

**Modelado de un filamento no lineal
mediante el formalismo de Cosserat ;
análisis de bifurcaciones estacionarias.**

GREGORIO MARÍN MALLO

Proyecto Fin de Carrera

Ingeniería Industrial

Sevilla, Mayo de 2006

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Pandeo de un elemento unidimensional de sección constante sometido a su propio peso	1
1.2. Objetivos del proyecto	3
2. Obtención de ecuaciones	5
2.1. Ecuaciones de Kirchhoff-Love	5
2.2. Adimensionalización de ecuaciones	14
2.3. Desarrollo de las ecuaciones	17
2.4. Desarrollo de ecuaciones en estática	23
3. Continuación numérica de las ecuaciones	31
3.1. Fundamento de la continuación numérica	31
3.2. Funcionamiento de AUTO2000	34
3.3. Continuación numérica de parámetros	40
3.3.1. Continuación en longitud (l)	46
3.3.2. Continuación en gravedad (g), densidad (ρ) y módulo de Young (E)	59
3.4. Continuación numérica en una carga puntual	68
3.5. Continuación numérica con diferentes secciones	71
3.5.1. Función 'bp'	72
3.5.2. Diagramas de bifurcación y soluciones en el espacio real	77
4. Material no lineal	125
4.1. Ecuaciones momento-curvatura no lineales	125
4.2. Implementación del método de Newton	126
4.3. Continuación numérica con material no lineal	129
4.3.1. Diagramas de bifurcación y soluciones en el espacio real	130

5. Conclusiones	171
A. Problema estático del filamento	175
B. Curvaturas en función de los momentos	187

Índice de figuras

1.1. Experimento desarrollado por el grupo de Mullin con un cable de cortina	3
2.1. Esquema del problema	5
2.2. Sistemas de referencia	6
2.3. Fuerzas existentes en una sección del filamento	8
2.4. Fuerzas sobre una sección del filamento para el equilibrio de momentos	9
2.5. Elemento diferencial de la sección del filamento	10
2.6. Sección del filamento vista de perfil	10
2.7. Referencias geométricas en una sección del filamento	11
3.1. Pantalla obtenida al cargar el programa auto	39
3.2. Esquema de una sección	45
3.3. Ejecución de la continuación en longitud	52
3.4. Rama 1 de la continuación en longitud	54
3.5. Resultado de la ejecución del cambio de rama	56
3.6. Rama 2 de la continuación en longitud	57
3.7. Ramas 1 y 2 de la continuación en longitud	58
3.8. Ejecución de la continuación en gravedad	61
3.9. Ejecución de la continuación en densidad	64
3.10. Ejecución de la continuación en Módulo de Young	67
3.11. Esquema del problema con la carga puntual	68
3.12. Ejecución de la continuación en la carga puntual	70
3.13. Función bp frente a la longitud (sección 1)	73
3.14. Función bp frente a la longitud (sección 2)	74
3.15. Función bp frente a la longitud (sección 3)	75
3.16. Función bp frente a la longitud	76
3.17. Función bp frente a la longitud (sección 5)	76
3.18. Esquema de una sección	80
3.19. Máximo de x_1 frente a la longitud	84

3.20. Máximo de x_2 frente a la longitud	85
3.21. Deformación en la dirección x_1 (primer modo)	87
3.22. Deformación en la dirección x_2 (primer modo)	87
3.23. Deformación en dirección x_1 (segundo modo)	89
3.24. Deformación en dirección x_2 (segundo modo)	89
3.25. Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 2)	95
3.26. Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 2)	95
3.27. Deformación en dirección x_1 (primer modo)	97
3.28. Deformación en dirección x_2 (primer modo)	97
3.29. Deformación en dirección x_1 (segundo modo)	98
3.30. Deformación en dirección x_2 (segundo modo)	99
3.31. Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 3)	104
3.32. Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 3)	104
3.33. Deformación en dirección x_1 (primer modo)	105
3.34. Deformación en dirección x_2 (primer modo)	106
3.35. Deformación en dirección x_1 (segundo modo)	107
3.36. Deformación en dirección x_2 (segundo modo)	107
3.37. Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 4)	111
3.38. Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 4)	112
3.39. Deformación en dirección x_1 (primer modo)	113
3.40. Deformación en dirección x_2 (primer modo)	113
3.41. Deformación en dirección x_1 (segundo modo)	114
3.42. Deformación en dirección x_2 (segundo modo)	115
3.43. Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 5)	119
3.44. Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 5)	119
3.45. Deformación en dirección x_1 (primer modo)	120
3.46. Deformación en dirección x_2 (primer modo)	121
3.47. Deformación en dirección x_1 (segundo modo)	122
3.48. Deformación en dirección x_2 (segundo modo)	122
4.1. Máximo de x_1 en $N=0.1$	134
4.2. Máximo de x_2 en $N=0.1$	135
4.3. Deformación en dirección x_1 para $N=0.1$	137
4.4. Deformación en dirección x_2 para $N=0.1$	137
4.5. Máximo de x_1 en $N=0.516$	141
4.6. Máximo de x_2 en $N=0.516$	141
4.7. Deformación en dirección x_1 para $N=0.516$	143
4.8. Deformación en dirección x_2 para $N=0.516$	143
4.9. Máximo de x_1 en $N=1.048$	147
4.10. Máximo de x_2 en $N=1.048$	147
4.11. Deformación en dirección x_1 para $N=1.048$	149

4.12. Deformación en dirección x2 para N=1.048	149
4.13. Máximo de x1 en N=10.262	153
4.14. Máximo de x2 en N=10.262	153
4.15. Deformación en dirección x1 para N=10.262	155
4.16. Deformación en dirección x2 para N=10.262	155
4.17. Máximo de x1 para continuación en 'N'	157
4.18. Máximo de x2 para continuación en 'N'	157
4.19. Máximo de x1 en N=0.732580	160
4.20. Máximo de x2 en N=0.732580	161
4.21. Deformación en dirección x1 para N=0.732580	163
4.22. Deformación en dirección x2 para N=0.732580	163
4.23. Máximo de x1 en N=17.0673	167
4.24. Máximo de x2 en N=17.0673	167
4.25. Deformación en dirección x1 para N=17.0673	169
4.26. Deformación en dirección x2 para N=17.0673	170

Capítulo 1

Introducción

1.1. Pandeo de un elemento unidimensional de sección constante sometido a su propio peso

Cuando tenemos un elemento unidimensional de sección constante de una determinada longitud y una cierta rigidez, como puede ser un cable de plástico, que se encuentra en posición vertical y restringido en su extremo inferior a unas condiciones de contorno, como pueden ser las de empotramiento en una base, podemos ir incrementándole la longitud poco a poco hasta que llegue un momento en el que debido a la acción de la gravedad pierda la estabilidad y se empiece a doblar. Este fenómeno es el que se conoce como pandeo y en base a él vamos a ir haciendo distintas pruebas en este proyecto.

Para poder predecir la longitud crítica a partir de la cual se produce el pandeo tenemos la Teoría de Euler, la cual mediante una fórmula permite despejar la longitud de pandeo en función de las condiciones de contorno, de las propiedades de la sección, y de la carga que actúe en el elemento. Lo que ocurre es que esta teoría no es del todo exacta porque para su desarrollo se hicieron una serie de hipótesis que no tienen por qué cumplirse siempre.

En 1881 Alfred G. Greenhill dio una importante contribución con el estudio que realizó de la mayor longitud que un cilindro podía alcanzar antes de que se doblara debido a su propio peso. En el estudio determinó la máxima altura que podía tener una pértiga de salto, y también determinó la máxima altura a la que podía crecer un árbol de unas proporciones dadas.

Existen programas que hacen cálculos mediante el método de los elemen-

tos finitos con los que podemos resolver el problema que estamos planteando de un elemento longitudinal empotrado en un extremo y sometido a su propio peso, y obtener todas las incógnitas como son los desplazamientos, fuerzas, momentos...Mediante esta resolución podemos saber si con los datos que hemos introducido se ha producido el pandeo por los valores obtenidos de los desplazamientos, pero estos programas no pueden hacer por sí mismos un proceso iterativo que detecte el valor de la longitud a partir del que se produce el pandeo.

Cuando un elemento, sometido a unas condiciones determinadas, pierde la estabilidad debido a una perturbación como puede ser un aumento de la longitud y comienza a pandear, es posible actuar sobre el sistema y hacer que dicho elemento recupere su estado de equilibrio estable. Cabe la posibilidad de introducirle al sistema un movimiento vertical sinusoidal paramétrico de una cierta amplitud e ir probando para distintas frecuencias cada vez mayores hasta que el elemento vuelva a la situación de estabilidad. En 1908 Stephenson probó que se podía mantener un péndulo en posición vertical invertida si se le aplicaba un movimiento vertical sinusoidal de pequeña amplitud y alta frecuencia. En 1993 Acheson y Mullin demostraron que una cadena formada por un número N de péndulos podía estabilizarse en la posición vertical invertida con un movimiento vertical sinusoidal de una frecuencia bastante alta. Mullin demostró mediante experimentos que la estabilidad es remarcadamente robusta incluso para perturbaciones bastante grandes. Pero desafortunadamente, cuando el sistema de péndulos se asemejaba a una cuerda, que es cuando el número N de péndulos tendía a infinito, la frecuencia que había que aplicar también tendía a infinito. Sin embargo, en 1998 Acheson y Mullin probaron que una cuerda con cierta rigidez a flexión, como es la legendaria 'Indian wire trick', se podía estabilizar en la posición vertical recta con una frecuencia finita. Pero sobre esto no se publicó ninguna teoría ni ningún resultado experimental.

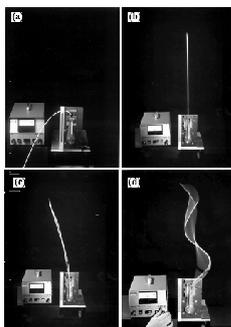


Figura 1.1: Experimento desarrollado por el grupo de Mullin con un cable de cortina

En el presente proyecto se va a hacer, mediante continuación numérica, el estudio en estático de la inestabilidad por pandeo de un filamento con una sección y longitud determinadas, que estando empotrado en un soporte, se encuentra únicamente sometido a su propio peso. La parte dinámica correspondiente a la recuperación de la estabilidad por la introducción de movimientos de excitación paramétrica en el soporte del filamento no se va a abordar debido a la complejidad que supone su estudio mediante continuación numérica.

1.2. Objetivos del proyecto

El presente proyecto va a consistir en la realización de diferentes continuaciones numéricas que se van a ir haciendo para estudiar la estabilidad de un sistema compuesto de un filamento en posición vertical que está empotrado a un soporte que vamos a considerar que no tiene movimiento. Estas continuaciones se harán en diferentes condiciones pero siempre en estática.

Los principales objetivos del proyecto los citamos a continuación:

- Obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema de forma analítica y definir las condiciones de contorno.
- Obtener unas condiciones iniciales que cumplan las ecuaciones del sistema y nos sirvan como punto de partida de las continuaciones numéricas.

- Aprender el manejo del software de continuación numérica AUTO2000, que va a ser el que vamos a emplear a lo largo de todo el proyecto. Mediante este software de continuación numérica que hemos escogido, estudiar la estabilidad del sistema con la variación de diferentes parámetros relativos a la geometría y a las propiedades del material en condiciones estáticas. Una vez hecho el estudio de continuación numérica, comparar los resultados obtenidos con los que se obtienen de la fórmula teórica.
- Comprobar, mediante el software de continuación numérica, que los resultados también son coherentes cuando se considera una carga puntual en el extremo como parámetro de continuación.
- Mediante el software de continuación numérica, estudiar la estabilidad en condiciones estáticas con la variación de un parámetro en diferentes condiciones de geometría relativas a la sección del filamento.
- Hacer el estudio de la estabilidad del sistema en condiciones estáticas, mediante continuación numérica, cuando el material presenta un comportamiento no lineal.

Capítulo 2

Obtención de ecuaciones

2.1. Ecuaciones de Kirchhoff-Love de una viga 3D

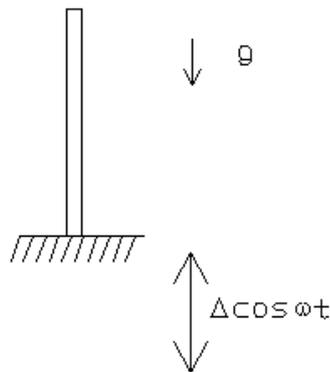
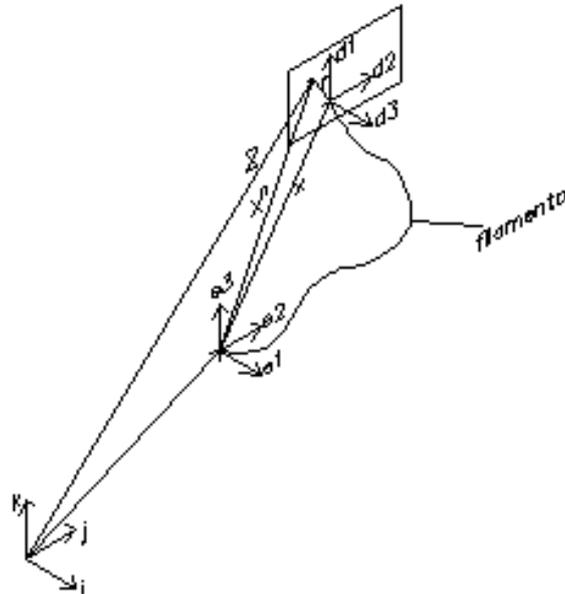


Figura 2.1: Esquema del problema

El problema que tenemos que modelar es el de un sistema dinámico formado por un filamento de unas dimensiones determinadas que se encuentra con el extremo inferior empotrado en una base que tiene un movimiento vertical sinusoidal paramétrico, con el extremo superior libre, y que está sometido únicamente a su propio peso. Para ello tendremos que empezar planteando las ecuaciones que van a definir el problema. El sistema de referencia que tenemos para el filamento se muestra en el siguiente dibujo:



3.pdf

Figura 2.2: Sistemas de referencia

Para deducir las ecuaciones que van a modelar el problema vamos a describir el filamento como un elemento unidimensional constituido por su línea media donde cada punto de dicha línea tiene asociado una sección del filamento.

El sistema de referencia que tenemos para definir el problema consta de un triedro fijo de referencia, de otro triedro de referencia móvil al que va unido el extremo inferior del cable en el origen y por tanto se va a mover con el triedro, y de un sistema de ejes asociado a cada sección del filamento con el origen en su centro. En el sistema de triedros tenemos un vector que apunta del triedro fijo al móvil, un vector que apunta del triedro móvil al triedro de una sección genérica, y un vector que apunta desde cada uno de los tres triedros a un punto genérico de la sección genérica. El vector \underline{d}_3 del triedro asociado a la sección tiene la dirección tangente a la línea media del filamento, estando los otros dos vectores contenidos en el plano definido por la sección.

La notación que vamos a emplear es la siguiente:

$\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: Son los ejes del triedro fijo de referencia.

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$: Son los ejes del triedro móvil de referencia al que va unido el extremo empotrado del filamento.

$\{\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3\}$: Son los ejes del triedro asociado a cada sección del filamento. Este sistema es el llamado triedro de Cosserat.

\underline{X} : Es el vector que va desde el triedro fijo de referencia hasta un punto genérico de una sección del filamento.

\underline{P} : Es el vector que va desde el triedro fijo de referencia hasta el triedro móvil de referencia.

\underline{X}^m : Es el vector que va desde el triedro móvil de referencia hasta un punto genérico de una sección del filamento.

$\underline{x}(s, t)$: Es el vector que va desde el triedro móvil de referencia hasta el centro de una sección del filamento. Este vector es función del parámetro 's', que es el que mide la longitud sobre la línea media del filamento, y del parámetro 't', que es el tiempo.

\underline{r} : Es el vector que va desde el centro de una sección del filamento hasta un punto genérico de la misma sección.

Tenemos las siguiente relaciones entre los vectores:

$$\underline{X}^m = \underline{x}(s, t) + \underline{r} ,$$

$$\underline{r} = \xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2 ,$$

$$\underline{X}^m = \underline{x}(s, t) + \xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2 ,$$

$$\underline{X} = \underline{X}^m + \underline{P} ,$$

$$\underline{P} = \Delta \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} .$$

Tenemos que ξ_1 y ξ_2 son las coordenadas del punto genérico de la sección en los ejes \underline{d}_1 y \underline{d}_2 respectivamente.

El vector \underline{P} lo consideramos un vector que produce un movimiento vertical sinusoidal paramétrico en la base del filamento unida al sistema de referencia móvil $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

$$\underline{X} = \underline{X}^m + \Delta \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} ,$$

$$\underline{X} = \underline{x}(s, t) + \xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2 + \Delta \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} .$$

Una vez que tenemos definida la referencia geométrica, vamos a obtener las ecuaciones que definen nuestro sistema.

Hacemos un equilibrio de las fuerzas que actúan en una sección:

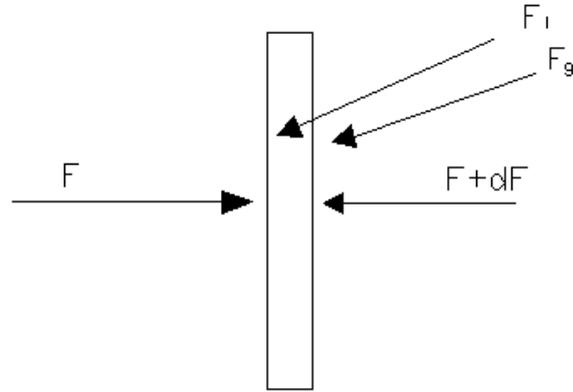


Figura 2.3: Fuerzas existentes en una sección del filamento

La notación que vamos a emplear para las derivadas es la siguiente:

$$\dot{\quad} = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$' = \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\left(\underline{F} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial s} \cdot ds\right) - \underline{F} = \underline{F}_I + \underline{F}_g \quad ,$$

$\underline{F} = \int_{S(s)} \underline{f}(\xi_1, \xi_2) \cdot dS$, donde \underline{F} es la resultante de esfuerzos internos sobre la sección.

$\underline{F}_I = \int \rho \cdot ds \cdot \ddot{\underline{X}} \cdot dS$, donde \underline{F}_I es la resultante de las fuerzas de inercia.

$\underline{F}_g = \rho \cdot A_s \cdot ds \cdot g \cdot \underline{k}$, donde \underline{F}_g es la resultante de las fuerzas de gravedad.

