se marca en el mapa. A esta línea de rumbo se llama loxodrómica.

Las ecuaciones son:

$$K_o=\cos \varphi_1/(1-e^2\sin^2 \varphi_1)^{0.5}$$

$$E=FE + a\,K_o\,(\lambda-\lambda_o)$$

$$N=FN+ a\,K_o\ln\{ \tan(\pi/4 + \varphi /2)[(1-e\sin\varphi) /(1+e\sin\varphi)]^{(e/2)}\}$$

En donde Y = N y X=E, ambos datos obtenidos en metros

FE es el falso este.

FN es el falso norte.

λ_o es la longitud de origen

φ_1 es la latitud media

Las ecuaciones de reversión son

$$\varphi = \chi + (e^2/2 + 5e^4/24 + e^6/12 + 13e^8/360)\sin(2\chi) + (7e^4/48 + 29e^6/240 + 811e^8/11520)\sin(4\chi) + (7e^6/120 + 81e^8/1120)\sin(6\chi) + (4279e^8/161280)\sin(8\chi)$$

$$\chi = \pi/2 - 2\,\mathrm{atan}\,t$$

$$\lambda = [(E - FE)/ak_O] + \lambda_O$$

Donde

$$t = B^{(FN-N)(aK_o)}$$

Siendo B la base del logaritmo natura, 2.7182818….

3. Sistema UTM

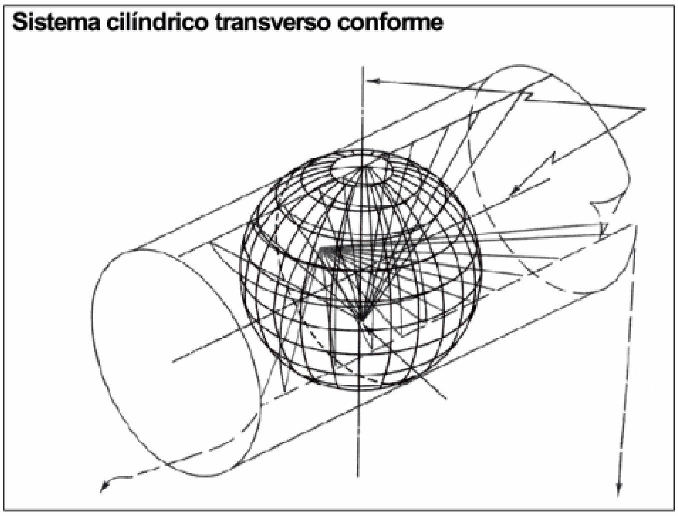
Sistema UTM o proyección Universal Transversal de Mercator

Todas las proyecciones usadas tienen determinadas ventajas y desventajas.

Actualmente, en la construcción de las cartas a mediana y gran escala se utilizan, casi exclusivamente, proyecciones conformes. Las proyecciones conformes son aquellas que conservan los ángulos.

La proyección U.T.M.: es una proyección conforme y es la adoptada por la mayoría de los países del mundo.

En Principio, la Proyección U.T.M. es un sistema cilíndrico transverso conforme, tangente al globo terráqueo a lo largo de un meridiano, que se elige como meridiano de origen.



Ahora bien, este sistema, aplicado a grandes extensiones de longitud, hace que nos vayamos alejando del meridiano de tangencia, lo cual causa deformaciones considerables. Por ello, se recurre a subdividir la superficie terrestre en 60 husos o zonas iguales de 6 grados de longitud, con la cual resultan 60 proyecciones iguales, pero cada una con su respectivo meridiano central.

En la proyección UTM tanto los paralelos como los meridianos son líneas curvas Si se proyecta el total del mundo en un plano, la distancia entre los paralelos aumenta a medida que se alejan de la línea del Ecuador hacia los polos, debido a ello la representación cartográfica presenta cerca de los polos una distorsión excesiva, razón por la cual recientemente la UGGI (Unión Geodésica y Geofísica Internacional), dispuso que cada una de las 60 zonas debían acotar su latitud a 84 grados de latitud norte (latitud 84° N) y 80 grados de latitud sur (latitud 80°S).

Para eliminar al máximo la distorsión, cada zona sólo tiene 6° de longitud, luego el meridiano central de la zona está 3°. A ambos lados de este meridiano central la distorsión es mínima

Las ecuaciones son:

$$E = FE + k_O\nu[A + (1 - T + C)A^3/6 + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2)A^5/120]$$

$$N = FN + k_O\{M - M_O + \nu\tan\varphi[A^2/2 + (5 - T + 9C + 4C^2)A^4/24 + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2)A^6/720]\}$$

En este caso el parámetro X es el este e Y el Norte.

Donde:

$$T = \tan^2\varphi$$

$$C = e^2\cos^2\varphi/(1 - e^2)$$

$A = (\lambda - \lambda_O)\cos\varphi$, con λ y λ_o en radianes

$$\nu = a/(1 - e^2\sin^2\varphi)^{0.5}$$

$$M = a[(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 - ....)\varphi - (3e^2/8 + 3e^4/32 + 45e^6/1024 + ...)\sin 2\varphi + (15e^4/256 + 45e^6/1024 + ...)\sin 4\varphi - (35e^6/3072 + ...)\sin 6\varphi + ...]$$

Con φ en radianes y M_o es para φ_o

Para los cálculos λ_o es 0.0, M_o es el meridiano central, en el caso de elegir

automeridiano central se calcula M_o tomando como parámetro φ_o =0.0

Las fórmulas de reversión son

$$\varphi = \varphi_1 - (\nu_1\tan\varphi_1/\rho_1)[D^2/2 - (5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2)D^4/24 + (61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2)D^6/720]$$

$$\lambda = \lambda_O + [D - (1 + 2T_1 + C_1)D^3/6 + (5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2)D^5/120] / \cos\varphi_1$$

Donde :

$$\nu_1 = a/(1 - e^2\sin^2\varphi_1)^{0.5}$$

$$\rho_1 = a(1 - e^2)/(1 - e^2\sin^2\varphi_1)^{1.5}$$

$$\varphi_1 = \mu_1 + (3e_1/2 - 27e_1^3/32 + ...)\sin 2\mu_1 + (21e_1^2/16 - 55e_1^4/32 + ...)\sin 4\mu_1 + (151e_1^3/96 + ...)\sin 6\mu_1 + (1097e_1^4/512 - ....)\sin 8\mu_1 + ...$$

$$e_1 = [1 - (1 - e^2)^{0.5}]/[1 + (1 - e^2)^{0.5}]$$

$$\mu_1 = M_1/[a(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256 - ....)]$$

$$M_1 = M_O + (N - FN)/k_0$$

$$T_1 = \tan^2\varphi_1$$

$$C_1 = e'^2\cos^2\varphi_1$$

$$e'^2 = e^2/(1 - e^2)$$

$$D = (E - FE)/(\nu_1 k_O)$$