Sustituyendo:

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial s} \cdot ds - \rho \cdot A_s \cdot ds \cdot g \cdot \underline{k} = \rho \cdot ds \cdot \int_{S(s)} \ddot{\underline{X}} \cdot dS \quad .$$

Desarrollando la integral:

$$\begin{aligned} \int_{S(s)} \ddot{\underline{X}}(s, \xi_1, \xi_2, t) \cdot dS &= \int_{S(s)} \left(\ddot{\underline{x}}(s, t) + \xi_1 \cdot \ddot{\underline{d}}_1 + \xi_2 \cdot \ddot{\underline{d}}_2 - \Delta \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} \right) \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 = \\ &= A_s \cdot \ddot{\underline{x}}(s, t) - \Delta \cdot \omega_0^2 \cdot A_s \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} . \end{aligned}$$

La ecuación queda:

$$\underline{F}' \cdot ds - \rho \cdot A_s \cdot ds \cdot g \cdot \underline{k} = \rho \cdot ds \cdot A_s \cdot \left(\ddot{\underline{x}}(s, t) - \Delta \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} \right) ,$$

$$\underline{F}' - \rho \cdot A_s \cdot g \cdot \underline{k} = \rho \cdot A_s \cdot \left(\ddot{\underline{x}} - \Delta \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k} \right) .$$

Finalmente llegamos a una ecuación que es la de equilibrio de fuerzas:

$$\underline{F}' = \rho \cdot A_s \cdot [\ddot{\underline{x}} + (g - \Delta \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot \underline{k}] . \quad (1)$$

Ahora hacemos el equilibrio de momentos sobre una sección:

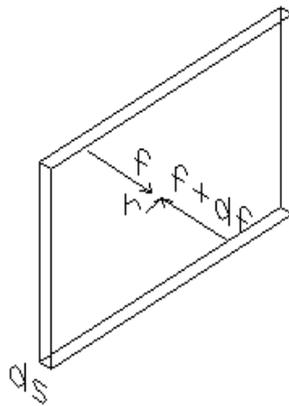


Figura 2.4: Fuerzas sobre una sección del filamento para el equilibrio de momentos

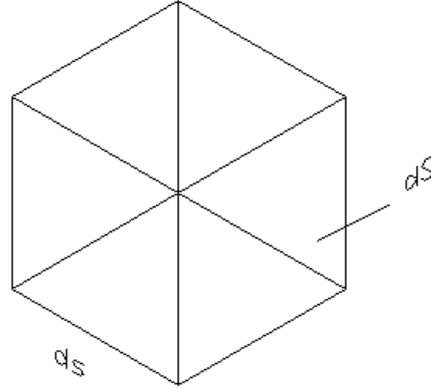


Figura 2.5: Elemento diferencial de la sección del filamento

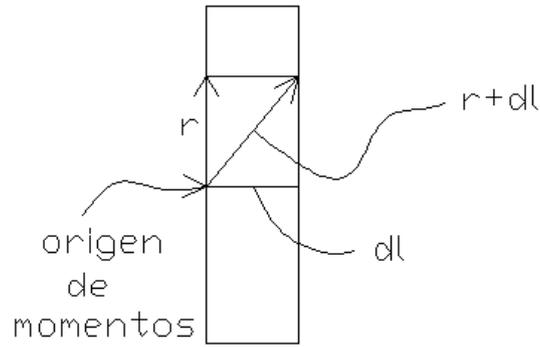


Figura 2.6: Sección del filamento vista de perfil

$$\underline{dl} = \underline{x}(s + ds) - \underline{x}(s) = \underline{x} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \cdot ds - \underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \cdot ds \quad ,$$

$$(\underline{r} + \underline{dl}) \times (\underline{f} + \underline{df}) \cdot dS - \underline{r} \times \underline{f} \cdot dS = \underline{M}_I + \underline{M}_g \quad ,$$

$$\underline{M}_I = \left(\underline{r} + \frac{\underline{dl}}{2} \right) \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \ddot{\underline{X}} \quad ,$$

$$\underline{M}_g = \left(\underline{r} + \frac{\underline{dl}}{2} \right) \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot g \cdot \underline{k} \quad ,$$

$$(\underline{r} + \underline{dl}) \times (\underline{f} + \underline{df}) \cdot dS - \underline{r} \times \underline{f} \cdot dS - \left(\underline{r} + \frac{d\underline{l}}{2} \right) \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \underline{g} \cdot \underline{k} = \left(\underline{r} + \frac{d\underline{l}}{2} \right) \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \ddot{\underline{X}} ,$$

$$\begin{aligned} (\underline{r} \times \underline{df} + \underline{dl} \times \underline{f} + \underline{dl} \times \underline{df}) \cdot dS - \underline{r} \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \underline{g} \cdot \underline{k} - \frac{d\underline{l}}{2} \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \underline{g} \cdot \underline{k} = \underline{r} \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \ddot{\underline{X}} + \\ + \frac{d\underline{l}}{2} \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \ddot{\underline{X}} , \end{aligned}$$

$$\left(\underline{r} \times \frac{\partial \underline{f}}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \cdot ds \times \underline{f} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \cdot ds \times \frac{\partial \underline{f}}{\partial s} \cdot ds \right) \cdot dS - \underline{r} \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \underline{g} \cdot \underline{k} -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \cdot ds \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \underline{g} \cdot \underline{k} = \underline{r} \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \ddot{\underline{X}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \cdot ds \times \rho \cdot ds \cdot dS \cdot \ddot{\underline{X}} ,$$

$$\left[\int_{S(s)} \underline{r} \times \frac{\partial \underline{f}}{\partial s} \cdot dS + \int_{S(s)} \underline{x}' \times \underline{f} \cdot dS - \int_{S(s)} (\underline{r} \times \rho \cdot \underline{g} \cdot \underline{k}) \cdot dS \right] \cdot ds = \int_{S(s)} \underline{r} \times \rho \cdot \ddot{\underline{X}} \cdot dS \cdot ds .$$

Las referencias geométricas para definir un punto dentro de una sección las podemos ver en la siguiente figura:

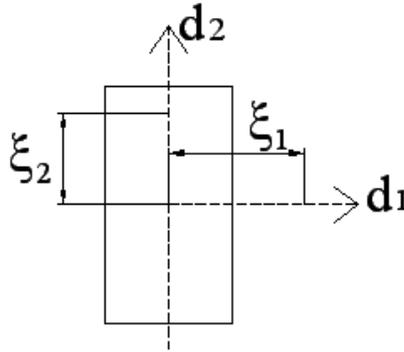


Figura 2.7: Referencias geométricas en una sección del filamento

ξ_1 y ξ_2 son los valores de las coordenadas en el sistema de referencia de una sección en las direcciones \underline{d}_1 y \underline{d}_2 respectivamente.

$$\underline{r} = \xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2 \quad .$$

Definimos el siguiente valor promedio del momento resultante que crean las derivadas de los esfuerzos internos:

$$\underline{M}' = \int_{S(s)} \underline{r} \times \underline{f}'(\xi_1, \xi_2) \cdot dS \quad .$$

Tenemos que:

$$\underline{dl} = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot ds = ds \cdot \underline{d}_3 \rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = \underline{d}_3 \quad ,$$

$$\int_{S(s)} [(\xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2) \times \rho \cdot g \cdot \underline{k}] \cdot dS = 0 \quad .$$

La ecuación cambia a la siguiente forma:

$$\underline{M}' + \underline{d}_3 \times \underline{F} - \int_{S(s)} (\underline{r} \times \rho \cdot g \cdot \underline{k}) \cdot dS = \rho \cdot \int_{S(s)} \left(\underline{r} \times \underline{\ddot{X}} \right) \cdot dS \quad .$$

Desarrollando las integrales por separado:

$$\int_{S(s)} (\underline{r} \times \rho \cdot g \cdot \underline{k}) \cdot dS = \int_{S(s)} [(\xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2) \times \rho \cdot g \cdot \underline{k}] \cdot dS = 0 \quad ,$$

$$\begin{aligned} \int_{S(s)} \left(\underline{r} \times \underline{\ddot{X}} \right) \cdot dS &= \int_{S(s)} [(\xi_1 \cdot \underline{d}_1 + \xi_2 \cdot \underline{d}_2) \times \left(\underline{\ddot{x}} + \xi_1 \cdot \underline{\ddot{d}}_1 + \xi_2 \cdot \underline{\ddot{d}}_2 - \right. \\ & \left. (-\Delta \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \underline{k}) \right] \cdot dS = \int_{S(s)} \left(\xi_1^2 \cdot \underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 \right) \cdot dS + \int_{S(s)} \left(\xi_2^2 \cdot \underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 \right) \cdot dS = \\ &= I_2 \cdot \underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 + I_1 \cdot \underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 \quad , \end{aligned}$$

donde

$$I_2 = \int_{S(s)} \xi_1^2 \cdot dS \quad , \quad I_1 = \int_{S(s)} \xi_2^2 \cdot dS \quad . \quad \text{son los momentos de inercia de la sección.}$$

Llegamos a la ecuación de equilibrio de momentos:

$$\underline{M}' + \underline{d}_3 \times \underline{F} = \rho \cdot \left(I_2 \cdot \underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 + I_1 \cdot \underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 \right) . \quad (2)$$

La siguiente ecuación es la de tangente a la línea media:

$$\underline{x}' = \underline{d}_3 . \quad (3)$$

La evolución del triedro asociado a un punto de la línea media (triedro de Cosserat) con respecto a la longitud de arco 's' viene dada por la siguiente ecuación :

$$\underline{d}_i' = \underline{k} \times \underline{d}_i . \quad (4)$$

donde $\underline{k} = \sum_{i=1}^3 k_i \cdot \underline{d}_i$, siendo cada k_i la curvatura de la línea media alrededor de cada \underline{d}_i , respectivamente. De esta forma k_1 y k_2 son curvaturas de flexión y k_3 es curvatura de torsión.

Por último tenemos la ecuación de comportamiento, que es la siguiente:

$$\sum \underline{M}_i \cdot \underline{d}_i = E \cdot I_1 \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot \underline{d}_1 + E \cdot I_2 \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot \underline{d}_2 + G \cdot J \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot \underline{d}_3 . \quad (5)$$

El material que vamos a tomar es un material viscoelástico [2].

E es el Módulo de Young y γ es la constante de amortiguamiento. Los parámetros G y J se definen de la siguiente manera:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad , \quad J = I_1 + I_2 .$$

2.2. Adimensionalización de ecuaciones

Vamos a trabajar con cantidades adimensionales y para ello hacemos uso de la longitud del filamento ' l ' para adimensionalizar las variables con unidad de longitud y la frecuencia de excitación de la base del filamento ' ω_0 ' para adimensionalizar las variables con unidad de tiempo. Los vectores de fuerzas y de momentos se adimensionalizan con unas constantes ' A ' y ' B ', respectivamente, que habrá que determinar. Las variables adimensionalizadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{s}{l} \quad , \quad \bar{t} = t \cdot \omega_0 \quad , \quad \bar{F} = \frac{F}{A} \quad , \quad \bar{M} = \frac{M}{B} \quad , \quad \bar{x} = \frac{x}{l} \quad , \quad \bar{k} = k \cdot l \quad , \\ \bar{\gamma} &= \gamma \cdot \omega_0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = \omega_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \quad . \end{aligned}$$

A continuación introducimos estas variables en las ecuaciones:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(A \cdot \bar{F} \right) = \rho \cdot A_s \cdot \left[l \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \bar{t}^2} + (g - \Delta \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot \bar{k} \right] .$$

Multiplico ambos miembros por $\frac{1}{\omega_0^2 \cdot l}$ y ya no colocamos las barras encima de las variables adimensionales:

$$\frac{A}{l^2 \cdot \omega_0^2} \cdot \underline{F}' = \rho \cdot A_s \cdot \left[\ddot{\underline{x}} + \left(\frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \right) \cdot \underline{k} \right] .$$

Se define

$$A = \rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2 \quad \left[\frac{Kg}{m^3} \cdot m^2 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot m^2 \right] \equiv [N] .$$

La primera ecuación queda de la siguiente forma:

$$\underline{F}' = \ddot{\underline{x}} + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot \underline{k} . \quad (1)$$

Con

$$\delta = \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l} \quad ,$$

$$\frac{B}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \bar{M} + \underline{d}_3 \times A \cdot \bar{F} = \rho \cdot \omega_0^2 \cdot \left(R \cdot \underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 + \underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 \right) \cdot I_1 \quad .$$

Al cociente entre los momentos de inercia de la sección se le ha llamado 'R':

$$R = \frac{I_2}{I_1} \quad .$$

Cuando la sección del filamento es cuadrada o circular los dos momentos de inercia son iguales y 'R' vale uno.

$$\frac{B}{l \cdot \rho \cdot I_1 \cdot \omega_0^2} \implies \text{Para hacer este cociente adimensional defino } B = \rho \cdot \omega_0^2 \cdot I_1 \cdot l \quad .$$

$$\frac{A}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot I_1} = \frac{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot I_1} = \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} = Q \quad (\text{A este cociente se le denomina Q}) \quad .$$

La segunda ecuación queda (sin poner las barras de las variables adimensionales):

$$\underline{M}' + Q \cdot \underline{d}_3 \times \underline{F} = R \cdot \underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 + \underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 \quad . \quad (2)$$

Las ecuaciones tercera y cuarta quedan de la misma forma pero teniendo en cuenta que las variables son ya adimensionales (aunque se omiten las barras):

$$\underline{x}' = \underline{d}_3 \quad , \quad (3)$$

$$\underline{d}_i' = \underline{k} \times \underline{d}_i, \quad (4)$$

$$B \cdot \underline{\bar{M}} = E \cdot I_1 \cdot \left(\frac{\bar{k}_1}{l} + \bar{\gamma} \cdot \frac{\dot{k}_1}{l} \right) \cdot \underline{d}_1 + E \cdot I_2 \cdot \left(\frac{\bar{k}_2}{l} + \bar{\gamma} \cdot \frac{\dot{k}_2}{l} \right) \cdot \underline{d}_2 + G \cdot J \cdot \left(\frac{\bar{k}_3}{l} + \bar{\gamma} \cdot \frac{\dot{k}_3}{l} \right) \cdot \underline{d}_3,$$

$$\underline{\bar{M}} = \frac{E \cdot I_1}{B \cdot l} \cdot \left(\bar{k}_1 + \bar{\gamma} \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot \underline{d}_1 + \frac{E \cdot I_2}{B \cdot l} \cdot \left(\bar{k}_2 + \bar{\gamma} \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot \underline{d}_2 + \frac{G \cdot J}{B \cdot l} \cdot \left(\bar{k}_3 + \bar{\gamma} \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot \underline{d}_3.$$

$$\frac{E \cdot I_1}{B \cdot l} = \frac{E \cdot I_1}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot I_1 \cdot l \cdot l} = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} = P \quad (\text{A este cociente se le denomina } P).$$

$$\frac{E \cdot I_2}{B \cdot l} = \frac{E \cdot I_2}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot I_1 \cdot l \cdot l} = \frac{E \cdot R}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} = P \cdot R,$$

$$\frac{G \cdot J}{B \cdot l} = \frac{G \cdot (I_1 + I_2)}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot I_1 \cdot l \cdot l} = \frac{E \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} = \frac{(R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot P.$$

La quinta ecuación (sin las barras de las variables adimensionales) queda:

$$\underline{M} = P \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot \underline{d}_1 + P \cdot R \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot \underline{d}_2 + \frac{(R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot P \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot \underline{d}_3. \quad (5)$$

2.3. Desarrollo de las ecuaciones

Vamos a descomponer cada una de las cinco ecuaciones vectoriales en tres vectoriales mediante la proyección en los sistemas de referencia.

Descomponemos la primera ecuación:

$$\underline{F}' = \underline{\ddot{x}} + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \underline{k} , \quad (1)$$

$$\delta = \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} , \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l} .$$

Descomponiendo cada vector en los sistemas de referencia:

$$\underline{F} = F_1 \cdot \underline{d}_1 + F_2 \cdot \underline{d}_2 + F_3 \cdot \underline{d}_3 = f_1 \cdot \underline{e}_1 + f_2 \cdot \underline{e}_2 + f_3 \cdot \underline{e}_3 ,$$

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \cdot \underline{e}_2 + x_3 \cdot \underline{e}_3 .$$

Derivamos:

$$\underline{F}' = f_1' \cdot \underline{e}_1 + f_2' \cdot \underline{e}_2 + f_3' \cdot \underline{e}_3 ,$$

$$\underline{\ddot{x}} = \ddot{x}_1 \cdot \underline{e}_1 + \ddot{x}_2 \cdot \underline{e}_2 + \ddot{x}_3 \cdot \underline{e}_3 .$$

La ecuación queda descompuesta en las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$f_1' = \ddot{x}_1 , \quad (1a)$$

$$f_2' = \ddot{x}_2 , \quad (1b)$$

$$f_3' = \ddot{x}_3 + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) . \quad (1c)$$

Descomponemos la segunda ecuación:

$$\underline{M}' + Q \cdot \underline{d}_3 \times \underline{F} = R \cdot \underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 + \underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 , \quad (2)$$

$$Q = \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} \quad , \quad R = \frac{I_2}{I_1} \quad (I_1 \geq I_2) \quad ,$$

$$\begin{aligned} \underline{M} &= M_1 \cdot \underline{d}_1 + M_2 \cdot \underline{d}_2 + M_3 \cdot \underline{d}_3 = m_1 \cdot \underline{e}_1 + m_2 \cdot \underline{e}_2 + m_3 \cdot \underline{e}_3 = \left(\sum_i M_i \cdot \underline{d}_i \cdot \underline{e}_1 \right) \cdot \underline{e}_1 + \\ &+ \left(\sum_i M_i \cdot \underline{d}_i \cdot \underline{e}_2 \right) \cdot \underline{e}_2 + \left(\sum_i M_i \cdot \underline{d}_i \cdot \underline{e}_3 \right) \cdot \underline{e}_3 \quad , \end{aligned}$$

$$\underline{M} = (M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{21} + M_3 \cdot d_{31}) \cdot \underline{e}_1 + (M_1 \cdot d_{12} + M_2 \cdot d_{22} + M_3 \cdot d_{32}) \cdot \underline{e}_2 +$$

$$+ (M_1 \cdot d_{13} + M_2 \cdot d_{23} + M_3 \cdot d_{33}) \cdot \underline{e}_3 = [M_1 \ M_2 \ M_3] \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \underline{M}' &= m'_1 \cdot \underline{e}_1 + m'_2 \cdot \underline{e}_2 + m'_3 \cdot \underline{e}_3 = (M'_1 \cdot d_{11} + M_1 \cdot d'_{11} + M'_2 \cdot d_{21} + M_2 \cdot d'_{21} + M'_3 \cdot d_{31} + \\ &+ M_3 \cdot d'_{31}) \cdot \underline{e}_1 + (M'_1 \cdot d_{12} + M_1 \cdot d'_{12} + M'_2 \cdot d_{22} + M_2 \cdot d'_{22} + M'_3 \cdot d_{32} + M_3 \cdot d'_{32}) \cdot \underline{e}_2 + \\ &+ (M'_1 \cdot d_{13} + M_1 \cdot d'_{13} + M'_2 \cdot d_{23} + M_2 \cdot d'_{23} + M'_3 \cdot d_{33} + M_3 \cdot d'_{33}) \cdot \underline{e}_3 \quad , \end{aligned}$$

$$\underline{d}_3 \times \underline{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} d_{32} \cdot f_3 - d_{33} \cdot f_2 \\ d_{33} \cdot f_1 - d_{31} \cdot f_3 \\ d_{31} \cdot f_2 - d_{32} \cdot f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d_{33} & d_{32} \\ d_{33} & 0 & -d_{31} \\ -d_{32} & d_{31} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underline{\tilde{d}}_3 \cdot \underline{f} \quad ,$$

$$Q \cdot \underline{d}_3 \times \underline{F} = Q \cdot \underline{\tilde{d}}_3 \cdot \underline{f} \quad ,$$

$$\underline{d}_i \times \underline{\ddot{d}}_i \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

$$\underline{d}_i \times \underline{\ddot{d}}_i = \underline{\tilde{d}}_i \cdot \underline{\ddot{d}}_i \quad ,$$

$$\underline{\tilde{d}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -d_{i3} & d_{i2} \\ d_{i3} & 0 & -d_{i1} \\ -d_{i2} & d_{i1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\ddot{d}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{d}_{i1} \\ \ddot{d}_{i2} \\ \ddot{d}_{i3} \end{bmatrix},$$

$$\underline{d}_1 \times \underline{\ddot{d}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -d_{13} & d_{12} \\ d_{13} & 0 & -d_{11} \\ -d_{12} & d_{11} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{d}_{11} \\ \ddot{d}_{12} \\ \ddot{d}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{13} \cdot \ddot{d}_{12} + d_{12} \cdot \ddot{d}_{13} \\ d_{13} \cdot \ddot{d}_{11} - d_{11} \cdot \ddot{d}_{13} \\ -d_{12} \cdot \ddot{d}_{11} + d_{11} \cdot \ddot{d}_{12} \end{bmatrix},$$

$$\underline{d}_2 \times \underline{\ddot{d}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -d_{23} & d_{22} \\ d_{23} & 0 & -d_{21} \\ -d_{22} & d_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{d}_{21} \\ \ddot{d}_{22} \\ \ddot{d}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{23} \cdot \ddot{d}_{22} + d_{22} \cdot \ddot{d}_{23} \\ d_{23} \cdot \ddot{d}_{21} - d_{21} \cdot \ddot{d}_{23} \\ -d_{22} \cdot \ddot{d}_{21} + d_{21} \cdot \ddot{d}_{22} \end{bmatrix}.$$

Tenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (M'_1 \cdot d_{11} + M'_2 \cdot d_{21} + M'_3 \cdot d_{31}) + (M_1 \cdot d'_{11} + M_2 \cdot d'_{21} + M_3 \cdot d'_{31}) + Q \cdot (d_{32} \cdot f_3 - d_{33} \cdot f_2) = \\ = R \cdot \left(d_{12} \cdot \ddot{d}_{13} - d_{13} \cdot \ddot{d}_{12} \right) + \left(d_{22} \cdot \ddot{d}_{23} - d_{23} \cdot \ddot{d}_{22} \right), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} (M'_1 \cdot d_{12} + M'_2 \cdot d_{22} + M'_3 \cdot d_{32}) + (M_1 \cdot d'_{12} + M_2 \cdot d'_{22} + M_3 \cdot d'_{32}) + Q \cdot (d_{33} \cdot f_1 - d_{31} \cdot f_3) = \\ = R \cdot \left(d_{13} \cdot \ddot{d}_{11} - d_{11} \cdot \ddot{d}_{13} \right) + \left(d_{23} \cdot \ddot{d}_{21} - d_{21} \cdot \ddot{d}_{23} \right), \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} (M'_1 \cdot d_{13} + M'_2 \cdot d_{23} + M'_3 \cdot d_{33}) + (M_1 \cdot d'_{13} + M_2 \cdot d'_{23} + M_3 \cdot d'_{33}) + Q \cdot (d_{31} \cdot f_2 - d_{32} \cdot f_1) = \\ = R \cdot \left(d_{11} \cdot \ddot{d}_{12} - d_{12} \cdot \ddot{d}_{11} \right) + \left(d_{21} \cdot \ddot{d}_{22} - d_{22} \cdot \ddot{d}_{21} \right). \end{aligned} \quad (2c)$$

Descomponemos la tercera ecuación:

$$\underline{x}' = \underline{d}_3 , \quad (3)$$

$$x'_1 = d_{31} , \quad (3a)$$

$$x'_2 = d_{32} , \quad (3b)$$

$$x'_3 = d_{33} . \quad (3c)$$

Descomponemos la cuarta ecuación:

$$\underline{d}'_i = \underline{k} \times \underline{d}_i , \quad (4)$$

$$\underline{k} = \sum k_i \cdot \underline{d}_i ,$$

$$\begin{aligned} i = 1 \implies \underline{d}'_1 &= \underline{k} \times \underline{d}_1 = (k_1 \cdot \underline{d}_1 + k_2 \cdot \underline{d}_2 + k_3 \cdot \underline{d}_3) \times \underline{d}_1 \implies \\ &\implies \underline{d}'_1 = k_3 \cdot \underline{d}_2 - k_2 \cdot \underline{d}_3 , \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} i = 2 \implies \underline{d}'_2 &= \underline{k} \times \underline{d}_2 = (k_1 \cdot \underline{d}_1 + k_2 \cdot \underline{d}_2 + k_3 \cdot \underline{d}_3) \times \underline{d}_2 \implies \\ &\implies \underline{d}'_2 = k_1 \cdot \underline{d}_3 - k_3 \cdot \underline{d}_1 , \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} i = 3 \implies \underline{d}'_3 &= \underline{k} \times \underline{d}_3 = (k_1 \cdot \underline{d}_1 + k_2 \cdot \underline{d}_2 + k_3 \cdot \underline{d}_3) \times \underline{d}_3 \implies \\ &\implies \underline{d}'_3 = k_2 \cdot \underline{d}_1 - k_1 \cdot \underline{d}_2 , \end{aligned} \quad (4c)$$

Descomponemos la quinta ecuación:

$$\begin{aligned} \underline{M} = m_1 \cdot \underline{e}_1 + m_2 \cdot \underline{e}_2 + m_3 \cdot \underline{e}_3 = M_1 \cdot \underline{d}_1 + M_2 \cdot \underline{d}_2 + M_3 \cdot \underline{d}_3 = P \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot \underline{d}_1 + \\ + P \cdot R \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot \underline{d}_2 + \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot \underline{d}_3 , \end{aligned} \quad (5)$$

$$P = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \quad , \quad R = \frac{I_2}{I_1} \quad ,$$

$$\begin{aligned} M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{21} + M_3 \cdot d_{31} = P \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot d_{11} + P \cdot R \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot d_{21} + \\ + \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot d_{31} , \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} M_1 \cdot d_{12} + M_2 \cdot d_{22} + M_3 \cdot d_{32} = P \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot d_{12} + P \cdot R \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot d_{22} + \\ + \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot d_{32} , \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} M_1 \cdot d_{13} + M_2 \cdot d_{23} + M_3 \cdot d_{33} = P \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot d_{13} + P \cdot R \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot d_{23} + \\ + \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot d_{33} . \end{aligned} \quad (5c)$$

En total son 21 ecuaciones con 21 incógnitas que son las siguientes:

$$\{f_1, f_2, f_3, M_1, M_2, M_3, x_1, x_2, x_3, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, k_1, k_2, k_3\} .$$

Condiciones de contorno:

- En s=0:

El extremo está empotrado en un soporte que tiene un movimiento vertical sinusoidal paramétrico. Tenemos entonces que en este extremo se superpone el triedro asociado a la sección con el triedro móvil de referencia cuyo origen va ligado a este extremo empotrado. Esto se traduce en las siguientes condiciones:

$$\underline{x}(0, t) = \underline{0} ,$$

$$\underline{d}_1(0, t) = \underline{e}_1 = (1, 0, 0) ,$$

$$\underline{d}_2(0, t) = \underline{e}_2 = (0, 1, 0) ,$$

$$\underline{d}_3(0, t) = \underline{e}_3 = (0, 0, 1) .$$

Éstas son 12 condiciones de contorno.

▪ En s=1:

El extremo está libre sin ninguna restricción de movimiento y ninguna fuerza aplicada. Esto se traduce en las siguientes condiciones:

$$\underline{F} = F_1 \cdot \underline{d}_1 + F_2 \cdot \underline{d}_2 + F_3 \cdot \underline{d}_3 = f_1 \cdot \underline{e}_1 + f_2 \cdot \underline{e}_2 + f_3 \cdot \underline{e}_3 = \underline{0} ,$$

$$\underline{M} = \sum_i M_i \cdot \underline{d}_i = \underline{0} .$$

De estas dos igualdades se tiene:

$$f_1(1, t) = f_2(1, t) = f_3(1, t) = 0 ,$$

$$M_1(1, t) = M_2(1, t) = M_3(1, t) = 0 .$$

Éstas son 6 condiciones de contorno

En total son 18 condiciones de contorno.

De las 21 ecuaciones las 3 últimas son algebraicas y permiten expresar las curvaturas en función de los momentos (cuando no haya dependencia

temporal) con lo cual el sistema se reduce a 18 ecuaciones diferenciales con 18 condiciones de contorno.

2.4. Desarrollo de ecuaciones para el caso estático

Las ecuaciones definitivas que se van a analizar con el programa son las que se obtienen de eliminar la dependencia con el tiempo 't' de las cinco ecuaciones vectoriales que hemos obtenido.

Eliminando la dependencia con el tiempo, la primera ecuación queda de la siguiente forma:

$$\underline{F}' = (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \underline{k} = A \cdot \underline{k} , \quad (1)$$

$$\delta = \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l} .$$

Descomponemos el vector de fuerzas y lo derivamos:

$$\underline{F} = \sum F_i \cdot \underline{d}_i = F_1 \cdot \underline{d}_1 + F_2 \cdot \underline{d}_2 + F_3 \cdot \underline{d}_3 ,$$

$$\underline{F}' = F_1' \cdot \underline{d}_1 + F_1 \cdot \underline{d}_1' + F_2' \cdot \underline{d}_2 + F_2 \cdot \underline{d}_2' + F_3' \cdot \underline{d}_3 + F_3 \cdot \underline{d}_3' .$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4):

$$\underline{d}_1' = k_3 \cdot \underline{d}_2 - k_2 \cdot \underline{d}_3 ,$$

$$\underline{d}_2' = k_1 \cdot \underline{d}_3 - k_3 \cdot \underline{d}_1 ,$$

$$\underline{d}_3' = k_2 \cdot \underline{d}_1 - k_1 \cdot \underline{d}_2 .$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\underline{F}' &= F'_1 \cdot \underline{d}_1 + F_1 \cdot (k_3 \cdot \underline{d}_2 - k_2 \cdot \underline{d}_3) + F'_2 \cdot \underline{d}_2 + F_2 \cdot (k_1 \cdot \underline{d}_3 - k_3 \cdot \underline{d}_1) + F'_3 \cdot \underline{d}_3 + \\
&+ F_3 \cdot (k_2 \cdot \underline{d}_1 - k_1 \cdot \underline{d}_2) = (F'_1 - F_2 \cdot k_3 + F_3 \cdot k_2) \cdot \underline{d}_1 + (F'_2 + F_1 \cdot k_3 - F_3 \cdot k_1) \cdot \underline{d}_2 + \\
&+ (F'_3 - F_1 \cdot k_2 + F_2 \cdot k_1) \cdot \underline{d}_3 .
\end{aligned}$$

Para obtener cada una de las ecuaciones escalares se multiplica la ecuación a ambos lados por cada vector del triedro respectivamente. Al multiplicar el miembro de la derecha de la ecuación por cada vector del triedro $\{d_1, d_2, d_3\}$ se tiene:

$$A \cdot \underline{k} \cdot \underline{d}_1 = A \cdot d_{13} ,$$

$$A \cdot \underline{k} \cdot \underline{d}_2 = A \cdot d_{23} ,$$

$$A \cdot \underline{k} \cdot \underline{d}_3 = A \cdot d_{33} .$$

Las tres ecuaciones resultantes de multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) por cada uno de los tres vectores $\{d_1, d_2, d_3\}$ son:

$$\begin{aligned}
F'_1 - F_2 \cdot k_3 + F_3 \cdot k_2 &= A \cdot d_{13} = (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{13} \implies F'_1 = F_2 \cdot k_3 - F_3 \cdot k_2 + \\
&+ (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{13} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_2 + F_1 \cdot k_3 - F_3 \cdot k_1 &= A \cdot d_{23} = (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{23} \implies F'_2 = F_3 \cdot k_1 - F_1 \cdot k_3 + \\
&+ (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{23} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_3 - F_1 \cdot k_2 + F_2 \cdot k_1 &= A \cdot d_{33} = (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{33} \implies F'_3 = F_1 \cdot k_2 - F_2 \cdot k_1 + \\
&+ (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{33} ,
\end{aligned}$$

$$F'_1 = F_2 \cdot k_3 - F_3 \cdot k_2 + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{13} , \quad (1a)$$

$$F'_2 = F_3 \cdot k_1 - F_1 \cdot k_3 + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{23} , \quad (1b)$$

$$F'_3 = F_1 \cdot k_2 - F_2 \cdot k_1 + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \cdot d_{33} . \quad (1c)$$

Eliminando la dependencia temporal en la segunda ecuación tenemos:

$$\underline{M}' + Q \cdot \underline{d}_3 \times \underline{F} = \underline{0} , \quad (2)$$

$$Q = \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} ,$$

$$R = \frac{I_2}{I_1} \quad (I_1 \geq I_2) .$$

Descomponemos el vector de momentos y lo derivamos:

$$\underline{M} = \sum M_i \cdot \underline{d}_i = M_1 \cdot \underline{d}_1 + M_2 \cdot \underline{d}_2 + M_3 \cdot \underline{d}_3 ,$$

$$\begin{aligned} \underline{M}' &= \sum M'_i \cdot \underline{d}_i + \sum M_i \cdot \underline{d}'_i = M'_1 \cdot \underline{d}_1 + M'_2 \cdot \underline{d}_2 + M'_3 \cdot \underline{d}_3 + M_1 \cdot \underline{d}'_1 + M_2 \cdot \underline{d}'_2 + M_3 \cdot \underline{d}'_3 = M'_1 \cdot \underline{d}_1 + \\ &+ M'_2 \cdot \underline{d}_2 + M'_3 \cdot \underline{d}_3 + M_1 \cdot (k_3 \cdot \underline{d}_2 - k_2 \cdot \underline{d}_3) + M_2 \cdot (k_1 \cdot \underline{d}_3 - k_3 \cdot \underline{d}_1) + M_3 \cdot (k_2 \cdot \underline{d}_1 - k_1 \cdot \underline{d}_2) , \end{aligned}$$

$$\underline{M}' = (M'_1 - M_2 \cdot k_3 + M_3 \cdot k_2) \cdot \underline{d}_1 + (M'_2 + M_1 \cdot k_3 - M_3 \cdot k_1) \cdot \underline{d}_2 + (M'_3 - M_1 \cdot k_2 + M_2 \cdot k_1) \cdot \underline{d}_3 .$$

Operamos con el producto vectorial:

$$\underline{d}_3 \times \underline{F} = \underline{d}_3 \times (F_1 \cdot \underline{d}_1 + F_2 \cdot \underline{d}_2 + F_3 \cdot \underline{d}_3) = F_1 \cdot \underline{d}_2 - F_2 \cdot \underline{d}_1 .$$

Las tres ecuaciones escalares quedan:

$$M'_1 - M_2 \cdot k_3 + M_3 \cdot k_2 - Q \cdot F_2 = 0 \implies M'_1 = M_2 \cdot k_3 - M_3 \cdot k_2 + Q \cdot F_2 , \quad (2a)$$

$$M'_2 + M_1 \cdot k_3 - M_3 \cdot k_1 + Q \cdot F_1 = 0 \implies M'_2 = M_3 \cdot k_1 - M_1 \cdot k_3 - Q \cdot F_1 , \quad (2b)$$

$$M'_3 - M_1 \cdot k_2 + M_2 \cdot k_1 = 0 \implies M'_3 = M_1 \cdot k_2 - M_2 \cdot k_1 . \quad (2c)$$

La tercera ecuación queda de la misma forma porque no tiene dependencia temporal:

$$\underline{x}' = \underline{d}_3 . \quad (3)$$

Descomponiendo en las tres ecuaciones escalares:

$$x'_1 = d_{31} , \quad (3a)$$

$$x'_2 = d_{32} , \quad (3b)$$

$$x'_3 = d_{33} . \quad (3c)$$

La cuarta ecuación tampoco tiene dependencia temporal y sigue siendo la misma:

$$\underline{d}'_i = \underline{k} \times \underline{d}_i , \quad (4)$$

$$\underline{k} = \sum k_i \cdot \underline{d}_i ,$$

$$\underline{d}'_1 = k_3 \cdot \underline{d}_2 - k_2 \cdot \underline{d}_3 , \quad (4a)$$

$$\underline{d}'_2 = k_1 \cdot \underline{d}_3 - k_3 \cdot \underline{d}_1 , \quad (4b)$$

$$\underline{d}'_3 = k_2 \cdot \underline{d}_1 - k_1 \cdot \underline{d}_2 . \quad (4c)$$

La relación entre los momentos y las curvaturas se obtiene de las ecuaciones que resultan de eliminar la dependencia temporal en las tres ecuaciones escalares que corresponden a la quinta ecuación:

$$k_1 = \frac{M_1}{P} ,$$

$$k_2 = \frac{M_2}{P \cdot R} ,$$

$$k_3 = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} \cdot M_3 .$$

Sustituyendo esta relación en las ecuaciones (4):

$$\begin{Bmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ d'_{13} \end{Bmatrix} = k_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} - k_2 \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} \implies$$

$$d'_{11} = k_3 \cdot d_{21} - k_2 \cdot d_{31} = F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} , \quad (4a.1)$$

$$d'_{12} = k_3 \cdot d_{22} - k_2 \cdot d_{32} = F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} , \quad (4a.2)$$

$$d'_{13} = k_3 \cdot d_{23} - k_2 \cdot d_{33} = F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} , \quad (4a.3)$$

$$\begin{Bmatrix} d'_{21} \\ d'_{22} \\ d'_{23} \end{Bmatrix} = k_1 \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} - k_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} \implies$$

$$d'_{21} = k_1 \cdot d_{31} - k_3 \cdot d_{11} = \frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11} , \quad (4b.1)$$

$$d'_{22} = k_1 \cdot d_{32} - k_3 \cdot d_{12} = \frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12} , \quad (4b.2)$$

$$d'_{23} = k_1 \cdot d_{33} - k_3 \cdot d_{13} = \frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13} , \quad (4b.3)$$

$$\begin{Bmatrix} d'_{31} \\ d'_{32} \\ d'_{33} \end{Bmatrix} = k_2 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} - k_1 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} \implies$$

$$d'_{31} = k_2 \cdot d_{11} - k_1 \cdot d_{21} = \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21} , \quad (4c.1)$$

$$d'_{32} = k_2 \cdot d_{12} - k_1 \cdot d_{22} = \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22} , \quad (4c.2)$$

$$d'_{33} = k_2 \cdot d_{13} - k_1 \cdot d_{23} = \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23} , \quad (4c.3)$$

donde:

$$P = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} , \quad F = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} , \quad R = \frac{I_2}{I_1} .$$

Éstas son las 18 ecuaciones con las 18 incógnitas que son:

$$\{F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3, x_1, x_2, x_3, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32}, d_{33}\} .$$

Los parámetros que tenemos son:

g : gravedad

ω_0 : frecuencia de excitación del movimiento vertical sinusoidal paramétrico

co

- l : longitud total del filamento
 E : módulo de Young del material del filamento
 ρ : densidad del material del filamento
 ν : módulo de Poisson del material del filamento

A partir de estos parámetros se construyen las variables auxiliares, que son las siguientes:

$$A_s = b \cdot h, \quad I_1 = \frac{h^3 \cdot b}{12}, \quad I_2 = \frac{b^3 \cdot h}{12}, \quad \delta = \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l}, \quad Q = \frac{A_s \cdot l^2}{I_1}, \quad R = \frac{I_2}{I_1},$$

$$P = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2}, \quad F = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)}.$$

Las condiciones iniciales para resolver en AUTO son las siguientes:

Parámetros

Los parámetros van a permanecer constantes en todas las iteraciones que hagamos para estudiar el cambio de estabilidad menos uno de ellos, llamado parámetro principal de la continuación, que es el que va a ir variando. Los valores iniciales que van a tomar para introducirlos en AUTO son los siguientes:

$$g = 9.8m/s^2, \quad \omega_0 = 1rad/s, \quad l = 55 \cdot 10^{-2}m, \quad E = 2.1 \cdot 10^{11}N/m^2, \quad \rho = 7850Kg/m^3, \quad \nu = 0.3.$$

La longitud del filamento y la frecuencia de excitación se han tomado de manera arbitraria, mientras que los valores de las propiedades del material que se han tomado son los correspondientes al acero A-42.

Incógnitas

Los valores iniciales para las 18 incógnitas son las correspondientes a la situación de filamento recto y estático:

$$F_1 = 0, \quad x_1 = 0, \quad d_{21} = 0,$$

$$F_2 = 0, \quad x_2 = 0, \quad d_{22} = 1,$$

$$F_3 = \frac{\rho \cdot A_s \cdot g \cdot (s - l)}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2}, \quad x_3 = \frac{s}{l}, \quad d_{23} = 0,$$

$$M_1 = 0 \quad , \quad d_{11} = 1 \quad , \quad d_{31} = 0 \quad ,$$

$$M_2 = 0 \quad , \quad d_{12} = 0 \quad , \quad d_{32} = 0 \quad ,$$

$$M_3 = 0 \quad , \quad d_{13} = 0 \quad , \quad d_{33} = 1 \quad ,$$

La fuerza ' F_3 ' en cada punto de la línea media es igual al peso de la parte del filamento que queda por encima de dicho punto; siendo esta fuerza cero en el extremo superior por no haber peso por encima, y conforme nos movemos por la línea media hacia el extremo empotrado, la fuerza va aumentando porque cada vez es mayor el peso que hay por encima.

Las condiciones de contorno son las 18 que se explicaban en el desarrollo de las ecuaciones:

■ En $s=0$

Tenemos empotramiento. Son 12 condiciones:

$$x_1 = 0 \quad , \quad d_{11} = 1 \quad , \quad d_{21} = 0 \quad , \quad d_{31} = 0 \quad ,$$

$$x_2 = 0 \quad , \quad d_{12} = 0 \quad , \quad d_{22} = 1 \quad , \quad d_{32} = 0 \quad ,$$

$$x_3 = 0 \quad , \quad d_{13} = 0 \quad , \quad d_{23} = 0 \quad , \quad d_{33} = 1 \quad ,$$

■ En $s=1$

Tenemos el extremo libre. Son 6 condiciones:

$$f_1 = 0 \implies F_1 \cdot d_{11} + F_2 \cdot d_{21} + F_3 \cdot d_{31} = 0 \quad ,$$

$$f_2 = 0 \implies F_1 \cdot d_{12} + F_2 \cdot d_{22} + F_3 \cdot d_{32} = 0 \quad ,$$

$$f_3 = 0 \implies F_1 \cdot d_{13} + F_2 \cdot d_{23} + F_3 \cdot d_{33} = 0 \quad ,$$

$$m_1 = 0 \implies M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{21} + M_3 \cdot d_{31} = 0 \quad ,$$

$$m_2 = 0 \implies M_1 \cdot d_{12} + M_2 \cdot d_{22} + M_3 \cdot d_{32} = 0 \quad ,$$

$$m_3 = 0 \implies M_1 \cdot d_{13} + M_2 \cdot d_{23} + M_3 \cdot d_{33} = 0 .$$

Entonces para resolver el problema se introducen en AUTO las ecuaciones, las condiciones iniciales y las condiciones de contorno.

Capítulo 3

Continuación numérica de las ecuaciones del modelo

El objetivo de este capítulo es obtener mediante el programa de continuación numérica AUTO2000, las curvas que representan todos los equilibrios del sistema según vayan variando el parámetro establecido en cada caso.

3.1. Fundamento de la continuación numérica

Las ideas básicas sobre continuación fueron formuladas en los años sesenta por Haselgrove, Klopfenstein, Deist y Sefor. A finales de esa década y principios de la siguiente, estas técnicas fueron introducidas en aplicaciones científicas y de ingeniería. Hoy día, su utilización está ampliamente extendida, existiendo incluso software especializado como AUTO o MATCONT.

Se considera el siguiente sistema continuo:

$$\dot{x} = f(x, p), \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^1$ y f es una función continuamente derivable de (x, p) . El análisis de bifurcación del sistema (1) no es más que la reconstrucción de su diagrama de bifurcación en función del parámetro p , en particular, el estudio

de la dependencia de los equilibrios con el parámetro, y la localización de los puntos de bifurcación.

Los puntos de equilibrio de (1) satisfacen:

$$f(x, p) = 0, \quad (2)$$

esto es, un sistema no-lineal de n ecuaciones escalares dependiente de n variables y un parámetro. En general, las ecuaciones (2) definen una curva M en \mathbb{R}^{n+1} . Computando esa *curva de equilibrios* se obtiene la dependencia de los equilibrios de (1) con respecto al parámetro 'p'.

El problema de computar la curva M es un problema de continuación finito-dimensional, lo cual significa encontrar una curva en \mathbb{R}^{n+1} definida por n ecuaciones del tipo

$$F(y) = 0, \quad F : \mathbb{R}^{n+1} \implies \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

donde $y = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, p]^T$. Supongamos que se tiene un punto $y^{(j)} \in \mathbb{R}^{n+1}$, para un cierto j entero no negativo, que verifica las siguientes condiciones:

- **C.1** Pertenencia a la curva, esto es, satisface $F(y^{(j)}) = 0$,
- **C.2** No degeneración $\implies \text{rango}(F_y(y^{(j)})) = n$.

El símbolo F_y usado en **C.2** denota el jacobiano, $n \times (n+1)$, de F . En estas condiciones, el *Teorema de la Función Implícita* garantiza la existencia, en un entorno del punto $y^{(j)}$, de una única curva solución del sistema (3), que pasa por dicho punto. La continuación numérica no es más que la obtención del siguiente punto sobre la curva $y^{(j+1)}$, partiendo de los datos conocidos en $y^{(j)}$. De esta forma, se genera la curva M con la exactitud deseada.

El método de continuación se puede dividir en tres pasos principalmente: (1) elección del paso de continuación, $h^{(j)}$, (2) predicción del nuevo punto, $\tilde{y}^{(j+1)}$, tomando un vector tangente a la curva, y (3) corrección mediante el método de Newton-Raphson. Como se puede observar, este método tiene la típica estructura *predictor-corrector*. El primer punto $y^{(0)}$ debe ser conocido y normalmente se corresponde con un equilibrio $x^{(0)}$ y parámetro $p^{(0)}$ fáciles de obtener, por ejemplo, la solución trivial del sistema. A continuación se van a estudiar cada una de las tres etapas descritas anteriormente con más detalle.

Elección del paso de continuación

Existen varias posibilidades en cuanto a la elección del paso de continuación en cada iteración del algoritmo. Lo más fácil sería fijar a priori un paso $h^{(0)}$ y mantenerlo constante a lo largo de todo el proceso, es decir, $h^{(j)} = h^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots$. Sin embargo, es más acertado permitir que el paso sea variable, determinándose su magnitud en función de la velocidad de convergencia del método de Newton que se usa en el corrector. De esta forma, una convergencia lenta anima a reducir el paso, mientras que si ésta es buena se aumentaría.

Predictor

En esta fase del algoritmo se calcula el punto $\tilde{y}^{(j+1)}$ a partir del punto conocido $y^{(j)}$ y del vector $v^{(j)}$, que debe ser tangente a la curva en dicho punto y cumplir $\|v^{(j)}\| = 1$. De esta forma se tiene

$$\tilde{y}^{(j+1)} = y^{(j)} + h^{(j)} \cdot v^{(j)}, \quad (4)$$

comúnmente llamada *predicción de tangente*. Para calcular el vector tangente $v^{(j)}$, se va a suponer que la curva está parametrizada en la forma $y(s)$, donde s es el parámetro. Además, se sabe que la función $F(y)$ definida en (3) se anula sobre la curva, $F(y(s))$. Derivando esta última expresión con respecto al parámetro, que se denota por $\dot{(\)}$, se tiene que $F_y(y(s))\dot{y}(s) = 0$, donde $\dot{y}(s)$ es el vector tangente a la curva en $y(s)$. Si se elige $s^{(j)}$ tal que $y(s^{(j)}) = y^{(j)}$, se puede escribir

$$F_y(y^{(j)})v^{(j)} = 0, \quad (5)$$

que es equivalente a un sistema de n ecuaciones con $(n+1)$ incógnitas. De alguna forma, es necesario imponer el sentido en el que se está realizando la continuación, ya que de otra forma, el proceso podría avanzar y retroceder indistintamente por la curva. Para ello, y conociendo el vector tangente en el paso anterior, se impone la siguiente condición

$$(v^{(j-1)})^T \cdot v^{(j)} = C < 1, \quad (6)$$

que garantiza que las dos tangentes apuntan en el mismo sentido de la curva. Añadiendo esta condición al sistema de n ecuaciones, definido por (5), se tiene un sistema cerrado que proporciona el vector tangente $v^{(j)}$. Este sistema tiene solución siempre que se cumpla la condición **C.2** y el paso de continuación no sea demasiado grande, provocando la no convergencia del método. Para finalizar es conveniente normalizar el vector $v^{(j)}$.

Corrector

Una vez obtenida la predicción, $\tilde{y}^{(j+1)}$, se corrige mediante el método de Newton-Raphson, obteniéndose $y^{(j+1)}$.

El método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas algebraicos no-lineales del tipo $G(z) = 0$, consiste en, a partir de una primera aproximación $z^{(0)}$, obtener la sucesión $z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots$, tal que el término $(k+1)$ se obtiene del (k) -ésimo resolviendo el sistema linealizado alrededor de $z^{(k)}$,

$$G(z^{(k)}) + G_z(z^{(k)})(z^{(k+1)} - z^{(k)}) = 0, \quad (7)$$

donde G_z denota el jacobiano del vector. En nuestro caso, el problema a resolver viene dado por (3) con la aproximación, $\tilde{y}^{(j+1)}$, calculada mediante el predictor. El problema es que este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto, es necesario añadir una ecuación al sistema (3). La condición de *pseudo longitud de arco* es la elección más común, siendo utilizada por ejemplo, tanto en AUTO2000, como en MATCONT. Esta condición se expresa matemáticamente como

$$g^{(j)}(y) = (y - y^{(j)})^T \cdot v^{(j)} - h^{(j)} = 0. \quad (8)$$

La interpretación geométrica de esta regla consiste en que la longitud del paso de continuación, $h^{(j)}$, se toma igual a la proyección ortogonal del vector $(y - y^{(j)})$ sobre $v^{(j)}$. Dicho esto, el sistema de ecuaciones a resolver mediante el método de Newton-Raphson, anteriormente descrito, es

$$\begin{bmatrix} F(y) \\ g^{(j)}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

a partir de la semilla $\tilde{y}^{(j+1)}$.

Por otro lado, en las bifurcaciones de las ramas (varias soluciones sobre el mismo punto, y puntos donde en general falla el teorema de la función implícita) la continuación puede hacerse en varias direcciones. Es necesario por tanto, añadir algunas condiciones adicionales para realizar la continuación.

3.2. Funcionamiento de AUTO2000

AUTO2000 es el software de continuación numérica que manejaremos en el presente proyecto. En este apartado explicaremos básicamente los ficheros

que hay que introducirle a AUTO para su funcionamiento, las órdenes necesarias para que funcione y los ficheros que genera después de la continuación. Posteriormente, en los apartados sucesivos, iremos particularizando todo ello para nuestro proyecto.

El funcionamiento de auto se basa en dos tipos de archivo:

Fichero xxx.c: Contiene varias subrutinas en C, en las que se introducen las ecuaciones diferenciales del movimiento, así como las condiciones iniciales tales como un punto de equilibrio, las condiciones de contorno, etc...

Fichero c.xxx: En él se refleja la dimensión del sistema, los parámetros a continuar, las tolerancias admisibles, el número de iteraciones, etc...

Las letras 'xxx' son una notación genérica que se refieren a cualquier nombre que le queramos dar al fichero en particular.

Vamos a mostrar un ejemplo de cada uno de estos ficheros y daremos unas nociones básicas de los parámetros que hay que introducirles.

Para empezar, mostraremos un fichero tipo **xxx.c** a modo de ejemplo y veremos como funciona.

Supongamos que tenemos el siguiente sistema :

$$u_1' = u_2 ,$$

$$u_2' = -p_1 \cdot e^{u_1} .$$

con las condiciones de contorno

$$u_1(0) = 0, u_1(1) = 0 .$$

El contenido del fichero **xxx.c** para el problema planteado es el que se muestra a continuación:

```
#include "auto_f2c.h"
/* _____ */
/* exp : A boundary value problem (Bratu's equation) */
/* _____ */
int func (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
const doublereal *par, integer ijac,
doublereal *f, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp) {
doublereal e;
e = exp(u[0]);
f[0] = u[1];
f[1] = -par[0] * e;
```

36CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```

return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int stpnt (integer ndim, doublereal t,
doublereal *u, doublereal *par) {
par[0] = 0.;
u[0] = (doublereal)0.;
u[1] = (doublereal)0.;
return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int bcnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
integer nbc, const doublereal *u0, const doublereal *u1, integer ijac,
doublereal *fb, doublereal *dbc) {
fb[0] = u0[0];
fb[1] = u1[0];
return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int icnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
integer nint, const doublereal *u, const doublereal *uold,
const doublereal *udot, const doublereal *upold, integer ijac,
doublereal *fi, doublereal *dint) {
return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int foft (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
const doublereal *par, integer ijac,
doublereal *fs, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp) {
return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int pvls (integer ndim, const doublereal *u,
doublereal *par)
{
return 0;
}

```

```

}
/* _____ */
/* _____ */

```

En este fichero podemos distinguir seis funciones de las cuales las más importantes son las tres primeras; ya que son las que van a ser distintas para cada problema concreto, mientras que las tres últimas permanecen siempre igual sea cual sea el problema. Tenemos:

func: Es la encargada de pasar a AUTO las ecuaciones diferenciales y de definir las variables independientes y los parámetros. En este ejemplo tenemos un parámetro p_1 que se define mediante el vector `par[]` como `par[0]` y dos variables independientes u_1 y u_2 que se definen mediante el vector `u[]` como `u[0]` y `u[1]` respectivamente. Las ecuaciones diferenciales quedan definidas en el vector `f[]`.

stpnt: Es la función que AUTO emplea cuando se le indica que comience la continuación a partir de una solución inicial. En este caso se inicializa el parámetro a cero y las dos variables también a cero; todo ello a través de los vectores correspondientes que los definen.

bcnd: Es la función donde se imponen las condiciones de contorno del problema en cuestión. Se definen mediante el vector `fb[]`. A la variable que se le impone la condición se le pone un número delante del corchete que hace referencia al extremo donde se está imponiendo dicha condición.

Las funciones **icnd**, **fopt** y **pvls** se utilizan cuando se definen condiciones de contorno, condiciones de integración, etc... y aunque no contengan nada, deben incluirse siempre en este fichero sin ninguna alteración.

Este fichero, sólo es necesario modificarlo si se quiere partir de otra solución inicial, para lo cual tendríamos que variar únicamente la función **stpnt**. En cualquier otro caso, al permanecer las ecuaciones diferenciales inalterables, no sería necesaria su modificación.

Una vez mostrado un fichero tipo **xxx.c**, explicaremos el otro fichero necesario para trabajar con AUTO, el **c.xxx**.

Este fichero será el que dé a AUTO las condiciones en las que debe realizar la continuación de las ecuaciones definidas en **xxx.c**. A continuación vemos el ejemplo correspondiente al sistema de dos ecuaciones con dos condiciones de contorno considerado anteriormente:

```

2 4 0 1          NDIM,IPS,IRS,ILP
1 0             NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
5 4 3 1 1 3 2 0  NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
50 0.0 4.0 0.0 50.0  NMX,RL0,RL1,A0,A1
50 10 2 8 5 3 0     NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-06 1e-06 0.0001  EPSL,EPSU,EPSS
0.01 0.001 1.0 1    DS,DSMIN,DSMAX,IADS

```

38CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```
0          NTHL,(/,I,THL(I)),I=1,NTHL)
0          NTHU,(/,I,THU(I)),I=1,NTHU)
1          NUZR,(/,I,PAR(I)),I=1,NUZR)
0 2.0
```

Pasemos a explicar los parámetros más importantes de este fichero:

NDIM indica la dimensión del sistema de ecuaciones. En nuestro ejemplo tenemos dos ecuaciones en derivadas primeras.

IPS define el tipo de problema:

IPS=1 Soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales ordinarias con detección de bifurcaciones de Hopf.

IPS=2 Para continuación de soluciones periódicas.

IPS=4 Para problemas con condiciones de contorno.

IRS define la etiqueta de la solución donde la continuación comenzará. Si su valor es cero, como en este caso, el programa tomará como solución inicial la indicada en la función `stpnt`.

ILP tiene dos valores posibles:

ILP=0 No detecta los posibles pliegues de la continuación.

ILP=1 Detecta los pliegues de la continuación (puntos LP).

NICP indica el número de parámetros que tiene nuestro sistema. En realidad, el número de parámetros está definido en el archivo `xxx.c` con un vector llamado `par[]`, y en el **NICP** lo único que indicaremos es cuántos de ellos queremos que aparezcan por pantalla al ejecutar **AUTO**.

ICP depende del valor que hallamos asignado a **NICP**. Deberemos indicar qué parámetros serán los que aparecerán en la continuación y según el orden, cuál será el parámetro de continuación principal y cuál el secundario. En el ejemplo tenemos **NICP=1** porque tenemos un sólo parámetro y al vector **ICP** le ponemos un cero porque queremos continuar dicho parámetro que ocupa la posición cero en el vector de parámetros `par[]` definido en el fichero `xxx.c`.

ISP es el parámetro que controla la detección de puntos de bifurcación (BP), puntos de bifurcación de doble periodo (PD), etc.

ISP=1 Este valor detecta puntos de bifurcación para soluciones que no sean periódicas, y no detecta puntos de bifurcación de doble periodo.

ISP=2 Este valor detecta todos los puntos especiales y es el que se emplea cuando se trabaja con órbitas periódicas.

ISW indica el tipo el tipo de continuación que se va a realizar. Los tres valores que se emplean son:

ISW= 1 Se utiliza para continuar equilibrios con un solo parámetro y para trazar una órbita periódica a partir de un punto de Hopf.

ISW= 2 Se utiliza para continuar puntos límite (PL) y puntos de Hopf (HB), ya que al añadirse implícitamente una ecuación en estos puntos, se nos permite variar un segundo parámetro.

ISW= -1 Se utiliza en órbitas periódicas para continuar puntos de bifurcación (BP) y puntos de bifurcación de doble periodo (PD).

NMX indica el número máximo de iteraciones que le vamos a permitir a la continuación.

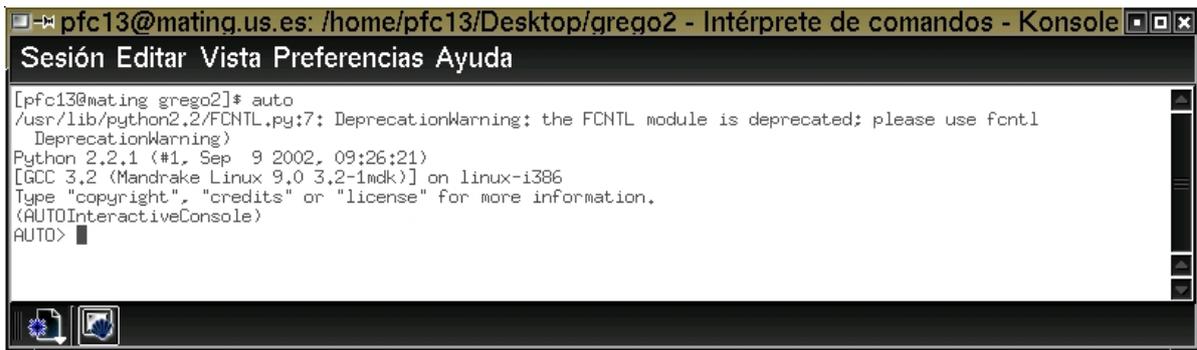
RLO, RL1 indican el valor mínimo y máximo, respectivamente, que puede tomar el parámetro de continuación principal.

NPR Si su valor es inferior a NMX, entonces se mostrarán por pantalla los resultados cada NPR iteraciones. Si su valor es igual a NMX, sólo se mostrarán por pantalla los puntos especiales encontrados (dichos puntos también aparecerán en el caso anterior).

DS indica el tamaño de paso normal entre dos puntos de la misma rama. Además, un cambio de signo, provoca que la continuación se realice en sentido contrario.

DSMIN, DSMAX indican en valor absoluto los tamaños de paso mínimo y máximo admisibles entre dos puntos de una misma rama.

Una vez introducidos los ficheros, nos situamos en el directorio donde se encuentran y desde consola cargamos el programa escribiendo **auto** (en minúsculas).



```

pfc13@mating.us.es: /home/pfc13/Desktop/grego2 - Intérprete de comandos - Konsole
Sesión Editar Vista Preferencias Ayuda
[pfc13@mating grego2]# auto
/usr/lib/python2.2/FCNTL.py:7: DeprecationWarning: the FCNTL module is deprecated; please use fcntl
  DeprecationWarning)
Python 2.2.1 (#1, Sep  9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
AUTO>

```

Figura 3.1: Pantalla obtenida al cargar el programa auto

Dentro del programa, tenemos que cargar los ficheros **xxx.c** y **c.xxx**, que se puede hacer de dos formas:

1. Cargando primero el fichero de ecuaciones y luego el fichero de constantes:

```

AUTO>ld('xxx')
AUTO>r(c='xxx')

```

2. Cargando los dos ficheros a la vez:

```
AUTO>r(e='xxx',c='xxx')
```

Una vez ejecutadas estas órdenes, el programa nos devuelve tres ficheros fort con las extensiones 7, 8 y 9:

fort.7 contiene los valores de los parámetros de continuación para cada una de las iteraciones que nos permitirán dibujar el diagrama de bifurcación.

fort.8 contiene información más extensa de cada una de las órbitas etiquetadas.

fort.9 contiene mensajes de diagnóstico, convergencia de las soluciones, autovalores, etc...

Por medio de estos tres ficheros podremos representar gráficamente la continuación.

3.3. Continuación numérica en los diferentes parámetros

El problema que vamos a resolver es el problema estático del cambio de estabilidad que se produce en un filamento de unas dimensiones determinadas que se encuentra en posición vertical con el extremo inferior empotrado en una base y el extremo superior libre cuando estando sometido únicamente a su propio peso se le hacen modificaciones en la geometría y en las propiedades del material.

La situación que tenemos inicialmente con los valores elegidos para las constantes y parámetros es la del filamento recto en la posición vertical. Esta es una solución de equilibrio del sistema de la que se va a partir para estudiar el efecto que produce la variación de cada parámetro por separado en dicho equilibrio. A la variación de un parámetro a partir de una solución de equilibrio es a lo que se llama hacer la continuación de dicho parámetro.

Primero se va a comprobar que la solución recta es solución sustituyendo los valores de las incógnitas para esta solución en las ecuaciones y viendo que se verifican:

En la solución recta tenemos:

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = \frac{\rho \cdot A_s \cdot g \cdot (s - l)}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2},$$

$$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{s}{l},$$

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0,$$

$$d_{11} = 1, d_{12} = 0, d_{13} = 0,$$

$$d_{21} = 0, d_{22} = 1, d_{23} = 0,$$

$$d_{31} = 0, d_{32} = 0, d_{33} = 1.$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$f'_1 = \ddot{x}_1 \implies 0 = 0, \quad (1a)$$

$$f'_2 = \ddot{x}_2 \implies 0 = 0, \quad (1b)$$

$$f'_3 = \ddot{x}_3 + (\delta - \varepsilon \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)) \implies l \cdot \frac{\rho \cdot A_s \cdot g}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} = 0 + \left(\frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} - 0 \right) \implies \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} = \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l}, \quad (1c)$$

$$\begin{aligned} & (M'_1 \cdot d_{11} + M'_2 \cdot d_{21} + M'_3 \cdot d_{31}) + (M_1 \cdot d'_{11} + M_2 \cdot d'_{21} + M_3 \cdot d'_{31}) + Q \cdot (d_{32} \cdot f_3 - d_{33} \cdot f_2) = \\ & = R \cdot \left(d_{12} \cdot \ddot{d}_{13} - d_{13} \cdot \ddot{d}_{12} \right) + \left(d_{22} \cdot \ddot{d}_{23} - d_{23} \cdot \ddot{d}_{22} \right) \implies \end{aligned}$$

42CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

$$\begin{aligned}
 \implies & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} \cdot \left(0 \cdot \frac{\rho \cdot A_s \cdot g \cdot (s-l)}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} - 1 \cdot 0 \right) = \\
 & = \frac{I_2}{I_1} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) \implies 0 = 0 , \quad (2a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (M'_1 \cdot d_{12} + M'_2 \cdot d_{22} + M'_3 \cdot d_{32}) + (M_1 \cdot d'_{12} + M_2 \cdot d'_{22} + M_3 \cdot d'_{32}) + Q \cdot (d_{33} \cdot f_1 - d_{31} \cdot f_3) = \\
 & = R \cdot \left(d_{13} \cdot \ddot{d}_{11} - d_{11} \cdot \ddot{d}_{13} \right) + \left(d_{23} \cdot \ddot{d}_{21} - d_{21} \cdot \ddot{d}_{23} \right) \implies \\
 \implies & (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} \cdot \left(1 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{\rho \cdot A_s \cdot g \cdot (s-l)}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \right) = \\
 & = \frac{I_2}{I_1} \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 0) \implies 0 = 0 , \quad (2b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (M'_1 \cdot d_{13} + M'_2 \cdot d_{23} + M'_3 \cdot d_{33}) + (M_1 \cdot d'_{13} + M_2 \cdot d'_{23} + M_3 \cdot d'_{33}) + Q \cdot (d_{31} \cdot f_2 - d_{32} \cdot f_1) = \\
 & = R \cdot \left(d_{11} \cdot \ddot{d}_{12} - d_{12} \cdot \ddot{d}_{11} \right) + \left(d_{21} \cdot \ddot{d}_{22} - d_{22} \cdot \ddot{d}_{21} \right) \implies \\
 \implies & (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) + (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = \frac{I_2}{I_1} \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) + \\
 & + (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0) \implies 0 = 0 , \quad (2c)
 \end{aligned}$$

$$x'_1 = d_{31} \implies 0 = 0 , \quad (3a)$$

$$x'_2 = d_{32} \implies 0 = 0 , \quad (3b)$$

$$x'_3 = d_{33} \implies 1 = 1, \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ d'_{13} \end{Bmatrix} &= k_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} - k_2 \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - 0 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \implies \\ &\implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d'_{21} \\ d'_{22} \\ d'_{23} \end{Bmatrix} &= k_1 \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} - k_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - 0 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \implies \\ &\implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d'_{31} \\ d'_{32} \\ d'_{33} \end{Bmatrix} &= k_2 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} - k_1 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - 0 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \implies \\ &\implies \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} M_1 \cdot d_{11} + M_2 \cdot d_{21} + M_3 \cdot d_{31} &= P \cdot R \cdot (k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1) \cdot d_{11} + P \cdot (k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2) \cdot d_{21} + \\ &+ \frac{P \cdot (R+1)}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot (k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3) \cdot d_{31} \implies 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 1 + \\ &+ \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 0 + \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot \frac{(1+R)}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 0 \implies 0 = 0, \end{aligned} \quad (5a)$$

44CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

$$\begin{aligned}
 M_1 \cdot d_{12} + M_2 \cdot d_{22} + M_3 \cdot d_{32} &= P \cdot R \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot d_{12} + P \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot d_{22} + \\
 + \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot d_{32} &\implies 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 0 + \\
 + \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 1 + \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot \frac{(1 + R)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 0 &\implies 0 = 0 , \\
 &\hspace{15em} (5b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 \cdot d_{13} + M_2 \cdot d_{23} + M_3 \cdot d_{33} &= P \cdot R \cdot \left(k_1 + \gamma \cdot \dot{k}_1 \right) \cdot d_{13} + P \cdot \left(k_2 + \gamma \cdot \dot{k}_2 \right) \cdot d_{23} + \\
 + \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \left(k_3 + \gamma \cdot \dot{k}_3 \right) \cdot d_{33} &\implies 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot \frac{I_2}{I_1} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 0 + \\
 + \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 0 + \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} \cdot \frac{(1 + R)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (0 + \gamma \cdot 0) \cdot 1 &\implies 0 = 0 , \\
 &\hspace{15em} (5c)
 \end{aligned}$$

Vemos que se cumplen todas las entidades.

Para hacer todos los cálculos y continuaciones numéricas vamos a considerar que el material del filamento es acero A-42.

Los valores iniciales de los parámetros que se van a continuar son los siguientes:

$$l = 55 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Los valores de los parámetros correspondientes al material del filamento que se han tomado son los del acero A-42 y el valor del parámetro correspondiente a la longitud del filamento se ha tomado de forma arbitraria.

La sección del filamento que vamos a tomar es una rectangular de altura 4mm y base 2mm. El esquema de una sección se representa a continuación:

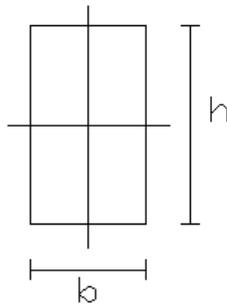


Figura 3.2: Esquema de una sección

h es la altura y b es la base.

El área de esta sección que hemos tomado es $A = b \cdot h = 2 \cdot 4 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

Los momentos de inercia de la sección se calculan con las siguientes fórmulas:

$$I_1 = \frac{h^3 \cdot b}{12} = 1.06 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4,$$

$$I_2 = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 2.66 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4.$$

La fórmula exacta para obtener el parámetro crítico a partir del cual el filamento deja de estar recto es, según las condiciones de contorno, la siguiente [7]:

$$q \cdot l = \frac{7.83 \cdot E \cdot I}{l^2}, \quad (1)$$

con

$$q = \rho \cdot A \cdot g,$$

donde q es la carga por unidad de longitud que actúa sobre el filamento, l es la longitud total del filamento, E es el módulo de Young, I es uno de los momentos de inercia de la sección, ρ es la densidad del material del filamento, A es el área de la sección del filamento, y g es la gravedad.

De esta fórmula se va a despejar el parámetro con el que hagamos la continuación para obtener su valor crítico de manera exacta y poder así comparar con el valor crítico que da el programa. Ambos resultados deben coincidir aproximadamente.

A continuación se van a presentar los resultados obtenidos para la continuación de cada uno de los parámetros así como las gráficas obtenidas.

3.3.1. Continuación en longitud (1)

Empezamos ya a trabajar con auto y a continuación se van a explicar detenidamente los pasos para realizar la continuación en el parámetro l :

En primer lugar nos creamos un fichero del tipo xxx.c al que vamos a llamar estat(1).c ,donde tenemos definidas las ecuaciones, condiciones iniciales y condiciones de contorno de nuestro problema. El contenido de éste se muestra a continuación:

```
#include "auto_f2c.h"
#include "stdio.h"
/* _____ */
/* _____ */
int func (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,
const doublereal *par, integer ijac,
doublereal *f, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp) {
doublereal F1,F2,F3,M1,M2,M3,x1,x2,x3,d11,d12,d13,d21,d22,d23,d31,d32,d33;
doublereal g,w0,l,E,ro,nu;
doublereal h,b;
doublereal pi,As,I1,I2,delta,Q,R,P,k1,k2,k3;
/*...*/
F1 = u[0];
F2 = u[1];
F3 = u[2];
M1 = u[3];
M2 = u[4];
M3 = u[5];
x1 = u[6];
x2 = u[7];
```

```

x3 = u[8];
d11 = u[9];
d12 = u[10];
d13 = u[11];
d21 = u[12];
d22 = u[13];
d23 = u[14];
d31 = u[15];
d32 = u[16];
d33 = u[17];
g=par[0];
w0=par[1];
l=par[2];
E=par[3];
ro=par[4];
nu=par[5];
h=4e-3;
b=2e-3;
As=h*b;
I1=(1.0/12.0)*h*h*h*b;
I2=(1.0/12.0)*b*b*b*h;
delta=g/(w0*w0*1);
Q=As*I1/I1;
R=I2/I1;
P=E/(ro*w0*w0*1);
//printf("%f\n",R);
//Curvaturas en función de los momentos
k1=M1/P;
k2=M2/(P*R);
k3=2*(1+nu)*M3/(P*(R+1));
f[0]=k3*F2-k2*F3+delta*d13;
f[1]=k1*F3-k3*F1+delta*d23;
f[2]=k2*F1-k1*F2+delta*d33;
f[3]=k3*M2-k2*M3+Q*F2;
f[4]=k1*M3-k3*M1-Q*F1;
f[5]=k2*M1-k1*M2;
f[6]=d31;
f[7]=d32;
f[8]=d33;
f[9]=k3*d21-k2*d31;
f[10]=k3*d22-k2*d32;

```

48CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```

f[11]=k3*d23-k2*d33;
f[12]=k1*d31-k3*d11;
f[13]=k1*d32-k3*d12;
f[14]=k1*d33-k3*d13;
f[15]=k2*d11-k1*d21;
f[16]=k2*d12-k1*d22;
f[17]=k2*d13-k1*d23;
return 0;
}
/* _____ */
/* _____ */
int stpnt (integer ndim, doublereal t,
doublereal *u, doublereal *par) {
doublereal delta;
// Initialize the equation parameters
par[0]=(doublereal)9.8;
par[1]=(doublereal)1.0;
par[2]=(doublereal)55.0e-2;
par[3]=(doublereal)2.1e11;
par[4]=(doublereal)7850.0;
par[5]=(doublereal)0.3;
delta=par[0]/(par[1]*par[1]*par[2]);
/* Initialize the solution */
u[0] = (doublereal)0.;
u[1] = (doublereal)0.;
u[2] = (doublereal)delta*(t-1.0);
u[3] = (doublereal)0.;
u[4] = (doublereal)0.;
u[5] = (doublereal)0.;
u[6] = (doublereal)0.;
u[7] = (doublereal)0.;
u[8] = (doublereal)t;
u[9] = (doublereal)1.0;
u[10] = (doublereal)0.;
u[11] = (doublereal)0.;
u[12] = (doublereal)0.;
u[13] = (doublereal)1.0;
u[14] = (doublereal)0.;
u[15] = (doublereal)0.;
u[16] = (doublereal)0.;
u[17] = (doublereal)1.0;

```

```

return 0;
}
/* The following subroutines are not used here, */
/* but they must be supplied as dummy routines */
/* _____ */
/* _____ */
int bcnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
integer nbc, const doublereal *u0, const doublereal *u1, integer ijac,
doublereal *fb, doublereal *dbc) {
    doublereal
    F10,F20,F30,M10,M20,M30,x10,x20,x30,d110,d120,d130,d210,d220,d230,d310,d320,d330;
    doublereal
    F1,F2,F3,M1,M2,M3,x1,x2,x3,d11,d12,d13,d21,d22,d23,d31,d32,d33;
/*variables en s=0*/
F10 = u0[0];
F20 = u0[1];
F30 = u0[2];
M10 = u0[3];
M20 = u0[4];
M30 = u0[5];
x10 = u0[6];
x20 = u0[7];
x30 = u0[8];
d110 = u0[9];
d120 = u0[10];
d130 = u0[11];
d210 = u0[12];
d220 = u0[13];
d230 = u0[14];
d310 = u0[15];
d320 = u0[16];
d330 = u0[17];
fb[0]=x10;
fb[1]=x20;
fb[2]=x30;
fb[3]=d110-1.0;
fb[4]=d120;
fb[5]=d130;
fb[6]=d210;
fb[7]=d220-1.0;
fb[8]=d230;

```

50CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```

fb[9]=d310;
fb[10]=d320;
fb[11]=d330-1.0;
/*variables en s=1*/
F1 = u1[0];
F2 = u1[1];
F3 = u1[2];
M1 = u1[3];
M2 = u1[4];
M3 = u1[5];
x1 = u1[6];
x2 = u1[7];
x3 = u1[8];
d11 = u1[9];
d12 = u1[10];
d13 = u1[11];
d21 = u1[12];
d22 = u1[13];
d23 = u1[14];
d31 = u1[15];
d32 = u1[16];
d33 = u1[17];
fb[12]=F1*d11+F2*d21+F3*d31;
fb[13]=F1*d12+F2*d22+F3*d32;
fb[14]=F1*d13+F2*d23+F3*d33;
fb[15]=M1*d11+M2*d21+M3*d31;
fb[16]=M1*d12+M2*d22+M3*d32;
fb[17]=M1*d13+M2*d23+M3*d33;
return 0;
}
/* _____ */
/* _____ */
int icnd (integer ndim, const doublereal *par, const integer *icp,
integer nint, const doublereal *u, const doublereal *uold,
const doublereal *udot, const doublereal *upold, integer ijac,
doublereal *fi, doublereal *dint) {
return 0;
}
/* _____ */
/* _____ */
int foft (integer ndim, const doublereal *u, const integer *icp,

```

```

const doublereal *par, integer ijac,
doublereal *fs, doublereal *dfdu, doublereal *dfdp) {
return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */
int pvls (integer ndim, const doublereal *u,
doublereal *par) {
doublereal det;
extern doublereal getp();
det = getp("BIF", 1, u);
return 0;
}
/* ----- */
/* ----- */

```

El contenido de este fichero tipo xxx.c se usará sin ningún cambio para la continuación de los demás parámetros ya que tanto las ecuaciones como las condiciones iniciales y de contorno van a seguir siendo las mismas.

A continuación se crea el correspondiente fichero c.xxx que contiene los parámetros de la continuación, que tiene que tener el mismo nombre: el c.estat-1. Su contenido es:

18 4 0 1	NDIM,IPS,IRS,ILP
1 2	NICP,(ICP(I),I=1 NICP)
50 4 3 2 1 0 18 0	NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
300 -5 100 -10.00 5000000000000.0	NMX,RL0,RL1,A0,A1
1 10 2 10 5 3 0	NPR,MXBF,IID,ITMX,ITNW,NWTN,JA
1e-8 1e-8 1e-6	EPSL,EPSU,EPSS
0.1 1e-05 0.1 1	DS,DSMIN,DSMAX,IADS
0	NTHL,(/I,THL(I)),I=1,NTHL)
0	NTHU,(/I,THU(I)),I=1,NTHU)
0	NUZR,(/I,PAR(I)),I=1,NUZR)

Los parámetros más relevantes de este fichero son:

IRS=0. Partimos del equilibrio dado en la función stpnt.

ISW=1. Continuamos un sólo parámetro (en este caso 1).

NMX=300. Haremos un máximo de 300 iteraciones.

NPR=0. Sólo se mostrarán etiquetas en los puntos especiales.

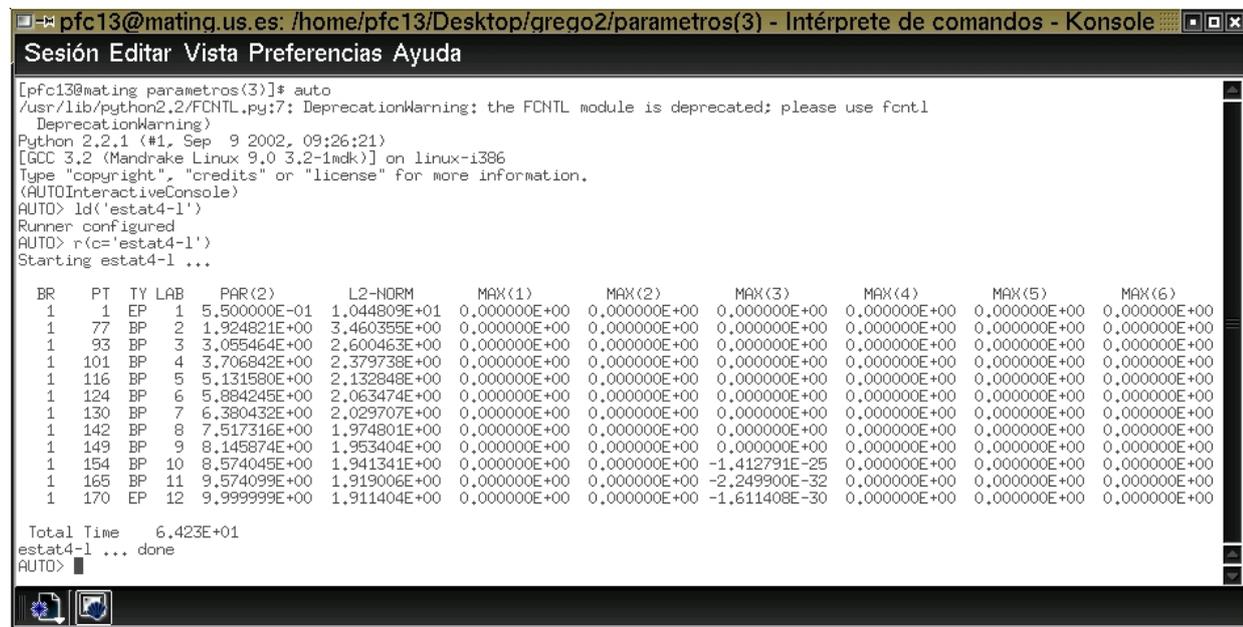
DSMAX=0.1. El paso máximo entre dos iteraciones no puede ser superior a 0.1.

52CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Una vez creados los dos archivos ejecutaremos AUTO y veremos los resultados obtenidos por pantalla. Para ello, nos situamos en el directorio donde hemos creado los archivos y abrimos un terminal en la pestaña 'Herramientas' del menú. Dentro de esta pantalla tecleamos lo siguiente:

```
auto
AUTO>ld('estat-1')
AUTO>r(c='estat-1')
```

Introducidas estas órdenes AUTO comienza a ejecutar la continuación. La salida por pantalla se muestra en la foto siguiente. Si en el archivo c.estat-1 le hubieramos dado a NPR un valor superior a 0 pero inferior a 300, podríamos ver cómo el programa coloca etiquetas en todos los puntos intermedios aparte de los especiales. De esta forma se vería la evolución de los parámetros y de las variables independientes. Sin embargo, no hace falta hacerlo de esta manera porque AUTO es capaz de representar gráficamente la solución de la continuación, donde se ve el resultado más claramente. Además podemos ver como AUTO nos etiqueta los puntos representados con unos determinados números que, como se verá posteriormente, nos servirán para hacer referencia a dichos puntos.



```
[pfc13@mating parametros(3)]# auto
/usr/lib/python2.2/FCNTL.py:7: DeprecationWarning: the FCNTL module is deprecated; please use fcntl
  DeprecationWarning)
Python 2.2.1 (#1, Sep  9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
AUTO> ld('estat4-1')
Runner configured
AUTO> r(c='estat4-1')
Starting estat4-1 ...

BR   PT  TY  LAB   PAR(2)      L2-NORM      MAX(1)      MAX(2)      MAX(3)      MAX(4)      MAX(5)      MAX(6)
1     1   EP   1    5.500000E-01  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    77  BP   2    1.924821E+00  3.460355E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    93  BP   3    3.055464E+00  2.600463E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   101  BP   4    3.706842E+00  2.379738E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   116  BP   5    5.131580E+00  2.132848E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   124  BP   6    5.884245E+00  2.063474E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   130  BP   7    6.380432E+00  2.029707E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   142  BP   8    7.517316E+00  1.974801E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   149  BP   9    8.145874E+00  1.953404E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   154  BP  10    8.574045E+00  1.941341E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -1.412791E-25  0.000000E+00  0.000000E+00
1   165  BP  11    9.574099E+00  1.919006E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -2.249900E-32  0.000000E+00  0.000000E+00
1   170  EP  12    9.999999E+00  1.911404E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -1.611408E-30  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time      6.423E+01
estat4-1 ... done
AUTO>
```

Figura 3.3: Ejecución de la continuación en longitud

Observando el resultado de las iteraciones, podemos ver que se han obtenido unos puntos especiales que aparecen con el nombre de '**BP**'. Estos se denominan puntos de bifurcación y cada vez que aparece uno de ellos significa que hay un cambio de estabilidad en el sistema. Entonces si el filamento está inicialmente recto, como hemos impuesto en las condiciones iniciales, al aparecer el primer punto BP empieza a doblarse tanto más cuanto más vayamos aumentando la longitud. Este pandeo inicial se va a producir según el eje de menor inercia del filamento, que en nuestro caso es el e_2 , y posteriormente cuando aparezca el segundo punto BP es cuando se producirá el pandeo según el eje de mayor inercia e_1 . Así sucesivamente, el tercer BP corresponderá otra vez al pandeo según el eje e_2 y el cuarto BP al pandeo según el eje e_1 , pero estos dos nuevos pandeos se producen ya de una forma diferente a los dos anteriores. Por tanto, tenemos que los BP impares corresponden a distintos modos de pandeo según el eje respecto al cual el filamento tiene la menor inercia e_2 y los pares a distintos modos de pandeo según el eje de mayor inercia e_1 .

Para guardar el resultado que hemos obtenido por pantalla utilizamos el siguiente comando:

```
AUTO>sv('rama1-1')
```

En el espacio entre las comillas ponemos el nombre con el que queremos guardar el resultado.

Al introducir este comando se generan tres ficheros en el directorio en el que estamos trabajando:

b.rama1-1 : contiene los valores del parámetro de continuación para cada una de las iteraciones, y nos permitirá dibujar la solución.

s.rama1-1 : contiene información más extensa de cada una de las iteraciones etiquetadas.

d.rama1-1 : contiene mensajes de diagnóstico, convergencia de soluciones, autovalores, etc.

Para representar gráficamente la solución recurrimos al comando *plot* o *pl*. Si lo llamamos sin pasarle ningún argumento, representará lo que encuentre en los ficheros fort7, fort8 y fort9. Sin embargo, si queremos que nos represente la gráfica correspondiente a unos determinados ficheros de solución b.xxx, s.xxx y d.xxx, entonces le tendremos que pasar como parámetro el nombre 'xxx' que hayamos utilizado para guardar el resultado obtenido por pantalla. Entonces para representar la gráfica de 'rama1-1' tendremos que escribir:

```
AUTO>pl('rama1-1')
```

Nos sale un cuadro y pulsamos una pestaña que pone bifurcación para obtener el llamado diagrama de bifurcación. En este diagrama vamos a representar la norma, que es un valor promedio de las variables independientes que obtiene el programa y que se sitúa en la segunda columna después de la columna de las etiquetas del resultado que nos ha dado auto, frente al parámetro de continuación, que es la longitud y se halla en la primera columna después de las etiquetas. Para ello, aparecen unas pestañas con una enumeración de 0 a 7 para seleccionar en cada eje la columna que se desee, siendo el 0 el valor referente a la primera columna después de las etiquetas y el 7 a la última. En este diagrama es donde se ve el comportamiento del sistema en las sucesivas iteraciones de la continuación, mediante la representación de los puntos especiales como los 'BP', y de líneas de la evolución del sistema que denominamos ramas.

Un vez que lo tenemos, lo guardamos en un fichero con el nombre 'rama1-l'. A continuación se muestra:

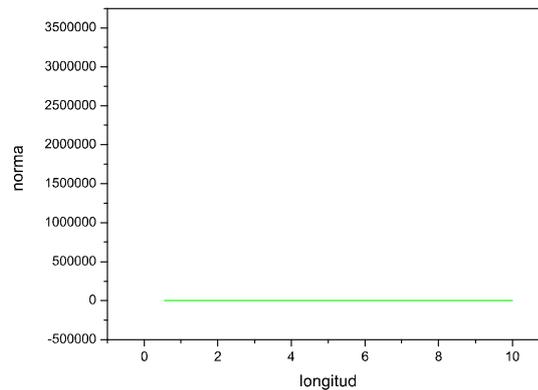


Figura 3.4: Rama 1 de la continuación en longitud

Vemos que nos ha salido una línea horizontal que se corresponde con la solución de filamento recto porque no hay ninguna variación frente al parámetro de continuación l . Esta línea es lo que llamamos la rama principal de la continuación, por lo cual la hemos guardado en el fichero con el nombre de 'rama1-l'. En esta rama aparecen marcadas todas las etiquetas que el programa ha creado, entre ellas la de los BP. Entonces lo que ocurre es que en cada punto BP se produce una bifurcación, apareciendo dos ramas nuevas que representan el cambio de estabilidad y por las que el sistema va a ir variando en sus variables. Por tanto, cuando aparece el primer BP el filamento deja de estar recto pasando a doblarse y el sistema ya no sigue por

la línea horizontal sino por alguna de las dos ramificaciones. La consecuencia de esto es que en cada BP tenemos que volver a hacer continuación para obtener la nuevas ramas.

Ahora procedemos a hacer el cambio de rama. Lo único que hay que modificar es el fichero de constantes (c.estat-1), que lo abrimos y hacemos los siguientes cambios:

IRS=2. Para que comience a partir de la etiqueta 2, que es la que corresponde al BP.

ISW=-1. Para que haga el cambio de rama.

NMX=1000. Aumentamos el número de iteraciones a 1000.

NPR=100. Para que coloque una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=5000. Aumentamos el paso máximo hasta 5000 para dar más rapidez.

Posteriormente se guardan estos cambios pero en otro fichero con otro nombre que va a ser 'c.estat.1-1'.

Para hacer la continuación tenemos que decirle al programa que con el mismo fichero de ecuaciones, que ya lo tenemos cargado de antes (cuando hicimos ld ('estat-1')), ejecute el fichero de constantes 'c.estat.1-1' a partir de la solución 'rama1-1'. Esto lo hacemos con la siguiente orden:

```
AUTO>r(s='rama1-1',c='estat.1-1')
```

Este resultado lo guardamos con el nombre de 'rama2-1' de la misma forma que antes:

```
sv('rama2-1')
```

Lo que nos sale por pantalla tras esta segunda ejecución se muestra en la siguiente foto:

56CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```

pfc13@mating.us.es: /home/pfc13/Desktop/grego2/parametros(3) - Intérprete de comandos - Konsole
Sesión Editar Vista Preferencias Ayuda

[pfc13@mating parametros(3)]$ auto
/usr/lib/python2.2/FCNTL.py:7: DeprecationWarning: the FCNTL module is deprecated; please use fcntl
  DeprecationWarning)
Python 2.2.1 (#1, Sep  9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
(AUTO) ld('estat4-1')
Runner configured
(AUTO) r(c='estat4-1')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(2)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
1    1  EP   1  5.500000E-01  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    77  BP   2  1.924821E+00  3.460355E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    93  BP   3  3.055464E+00  2.600463E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   101  BP   4  3.706842E+00  2.379738E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   116  BP   5  5.131580E+00  2.132848E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   124  BP   6  5.884245E+00  2.063474E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   130  BP   7  6.380432E+00  2.029707E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   142  BP   8  7.517316E+00  1.974801E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   149  BP   9  8.145874E+00  1.953404E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   154  BP  10  8.574045E+00  1.941341E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -1.412791E-25  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   165  BP  11  9.574099E+00  1.919006E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -2.249900E-32  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   170  EP  12  9.999999E+00  1.911404E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  -1.611408E-30  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time  6.423E+01
estat4-1 ... done
(AUTO) sv('rama1-1')
Saving fort.7 as b.rama1-1 ... done
Saving fort.8 as s.rama1-1 ... done
Saving fort.9 as d.rama1-1 ... done
(AUTO) r(s='rama1-1',c='estat4-1.1')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(2)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
2   100  13  1.927242E+00  4.126145E+05  4.062170E-01  0.000000E+00  -3.295638E-29  0.000000E+00  7.151188E+05  0.000000E+00  0.000000E+00
2   200  14  1.936948E+00  9.126108E+05  8.926601E-01  0.000000E+00  1.051941E-223  0.000000E+00  1.585678E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   300  15  1.955195E+00  1.412576E+06  1.365785E+00  0.000000E+00  -3.186183E-28  0.000000E+00  2.466058E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   400  16  1.984573E+00  1.912399E+06  1.817310E+00  0.000000E+00  6.341340E-28  0.000000E+00  3.364310E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   500  17  2.030802E+00  2.411657E+06  2.237675E+00  0.000000E+00  2.881810E-27  0.000000E+00  4.294178E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   600  18  2.109235E+00  2.908332E+06  2.613238E+00  0.000000E+00  2.487265E-27  0.000000E+00  5.286152E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   700  19  2.295271E+00  3.376923E+06  2.905849E+00  0.000000E+00  5.318736E-01  0.000000E+00  6.445597E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   800  20  2.761861E+00  3.299709E+06  2.817031E+00  0.000000E+00  1.335303E+00  0.000000E+00  7.107546E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2   900  21  3.175208E+00  2.940314E+06  2.592371E+00  0.000000E+00  1.531135E+00  0.000000E+00  7.006766E+06  0.000000E+00  0.000000E+00
2  1000  EP  22  3.634182E+00  2.556462E+06  2.351225E+00  0.000000E+00  1.569273E+00  0.000000E+00  6.749332E+06  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time  2.934E+02
estat4-1 ... done
(AUTO) █

```

Figura 3.5: Resultado de la ejecución del cambio de rama

Para ver lo que nos ha salido volvemos a utilizar *pl*:

```
pl('rama2-1')
```

La gráfica es la que sigue:

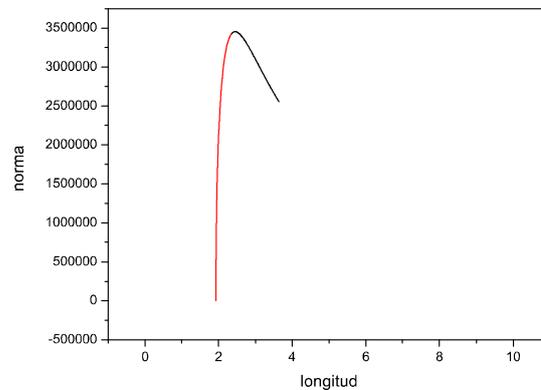


Figura 3.6: Rama 2 de la continuación en longitud

Podemos ver que de las dos ramas sólo aparece dibujada la superior porque la inferior es simétrica a la superior respecto a la rama principal. Esta simetría se debe a que como la sección es simétrica respecto a los dos ejes principales de inercia, existe la misma posibilidad de pandeo en las dos direcciones perpendiculares al eje de inercia en torno al cual se produce dicho pandeo.

Si queremos representar las dos ramas en el mismo gráfico podemos hacer uso de una orden mediante la cual el contenido de un fichero se puede agregar al contenido de otro fichero distinto quedando los dos enlazados en este último. Esta orden es la *ap*, y lo que vamos a hacer es unir el fichero 'rama2-l' al 'rama1-l' quedando todo enlazado en el 'rama1-l'. El comando se escribe de la siguiente forma:

```
AUTO>ap('rama2-l','rama1-l')
```

Para ver como queda todo junto sólo tenemos que pasar al comando *pl* el nombre del fichero que contiene todo, que es el 'rama1-l':

```
AUTO>pl('rama1-l')
```

La gráfica es la que se muestra a continuación:

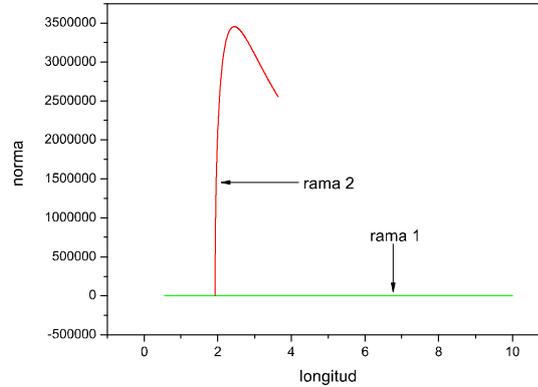


Figura 3.7: Ramas 1 y 2 de la continuación en longitud

El valor crítico de la longitud a partir del cual el filamento padea inicialmente es el correspondiente al primer BP de la continuación, que es $l_p = 1.924821m$.

Calculando dicho valor con la fórmula (1) de 3.3 tenemos:

$$l_f = \sqrt[3]{\frac{7.83 \cdot E \cdot I}{q}} = \sqrt[3]{\frac{7.83 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 2.66 \cdot 10^{-12}}{0.6154}} = 1.922656m.$$

Viendo los dos números podemos ver la coincidencia aproximada.

El valor crítico para el que se produce el pandeo según el eje de mayor inercia es el que corresponde al segundo BP, que es $l_p = 3.05546$. Calculandolo con la fórmula (1) de 3.3 tenemos:

$$l_f = \sqrt[3]{\frac{7.83 \cdot E \cdot I}{q}} = \sqrt[3]{\frac{7.83 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 1.06 \cdot 10^{-11}}{0.6154}} = 3.04820m.$$

Igualmente podemos ver la aproximación entre los dos números.

Para las dos inercias tenemos que el resultado obtenido mediante continuación numérica es algo mayor al obtenido con la fórmula exacta porque el método de continuación va buscando el punto crítico a base de ir incrementando el parámetro de continuación, con lo cual después del último incremento una vez que ha encontrado la inestabilidad, es difícil que el valor del parámetro coincida exactamente con el teórico y lo normal es que lo sobrepase una pequeña cantidad.

3.3.2. Continuación en gravedad (g), densidad (ρ) y módulo de Young (E)

Para demostrar la coherencia del resultado de AUTO con el que nos da la fórmula teórica, vamos a realizar también la continuación de los parámetros gravedad, densidad y módulo de Young para ver que el valor crítico de estos parámetros coincide aproximadamente con el que obtenemos de despejar en la fórmula (1) de 3.3.

- Continuación en gravedad (g)

Teniendo cargado el fichero de ecuaciones anterior, el 'estat-1', creamos un nuevo fichero de constantes para hacer la continuación en gravedad. Le vamos a llamar 'c.estat-g' y sus parámetros más importantes son:

IRS=0. Partimos del equilibrio dado en la función stpnt.

ISW=1. Continuamos un sólo parámetro (en este caso g).

NMX=1000. Haremos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=0. Sólo se mostrarán etiquetas en los puntos especiales.

DSMAX=5. El paso máximo entre dos iteraciones lo limitamos a 5.

Hacemos la continuación tecleando lo siguiente:

```
auto
AUTO>ld('estat-1')
AUTO>r(c='estat-g')
```

Salvamos la solución con el nombre de 'rama1-g':

```
AUTO>sv('rama1-g')
```

Hacemos el cambio de rama a partir de esta primera solución. Para ello entramos en el archivo de constantes 'c.estat-g' y hacemos los siguientes cambios:

IRS=2. Para que comience a partir de la etiqueta 2, que es la que corresponde al BP.

ISW=-1. Para que haga el cambio de rama.

NMX=2000. Aumentamos el número de iteraciones a 2000.

NPR=100. Para que coloque una etiqueta cada 100 iteraciones.

60CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

DSMAX=50. Aumentamos el paso máximo hasta 50 para dar más rapidez.

Guardamos estos cambios con el nombre de 'c.estat-g.1' y hacemos el cambio de rama tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-g',c='estat-g.1')
```

Guardamos el resultado con el nombre de 'rama2-g':

```
sv('rama2-g')
```

Los resultados obtenidos por pantalla de ambas ejecuciones se muestran a continuación:

```

[ppfc13@mating.us.es: /home/ppfc13/Desktop/grego2/parametros(3) - Intérprete de comandos - Konsole]
Sesión Editar Vista Preferencias Ayuda

[ppfc13@mating.us.es: /home/ppfc13/Desktop/grego2/parametros(3)]# auto
/usr/lib/python2.2/FCNTL.py:7: DeprecationWarning: the FCNTL module is deprecated; please use fcntl
  DeprecationWarning()
Python 2.2.1 (#1, Sep  9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
(AUTO) ld('estat4-1')
Runner configured
(AUTO) r(c='estat4-g')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(0)  L2-NDRM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
1    1    EP   1  9.800000E+00  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   123  BP   2  4.200582E+02  4.409505E+02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   489  BP   3  1.680233E+03  1.763788E+03  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   582  EP   4  2.000973E+03  2.100478E+03  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time  8.271E+01
estat4-1 ... done
(AUTO) sv('rama1-g')
Saving fort.7 as b.rama1-g ... done
Saving fort.8 as s.rama1-g ... done
Saving fort.9 as d.rama1-g ... done
(AUTO) r(s='rama1-g',c='estat4-g.1')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(0)  L2-NDRM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
2    100  5  4.200582E+02  4.667377E+03  5.611710E-02  0.000000E+00  -5.490586E-45  0.000000E+00  8.047975E+03  0.000000E+00
2    200  6  4.200582E+02  9.656574E+03  1.165025E-01  0.000000E+00  6.942376E-33  0.000000E+00  1.670823E+04  0.000000E+00
2    300  7  4.200582E+02  1.465314E+04  1.768909E-01  0.000000E+00  7.818073E-33  0.000000E+00  2.536848E+04  0.000000E+00
2    400  8  4.200582E+02  1.965145E+04  2.372787E-01  0.000000E+00  -7.583351E-34  0.000000E+00  3.402874E+04  0.000000E+00
2    500  9  4.200582E+02  2.465045E+04  2.976647E-01  0.000000E+00  -6.475942E-33  0.000000E+00  4.268900E+04  0.000000E+00
2    600  10 4.200582E+02  2.964978E+04  3.580534E-01  0.000000E+00  1.280744E-32  0.000000E+00  5.134925E+04  0.000000E+00
2    700  11 4.200582E+02  3.464931E+04  4.184388E-01  0.000000E+00  -1.475745E-32  0.000000E+00  6.000951E+04  0.000000E+00
2    800  12 4.200582E+02  3.964896E+04  4.788276E-01  0.000000E+00  6.906873E-32  0.000000E+00  6.866876E+04  0.000000E+00
2    900  13 4.200583E+02  4.464868E+04  5.392131E-01  0.000000E+00  4.114272E-32  0.000000E+00  7.733002E+04  0.000000E+00
2   1000 EP  14 4.200583E+02  4.964846E+04  5.995987E-01  0.000000E+00  -3.579828E-32  0.000000E+00  8.599027E+04  0.000000E+00

Total Time  1.416E+02
estat4-1 ... done
(AUTO) sv('rama2-g')
Saving fort.7 as b.rama2-g ... done
Saving fort.8 as s.rama2-g ... done
Saving fort.9 as d.rama2-g ... done
(AUTO)

```

Figura 3.8: Ejecución de la continuación en gravedad

Ahora pasamos a comparar los resultados de auto con los teóricos que nos da la fórmula.

Resultado del programa correspondiente a la dirección de menor inercia (primer BP):

$$g_p = 420.058m/s^2.$$

Resultado de la fórmula según la dirección de menor inercia:

$$g_f = \frac{7.83 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot \rho \cdot A} = \frac{7.83 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 2.66 \cdot 10^{-12}}{(55 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 7850 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 418.615m/s^2.$$

Resultado del programa correspondiente a la dirección de mayor inercia (segundo BP):

$$g_p = 1680.233m/s^2.$$

Resultado de la fórmula según la dirección de mayor inercia:

$$g_f = \frac{7.83 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot \rho \cdot A} = \frac{7.83 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 1.06 \cdot 10^{-11}}{(55 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 7850 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 1668.165m/s^2.$$

Para las dos inercias comprobamos que los resultados obtenidos de las dos formas son aproximadamente iguales y que el resultado obtenido mediante continuación numérica es algo mayor al obtenido con la fórmula exacta debido al motivo explicado en la continuación anterior de que la continuación numérica se realiza mediante incrementos del parámetro y el último incremento hasta encontrar la inestabilidad hace que el valor del parámetro sobrepase un poco el valor exacto.

- Continuación en densidad (ρ)

Creamos un nuevo fichero de constantes para hacer la continuación en densidad. Le vamos a llamar 'c.estat-ro' y sus parámetros más importantes son:

IRS=0. Partimos del equilibrio dado en la función stpnt.

ISW=1. Continuamos un sólo parámetro (en este caso ρ).

NMX=1000. Haremos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=0. Sólo se mostrarán etiquetas en los puntos especiales.

DSMAX=500. El paso máximo entre dos iteraciones no puede ser superior a 500.

Hacemos la continuación tecleando lo siguiente:

```
auto
AUTO>ld('estat-1')
AUTO>r(c='estat-ro')
```

Salvamos la solución con el nombre de 'rama1-ro':

```
AUTO>sv('rama1-ro')
```

Hacemos el cambio de rama. Entramos en el archivo de constantes 'c.estat-ro' y hacemos los siguientes cambios:

IRS=2. Para que comience a partir de la etiqueta 2, que es la que corresponde al BP.

ISW=-1. Para que haga el cambio de rama.

NMX=1000. Aumentamos el número de iteraciones a 1000.

NPR=100. Para que coloque una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=5000. Aumentamos el paso máximo hasta 5000 para dar más rapidez.

Guardamos estos cambios con el nombre de 'c.estat-ro.1' y hacemos el cambio de rama tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-ro',c='estat-ro.1')
```

Guardamos el resultado con el nombre de 'rama2-ro':

```
sv('rama2-ro')
```

Los resultados obtenidos por pantalla de ambas ejecuciones se muestran a continuación:

64CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```
[pfc13@mating.us.es: /home/pfc13/Desktop/grego2/parametros(3) - Intérprete de comandos - Konsole]
Sesión Editar Vista Preferencias Ayuda

[pfc13@mating parametros(3)]$ auto
/usr/lib/python2.2/FCTL.py:7: DeprecationWarning: the FCTL module is deprecated; please use fontl
  DeprecationWarning)
Python 2.2.1 (#1, Sep 9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
AUTO> ld('estat4-1')
Runner configured
AUTO> r(c='estat4-ro')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(4)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
1    1  EP   1  7.850000E+03  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    84  BP   2  3.364752E+05  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   286  BP   3  1.345901E+06  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   498  BP   4  2.403224E+06  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   500  EP   5  2.413224E+06  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time 7.124E+01
estat4-1 ... done
AUTO> sv('rama1-ro')
Saving fort.7 as b.rama1-ro ... done
Saving fort.8 as s.rama1-ro ... done
Saving fort.9 as d.rama1-ro ... done
AUTO> r(s='rama1-ro',c='estat4-ro.1')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(4)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
2    3  LP   6  3.364752E+05  1.045039E+01  2.650475E-06  0.000000E+00  -1.743535E-44  0.000000E+00  3.801049E-01  0.000000E+00
2   100  7  3.538307E+05  4.097619E+05  5.011212E+00  0.000000E+00  3.768116E-26  0.000000E+00  7.157613E+05  0.000000E+00
2   200  8  5.560756E+05  8.104596E+05  1.197368E+01  0.000000E+00  1.952203E+00  0.000000E+00  1.539004E+06  0.000000E+00
2   300  9  1.016360E+06  6.490714E+05  1.419828E+01  0.000000E+00  6.839002E+00  0.000000E+00  1.405372E+06  0.000000E+00
2   400  10 1.493454E+06  5.130832E+05  1.494733E+01  0.000000E+00  8.790779E+00  0.000000E+00  1.219249E+06  0.000000E+00
2   500  11 1.983870E+06  4.240449E+05  1.536687E+01  0.000000E+00  9.910443E+00  0.000000E+00  1.082323E+06  0.000000E+00
2   600  12 2.479423E+06  3.630991E+05  1.564435E+01  0.000000E+00  1.066391E+01  0.000000E+00  9.811564E+05  0.000000E+00
2   700  13 2.977104E+06  3.189773E+05  1.584628E+01  0.000000E+00  1.121896E+01  0.000000E+00  9.034736E+05  0.000000E+00
2   800  14 3.475776E+06  2.855246E+05  1.600168E+01  0.000000E+00  1.165119E+01  0.000000E+00  8.416631E+05  0.000000E+00
2   900  15 3.974957E+06  2.592275E+05  1.612455E+01  0.000000E+00  1.200126E+01  0.000000E+00  7.910456E+05  0.000000E+00
2  1000  EP  16 4.474423E+06  2.379599E+05  1.622424E+01  0.000000E+00  1.229289E+01  0.000000E+00  7.486320E+05  0.000000E+00

Total Time 3.174E+02
estat4-1 ... done
AUTO> sv('rama2-ro')
Saving fort.7 as b.rama2-ro ... done
Saving fort.8 as s.rama2-ro ... done
Saving fort.9 as d.rama2-ro ... done
AUTO>
```

Figura 3.9: Ejecución de la continuación en densidad

Comparamos los resultados de auto con los de la fórmula.

Resultado del programa para la dirección de menor inercia (primer 'BP'):

$$\rho_p = 3.364752 \cdot 10^5 \text{ Kg/m}^3.$$

Resultado de la fórmula para la menor inercia:

$$\rho_f = \frac{7.83 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot A \cdot g} = \frac{7.83 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 2.66 \cdot 10^{-12}}{(55 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8} = 3.353193 \cdot 10^5 \text{ Kg/m}^3.$$

Resultado del programa para la dirección de mayor inercia (segundo 'BP'):

$$\rho_p = 13.459 \cdot 10^5 \text{ Kg/m}^3.$$

Resultado de la fórmula según la mayor inercia:

$$\rho_f = \frac{7.83 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot A \cdot g} = \frac{7.83 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 1.06 \cdot 10^{-11}}{(55 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8} = 13.362 \cdot 10^5 \text{ Kg/m}^3.$$

Al igual que en la continuación de los parámetros anteriores comprobamos que los resultados obtenidos de las dos formas son aproximadamente iguales para las dos inercias y que el resultado obtenido mediante continuación numérica es algo mayor al obtenido con la fórmula exacta.

■ Continuación en módulo de Young (E)

Creamos un nuevo fichero de constantes para hacer la continuación en módulo de Young. Le vamos a llamar 'c.estat-E' y sus parámetros más importantes son:

IRS=0. Partimos del equilibrio dado en la función stpnt.

ISW=1. Continuamos un sólo parámetro (en este caso E).

NMX=500. Haremos un máximo de 500 iteraciones.

NPR=0. Sólo se mostrarán etiquetas en los puntos especiales.

DSMAX=0.5e9. El paso máximo entre dos iteraciones no puede ser superior a 0.5e9.

DS=- 0.1. Le damos un valor negativo al paso inicial para que la continuación la haga disminuyendo el parámetro de continuación, es decir decreciendo E a partir de su valor inicial.

Hacemos la continuación tecleando lo siguiente:

```
auto
AUTO>ld('estat-1')
AUTO>r(c='estat-E')
```

Salvamos la solución con el nombre de 'rama1-E':

```
AUTO>sv('rama1-E')
```

66CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Hacemos el cambio de rama. Entramos en el archivo de constantes 'c.estat-E' y hacemos los siguientes cambios:

IRS=2. Para que comience a partir de la etiqueta 2, que es la que corresponde al BP.

ISW=-1. Para que haga el cambio de rama.

NMX=400. Aumentamos el número de iteraciones a 400.

NPR=100. Para que coloque una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=1e9. Aumentamos el paso máximo hasta 1e9 para dar más rapidez.

Guardamos estos cambios con el nombre de 'c.estat-E.1' y hacemos el cambio de rama tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-E',c='estat-E.1')
```

Guardamos el resultado con el nombre de 'rama2-E':

```
sv('rama2-E')
```

Los resultados obtenidos por pantalla de ambas ejecuciones se muestran a continuación:

```

/usr/lib/python2.2/FCNTL.py:7: DeprecationWarning: the FCNTL module is deprecated; please use fcntl
  DeprecationWarning)
Python 2.2.1 (#1, Sep  9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
AUTO> ld('estat4-1')
Runner configured
AUTO> r(c='estat4-E')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(3)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
1    1  EP   1  2.100000E+11  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   445 BP   2  4.861161E+09  1.040807E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   453 BP   3  1.224830E+09  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1   456 EP   4 -2.751698E+08  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time  1.293E+02
estat4-1 ... done
AUTO> sv('rama1-E')
Saving fort.7 as b.rama1-E ... done
Saving fort.8 as s.rama1-E ... done
Saving fort.9 as d.rama1-E ... done
AUTO> r(s='rama1-E',c='estat4-E.1')
Starting estat4-1 ...

BR  PT  TY LAB  PAR(3)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
2    3  BP   5  4.899318E+09  1.044809E+01  2.009350E-40  0.000000E+00  1.203152E-42  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
2   18  BP   6  4.899322E+09  1.044809E+01  1.238182E-61  0.000000E+00  6.298009E-140  0.000000E+00  1.775941E-56  0.000000E+00
2   100  7  7.061731E+10  1.044809E+01  3.952525E-323  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  5.140254E-318  0.000000E+00
2   200  8  1.706173E+11  1.044809E+01  4.940656E-324  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  2.873980E-320  0.000000E+00
2   300  9  2.706173E+11  1.044809E+01  4.446591E-323  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  4.919224E-318  0.000000E+00
2   400 EP  10  3.706173E+11  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time  3.112E+02
estat4-1 ... done
AUTO> sv('rama2-E')
Saving fort.7 as b.rama2-E ... done
Saving fort.8 as s.rama2-E ... done
Saving fort.9 as d.rama2-E ... done

```

Figura 3.10: Ejecución de la continuación en Módulo de Young

Comparamos los resultados de auto con los de la fórmula.

Resultado del programa para la dirección de menor inercia:

$$E_p = 4.86116 \cdot 10^9 N/m^2.$$

Resultado de la fórmula según la dirección de menor inercia:

$$E_f = \frac{\rho \cdot A \cdot g \cdot l^3}{7.83 \cdot I} = \frac{7850 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8 \cdot (55 \cdot 10^{-2})^3}{7.83 \cdot 2.66 \cdot 10^{-12}} = 4.91621 \cdot 10^9 N/m^2.$$

Resultado del programa para la dirección de mayor inercia:

$$E_p = 1.22483 \cdot 10^9 N/m^2.$$

Resultado de la fórmula según la dirección de mayor inercia:

$$E_f = \frac{\rho \cdot A \cdot g \cdot l^3}{7.83 \cdot I} = \frac{7850 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8 \cdot (55 \cdot 10^{-2})^3}{7.83 \cdot 1.06 \cdot 10^{-11}} = 1.23369 \cdot 10^9 N/m^2.$$

En esta continuación ocurre lo mismo que en las anteriores pero al revés, ya que la continuación se realiza en el sentido decreciente del parámetro y por tanto el resultado obtenido de la continuación numérica es algo más pequeño que el de la fórmula exacta debido a que el último incremento que realiza la continuación numérica hasta encontrar la inestabilidad hace que el valor del parámetro quede un poco por debajo del valor exacto.

3.4. Continuación numérica en una carga puntual

Como comprobación de la correcta implementación en auto del modelo vamos a colocar una carga vertical en el extremo libre del filamento y mediante continuación numérica obtener el valor de dicha carga a partir de la cual se produce el pandeo, comprobando la coherencia con el resultado teórico.

Esta fuerza va a tener la dirección del eje e_3 del triedro de referencia $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ y por tanto en estos ejes sólo va a tener distinta de cero la componente f_3 . Como la fuerza es hacia abajo, f_3 tiene signo negativo.



Figura 3.11: Esquema del problema con la carga puntual

Para introducir esta carga en AUTO se procede de la siguiente manera: En la función de las condiciones de contorno (bcnd) modificamos la condición

fb[14], que es la correspondiente a f_3 , sumándole en el lado derecho de la igualdad un nuevo parámetro que inicializamos a cero en la función stpnt porque de esta forma como todo el miembro que está en esta parte de la igualdad es igual a cero, tenemos que el parámetro pasa al otro lado con signo menos representando al valor de dicha fuerza. Entonces podemos hacer la continuación exactamente igual que con los demás parámetros. Estas modificaciones en el fichero xxx.c quedarían:

En la función bcnd cambiamos la fb[14] como sigue:

$$fb[14] = F_1*d_{13}+F_2*d_{23}+F_3*d_{33} \implies fb[14] = F_1*d_{13}+F_2*d_{23}+F_3*d_{33}+par[6].$$

En la función stpnt añadimos:

$$par[6] = (double)0,0.$$

Como estamos continuando el parámetro 6, habrá que poner ICP= 6 en el fichero c.xxx.

El valor teórico lo vamos a calcular mediante una fórmula aproximada, llamada fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\beta^2 \cdot l^2},$$

donde β es un coeficiente que depende de las condiciones de contorno y que para nuestro caso $\beta = 2$.

Consideramos que el filamento es de acero y que tiene la misma longitud y sección que en el apartado anterior.

Haciendo el cálculo tenemos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 2.66 \cdot 10^{-12}}{2^2 \cdot (55 \cdot 10^{-2})^2} = 4.5563N.$$

Como las variables son adimensionales habrá que adimensionalizar esta fuerza crítica para poder compararla con la que se obtenga de AUTO. Esto lo hacemos dividiendo por el número por el que dividimos las fuerzas al adimensionalizar las ecuaciones:

El número era $A = \rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2$, donde

70CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

$$\rho(\text{densidad}) = 7850 \text{Kg/m}^3, A_s(\text{área}) = b \cdot h = 8 \cdot 10^{-6} \text{m}^2,$$

$$, \omega_0(\text{frecuencia}) = 1, l(\text{longitud}) = 55 \cdot 10^{-2} \text{m}.$$

La fuerza es:

$$f_3 = -\frac{P_{cr}}{A} = -\frac{P_{cr}}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} = -\frac{4.5563}{7850 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 \cdot (55 \cdot 10^{-2})^2} = -239.8431.$$

Para hacer la continuación, hacemos en el fichero estat-l.c los cambios que se han explicado anteriormente y los guardamos con el nombre de estat-cp.c. En el fichero c.estat-l hacemos también los correspondientes cambios para continuar en el parámetro 6 y los guardamos como c.estat-cp, donde las principales etiquetas son:

IRS=0. Partimos del equilibrio dado en la función stpnt.

NICP=6. Continuamos el parámetro 6

ISW=1. Continuamos un sólo parámetro (en este caso par[6]).

NMX=500. Haremos hasta 500 iteraciones. Ponemos un número elevado porque sino no llegamos a alcanzar el primer BP.

NPR=0. Sólo se mostrarán etiquetas en los puntos especiales.

DSMAX=10. Ponemos un paso máximo alto para que el programa vaya más rápido y encuentre antes el BP.

El resultado de la ejecución es el siguiente:

```
[pfc13@mating cargapuntual]$ auto
/usr/lib/python2.2/FCNTL.py:7: DeprecationWarning: the FCNTL module is deprecated; please use fcntl
  DeprecationWarning)
Python 2.2.1 (#1, Sep  9 2002, 09:26:21)
[GCC 3.2 (Mandrake Linux 9.0 3.2-1mdk)] on linux-i386
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
(AUTOInteractiveConsole)
AUTO> ld('estat4cp')
Runner configured
AUTO> r()
Starting estat4cp ...

BR  PT  TY  LAB  PAR(6)  L2-NORM  MAX(1)  MAX(2)  MAX(3)  MAX(4)  MAX(5)  MAX(6)
1    1   EP   1    0.000000E+00  1.044809E+01  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    41  BP   2    2.351407E+02  2.441108E+02  0.000000E+00  0.000000E+00  -2.351407E+02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    144 BP   3    9.564835E+02  9.654080E+02  0.000000E+00  0.000000E+00  -9.564835E+02  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    314 BP   4    2.155509E+03  2.164425E+03  0.000000E+00  0.000000E+00  -2.155509E+03  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00
1    500 EP   5    3.470823E+03  3.479736E+03  0.000000E+00  0.000000E+00  -3.470823E+03  0.000000E+00  0.000000E+00  0.000000E+00

Total Time  6.849E+01
estat4cp ... done
AUTO>
```

Figura 3.12: Ejecución de la continuación en la carga puntual

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 71

Tenemos que el valor de la fuerza adimensional a partir de la cual se produce el pandeo es (primer 'BP'):

$$f_3 = -par[6] = -235.1407$$

Al ser la continuación en sentido creciente, el resultado numérico será un poco mayor en valor absoluto que el resultado exacto. Sin embargo el resultado que sale con la fórmula de Euler es bastante superior en valor absoluto al obtenido mediante la continuación numérica porque la fórmula es aproximada.

3.5. Continuación numérica para diferentes secciones

En este apartado vamos a ver el efecto que produce la anisotropía de la sección en los distintos resultados de auto, es decir, los cambios que se producen en los resultados cuando se va variando la diferencia entre las dos inercias principales de la sección hasta llegar al caso de que esta diferencia sea nula y las dos inercias sean iguales.

En general se nos pueden presentar dos situaciones según la forma y dimensiones de la sección:

- (1) Situación de isotropía: cuando las inercias son iguales en las posibles direcciones de pandeo y al ser la posibilidad de pandear igual en todas ellas el filamento se dobla en cualquier dirección con la misma probabilidad. Esta situación se da para las secciones redonda y cuadrada. Pero en la práctica las imperfecciones harán que alguna dirección sea la preferente
- (2) Situación de anisotropía: cuando las inercias son diferentes en las distintas direcciones de pandeo y por tanto el filamento tiende a pandear en una de las direcciones.

Empezamos con la sección de 4x2 mm tomada en el apartado anterior y vamos a tomar diferentes secciones decrementando la dimensión del lado mayor (h=4 mm) hasta llegar a la sección de 2x2 mm. Estas secciones van a ser: 4x2 mm (sección 1), 3x2 mm (sección 2), 2.5x2 mm (sección 3), 2.1x2 mm (sección 4), y 2.01x2 mm (sección 5).

El material que vamos a considerar sigue siendo el acero y el valor inicial que damos al parámetro longitud es el mismo de las continuaciones anteriores.

3.5.1. Función 'bp'

Para cada sección vamos a obtener la función bp, que corresponde al determinante de la matriz de continuación, y la vamos a representar gráficamente frente al parámetro de continuación elegido que es la longitud. El objeto de obtener esta función es la comprobación de que los BP que hemos obtenido se tienen que corresponder con los puntos donde dicha función tiene valor cero.

Para poder obtener dicha función en una columna cuando ejecutemos la continuación, tenemos que introducir en la función pvls del fichero xxx.c una orden que es la que la obtiene, y añadir un parámetro (sin inicializarlo en la función stpnt puesto que va a ser auxiliar) para que la contenga. Así, cuando obtengamos por pantalla el resultado de la continuación, aparecerá una columna correspondiente a ese nuevo parámetro con los valores de la función bp y podremos representarla con la orden plot. La función pvls para nuestro caso es la siguiente:

```
int pvls (integer ndim, const doublereal *u,
doublereal *par) {
doublereal det;
extern doublereal getp( );

det = getp("BIF", 1, u) ;
par[6] = det ;
return 0;
}
```

Para apreciar bien la diferencia vamos a elegir el mismo intervalo de representación para todas las secciones, que va a ser el delimitado por 0 m y 6 m de longitud. Para ello, en el fichero c.xxx, se le da al parámetro NUZR el valor uno y debajo de este valor se colocan dos números que son el -2 y el 6 con el siguiente significado: El 2 hace referencia al parámetro que estamos continuando y el 6 al valor del parámetro, y de esta forma el programa lo que hace es poner una etiqueta cuando el parámetro 2 llegue al valor 6, y además si se pone el signo '-' delante del 2 el programa pone la etiqueta y se para la continuación al llegar a 6.

Para que sólo aparezcan etiquetas en los puntos especiales hacemos NPR= 0 en el fichero c.xxx.

Los resultados para las distintas secciones son los que se presentan a continuación:

- SECCIÓN 1 (4x2 mm)

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 73

Los ficheros que se han creado para la continuación son el 'estat-secc1.c' y el 'c.estat-secc1', que tienen el mismo contenido, respectivamente, de los ficheros 'estat-l.c' y 'c.estat-l' que se crearon para ejecutar la continuación en el parámetro longitud, salvo el cambio en 'c.estat-l' de NUZR para limitar el intervalo de representación. Para hacer la ejecución tecleamos:

```
auto
AUTO>ld('estat-secc1')
AUTO>r(c='estat-secc1')
```

Obtenido el resultado, lo guardamos con el nombre de 'bp-secc1' con el comando *sv*.

Pasamos a representar la función bp frente al parámetro longitud obteniendo la siguiente figura:

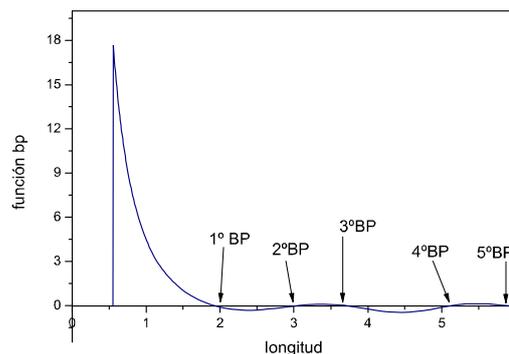


Figura 3.13: Función bp frente a la longitud (sección 1)

Claramente podemos apreciar como esta función cambia de signo pasando de positiva a negativa y viceversa, y cada vez que cambia de signo pasa por un cero. Esto lo que significa es que en cada paso por cero se halla un punto BP del cual parte una nueva rama y que por tanto tenemos un nuevo modo de pandeo del filamento. Estos pasos por cero son conocidos como bifurcaciones no degeneradas.

Los BP que hemos obtenido al ejecutar son los siguientes:

74CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o
1.92482	3.05546	3.70684	5.13158	5.88424

Viendo la gráfica vemos de manera aproximada como estos números coinciden con los puntos donde la gráfica cambia de signo.

Podemos comprobar que el primer cero, que equivale al primer BP, coincide aproximadamente con el valor teórico de longitud que obtuvimos con la fórmula en el apartado anterior.

■ SECCIÓN 2 (3x2 mm)

Creamos el fichero 'estat-secc2.c' abriendo el 'estat-secc1.c' y cambiando únicamente la dimensión 'h' a 3mm, y el 'c.estat-secc2' abriendo el 'c.estat-secc1' y guardándolo con el nuevo nombre sin hacer ningún cambio. Hacemos la ejecución de forma análoga a la de la sección anterior y guardamos el resultado como 'bp-secc2'. Representando gráficamente tenemos:

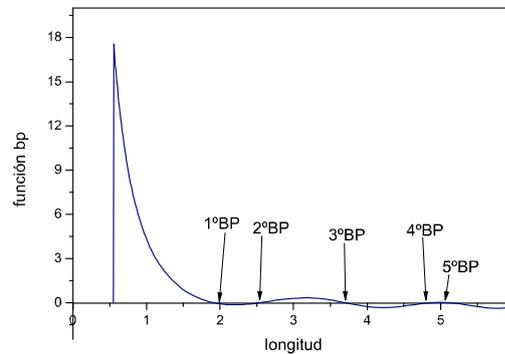


Figura 3.14: Función bp frente a la longitud (sección 2)

Lo primero que se puede apreciar respecto a la gráfica anterior es cómo la curva penetra menos en la región negativa aunque siga pasando de una región a otra alternativamente. Como consecuencia de esto tenemos que algunos BP se han desplazado hacia la izquierda y se han aproximado más a otros que han permanecido fijos, como podemos ver en la gráfica y en los valores que hemos obtenido por pantalla tras la ejecución. Dichos valores son los siguientes:

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 75

1º	2º	3º	4º	5º
1.92482	2.52223	3.70684	4.85734	5.13158

■ SECCIÓN 3 (2.5x2 mm)

Creamos el fichero 'estat-secc3.c' abriendo cualquiera de los xxx.c anteriores y modificándole la 'h' a 2.5mm, y el 'c.estat-secc3', que permanece igual a los anteriores. La ejecución la guardamos como 'bp-secc3'. La representación es:

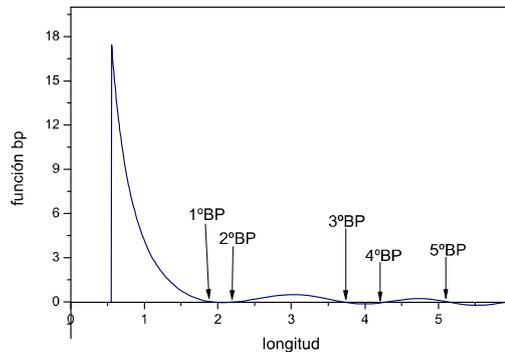


Figura 3.15: Función bp frente a la longitud (sección 3)

Vemos que vuelven a salir cinco pasos por cero pero se han vuelto a desplazar los BP quedando más juntos de los que no se han desplazado que en la sección 2. Podemos comprobar que estos pasos por cero se corresponden con los BP obtenidos, que son los que se muestran a continuación:

1º	2º	3º	4º	5º
1.92482	2.23356	3.70684	4.30141	5.13159

■ SECCIÓN 4 (2.1x2 mm)

Ejecutamos los nuevos ficheros 'estat-secc4.c' y 'c.estat-secc4', que hemos creado de forma análoga a la de las secciones anteriores, y guardando el resultado como 'bp-secc4' obtenemos la figura siguiente:

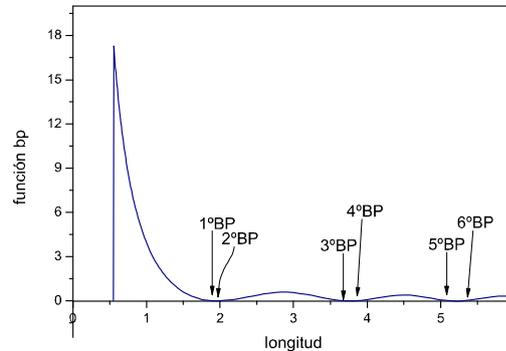


Figura 3.16: Función bp frente a la longitud

Ahora podemos ver que la gráfica se ha desplazado hacia arriba penetrando muy poco en la zona negativa y que hay un paso más por cero. Tenemos seis pasos por cero con más proximidad entre los fijos y los móviles que la que había en la sección 3, y que corresponden a los seis BP que hemos obtenido por pantalla:

1º	2º	3º	4º	5º	6º
1.92482	1.98846	3.70684	3.8294	5.13159	5.30124

■ SECCIÓN 5 (2.01x2 mm)

De la misma forma creamos el 'estat-secc5.c' y el 'c.estat-secc5' y ejecutamos. La figura que nos sale es la siguiente:

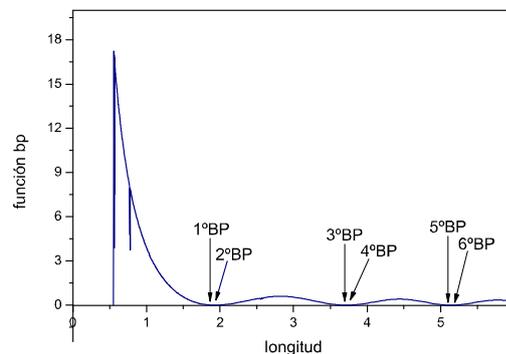


Figura 3.17: Función bp frente a la longitud (sección 5)

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 77

Vemos que la gráfica apenas penetra ya en la zona negativa y los pasos por cero vuelven a salir seis con muy poca diferencia ya entre los que han permanecido fijos y los que se han ido desplazando. Esto lo comprobamos con los valores de los BP que son los siguientes:

1°	2°	3°	4°	5°	6°
1.92482	1.93123	3.70685	3.71919	5.13158	5.14867

Aquí tenemos una situación de bifurcación casi degenerada.

■ SECCIÓN CUADRADA (2x2 mm) Y SECCIÓN CIRCULAR

Estas dos secciones corresponden al caso de isotropía:

- (1) Sección cuadrada (2x2mm): Al llegar a la sección cuadrada de 2x2 mm las inercias de los dos planos de pandeo se hacen iguales y el filamento puede pandear con la misma probabilidad en las dos direcciones. A consecuencia de esto el programa auto empieza a iterar pero llegando al punto de inestabilidad no sabe con qué dirección quedarse y se queda bloqueado sin obtener ningún resultado. Es una situación de bifurcaciones degeneradas.
- (2) Sección circular: Probando a hacer continuidad con una sección circular de 2 mm de diámetro se tiene igualmente un bloqueo del programa consecuencia de que en esta sección cualquier dirección de pandeo es igual de probable y al llegar al punto de inestabilidad el programa no sabe cómo seguir. Igualmente es una situación de bifurcaciones degeneradas.

3.5.2. Diagramas de bifurcación y soluciones en el espacio real

En este apartado vamos a representar los diagramas de bifurcación para cada una de las secciones.

78CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

El parámetro de continuación va a seguir siendo la longitud.

En cada sección vamos a realizar cuatro cambios de rama en los dos puntos 'BP' correspondientes a los dos primeros modos de pandeo para dibujarlos en los diagramas que van a ser dos por cada sección: el del máximo de la variable x_1 respecto a la longitud, y el del máximo de la variable x_2 respecto a la longitud. Estas variables x_1 y x_2 representan la posición de un punto del filamento respecto del sistema $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ que se mueve solidario con ella y al que hemos fijado en su extremo empotrado. Por tanto, los máximos de x_1 y x_2 representarán la posición del extremo libre respecto de dicho sistema, y tendremos así la distancia que se ha separado el extremo de su posición inicial en las direcciones \underline{e}_1 y \underline{e}_2 respectivamente.

Los ficheros xxx.c que vamos a utilizar para las ejecuciones de cada sección van a ser iguales que los que hemos ido utilizando para el apartado anterior de la función bp salvo las dos modificaciones siguientes:

- cambio en el orden de definición de las variables y de sus correspondientes ecuaciones, pasando las variables x_1, x_2, x_3 a la posición de las M_1, M_2, M_3 respectivamente y viceversa, es decir:

$$u[3] = x_1, \quad u[4] = x_2, \quad u[5] = x_3, \quad u[6] = M_1, \quad u[7] = M_2, \quad u[8] = M_3$$

El motivo de este cambio es porque de esta forma aparecen los máximos de x_1 y x_2 en las columnas del resultado y los podemos representar.

- Para poder representar el máximo de x_1 y el máximo de x_2 en los casos en que x_1 y x_2 tengan valores negativos introducimos dos condiciones de contorno nuevas y dos parámetros nuevos:

$$\text{fb}[18]=x1-\text{par}[32];$$

$$\text{fb}[19]=x2-\text{par}[33];$$

Estos dos parámetros par[32] y par[33] se inicializan a cero en la función stpnt.

Con estas dos condiciones nuevas lo que hacemos es recoger las variables x_1 y x_2 , que son las dos flechas en las dos direcciones, en los dos parámetros par[32] y par[33] para que sean dos variables libres y aparezcan en dos columnas tras hacer la correspondiente ejecución, ya que el máximo de x_1 o x_2 en caso de que se produzca pandeo en dirección negativa del eje va a ser cero y lo que nos interesa en este caso es el mínimo valor negativo o lo que es lo mismo el máximo en valor absoluto.

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 79

Los ficheros c.xxx serán cada uno diferentes en algunos parámetros en función de la rama que queramos obtener y de la longitud que queramos que tenga cada rama.

■ SECCIÓN 1 (4x2 mm)

Preparamos los ficheros para la ejecución haciendo los correspondientes cambios a los que tenemos del apartado anterior, y vamos a nombrarlos como 'estat-secc1.c' y 'c.estat-secc1', usando la misma nomenclatura anterior. Los valores de los parámetros principales del 'c.estat-secc1' son los siguientes:

IRS=0. Partimos de la solución inicial.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar la rama principal.

NMX=300. Hacemos un máximo de 300 iteraciones.

NPR=0. Decimos al programa que ponga etiqueta sólo a los puntos especiales.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

DSMAX=0.1. El paso máximo no debe superar a 0.1.

Una vez que tenemos los dos ficheros guardados en una carpeta, abrimos un terminal y tecleamos lo que sigue:

```
auto
```

```
AUTO>ld('estat-secc1')
```

```
AUTO>r(c='estat-secc1')
```

Una vez que tenemos el resultado en pantalla, lo guardamos con el nombre de 'rama1-secc1':

```
AUTO>sv('rama1-secc1')
```

En la siguiente tabla resumimos los valores de los cinco primeros BP que hemos obtenido:

Orden de aparición de los BP	1º	2º	3º	4º	5º
Valor de los BP (sección 1)	1.92482	3.05546	3.70684	5.13158	5.88424

80CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Estos cinco BP son los dos del primer modo de pandeo, los dos del segundo modo de pandeo y el del pandeo según la menor inercia del tercer modo.

Como vimos en el apartado anterior, en la sección de 4x2 mm los BP están separados unos de otros y conforme vayamos disminuyendo la altura y la sección se va haciendo más cuadrada los BP estarán cada vez más juntos. Para ver con más claridad lo que ocurre, vamos a desarrollar la fórmula exacta de pandeo (1) de la sección 3.3 de forma genérica para las dos inercias principales de la sección:

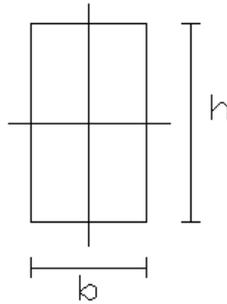


Figura 3.18: Esquema de una sección

h es la altura y b es la base.

- Longitud crítica según la menor inercia (I_2):

$$l = \left(\frac{7.83 \cdot E \cdot I_2}{\rho \cdot A \cdot g} \right)^{1/3} = \left(\frac{7.83 \cdot E}{\rho \cdot b \cdot h \cdot g} \cdot \frac{b^3 \cdot h}{12} \right)^{1/3} = \left(\frac{7.83 \cdot E \cdot b^2}{\rho \cdot g \cdot 12} \right)^{1/3}$$

- Longitud crítica según la mayor inercia (I_1):

$$l = \left(\frac{7.83 \cdot E \cdot I_1}{\rho \cdot A \cdot g} \right)^{1/3} = \left(\frac{7.83 \cdot E}{\rho \cdot b \cdot h \cdot g} \cdot \frac{h^3 \cdot b}{12} \right)^{1/3} = \left(\frac{7.83 \cdot E \cdot h^2}{\rho \cdot g \cdot 12} \right)^{1/3}$$

Vemos que la fórmula de la menor inercia depende sólo de la dimensión b siendo los demás términos constantes y que la fórmula de la mayor inercia depende únicamente de la dimensión h. Como nosotros vamos a dejar la base b constante y lo que vamos a ir variando es la altura h tenemos que los BP correspondientes al pandeo en la dirección de menor inercia van a permanecer

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 81

constantes en todas las secciones y que los BP correspondientes al pandeo en el plano de mayor inercia son los que van a ir variando, de forma que al disminuir la altura h estos BP variables se van a ir aproximando cada vez más a los otros, que permanecen fijos o invariables, hasta que la sección sea cuadrada ($h=b$) y los dos BP de las dos direcciones de pandeo se confundan en uno sólo para todos los modos de pandeo y el programa ya no los detecte.

Ahora procedemos a realizar los cambios de rama a partir de esta primera rama que hemos obtenido. Para el primer cambio de rama, abrimos el 'c.estat-secc1' y modificamos los parámetros principales que controlan la continuación con los siguientes números:

IRS=2. Partimos de la etiqueta 2 de la solución anterior.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DSMAX=10000. Ponemos un paso máximo de 10000 para recorrer la rama de forma más rápida.

Estos cambios los guardamos con el nombre de 'c.estat-secc1.1' y tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc1',c='estat-secc1.1')
```

Con esta orden estamos indicando al programa que con el fichero de ecuaciones 'estat-secc1.c' cargado anteriormente mediante el comando 'ld' ejecute ahora el fichero de constantes 'c.estat-secc1.1' a partir del fichero 'rama1-secc1' que hemos obtenido como solución.

Cuando aparezca el resultado, tenemos que guardarlo y unirlo al resultado anterior mediante las siguientes órdenes:

```
AUTO>sv('rama2-secc1') /*Salvamos la solucion*/
AUTO>ap('rama2-secc1','rama1-secc1') /*Unimos la rama 2 a la rama 1 en el
                                     primer fichero*/
```

De esta forma tenemos ya guardado en el fichero 'rama1-secc1' los dos resultados de las dos ramas.

82CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Posteriormente procedemos a realizar el segundo cambio de rama, correspondiente a la rama que parte del segundo BP (etiquetado con el número 3). Lo que hacemos es abrir el fichero de constantes del primer cambio de rama y modificar los parámetros controlantes de la continuación. Los nuevos valores que van a tomar estos parámetros son los que siguen:

IRS=3. Partimos de la etiqueta 3.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=10000. El paso máximo lo elevamos a 10000 para que avance por la rama con bastante rapidez.

Guardamos estos cambios con el nombre de 'estat-secc1.2' y ejecutamos con el siguiente comando:

```
AUTO>r(s='rama1-secc1',c='estat-secc1.2')
```

El resultado lo guardamos como 'rama3-secc1' :

```
AUTO>sv('rama3-secc1')
```

Y finalmente unimos esta tercera rama a la primera con el comando 'ap':

```
AUTO>ap('rama3-secc1','rama1-secc1')
```

Por tanto, las tres ramas que hemos obtenido, las tenemos guardadas en el mismo fichero, que es el 'rama1-secc1'. Ya podemos dibujar las tres ramas en el mismo gráfico tecleando:

```
AUTO>plot('rama1-secc1')
```

Una vez que hemos realizado los dos cambios de rama correspondientes al primer modo de pandeo procedemos a hacer los dos correspondientes al segundo modo. Para el tercer cambio de rama, que se hará a partir del tercer 'BP' ($l=3.70684$), nos creamos el fichero 'c.estat-secc1.3' a partir del utilizado en el cambio de rama anterior con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=4. Partimos de la etiqueta 4 (tercer 'BP').

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 83

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Hacemos la ejecución tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc1',c='estat-secc1.3')
```

Salvamos el resultado con el nombre de 'rama4-secc1':

```
AUTO>sv('rama4-secc1')
```

Para el cuarto cambio de rama, que se hará a partir del quinto 'BP' ($l=5.88424$), nos creamos el fichero 'c.estat-secc1.4' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=6. Partimos de la etiqueta 6 (quinto 'BP').

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Ejecutamos tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc1',c='estat-secc1.4')
```

Salvamos el resultado como 'rama5-secc1':

```
AUTO>sv('rama5-secc1')
```

En esta última rama que hemos obtenido ('rama5-secc1') nos han aparecido de nuevo puntos 'BP' y entonces vamos a hacer otro cambio de rama más en el primero de estos 'BP' (etiqueta 32) para ver lo que ocurre. Para ello nos volvemos a crear otro fichero llamado 'c.estat-secc1.5' donde los parámetros controlantes son los que siguen:

IRS=32. Partimos de la etiqueta 32.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

84CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-secc1',c='estat-secc1.5')
```

Salvamos el resultado como 'rama6-secc1':

```
AUTO>sv('rama6-secc1')
```

Lo que vamos a representar son las flechas en las dos direcciones principales, con lo cual tendremos que seleccionar en el eje de ordenadas la columna correspondiente al máximo de x_1 para el caso de la flecha según la menor inercia y la columna correspondiente al máximo de x_2 para el caso de la flecha según la mayor inercia. En el eje de abscisas seleccionamos el parámetro de continuación, que es la longitud, en ambos casos. Así, para cada longitud tenemos el valor de la flecha en ambas direcciones. Los dos diagramas se muestran a continuación:

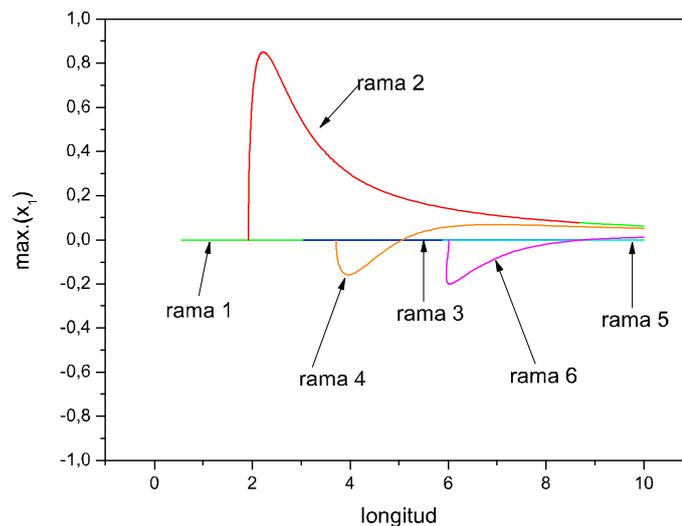


Figura 3.19: Máximo de x_1 frente a la longitud

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 85

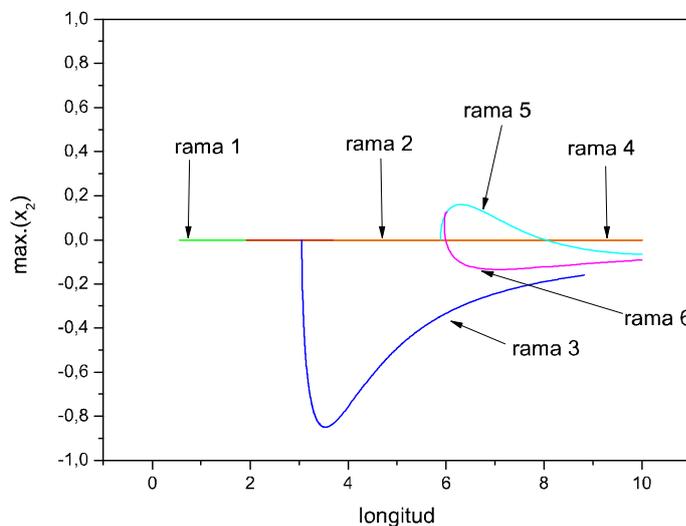


Figura 3.20: Máximo de x_2 frente a la longitud

En el primer diagrama, que es el del máximo de x_1 frente al parámetro longitud, podemos ver que las ramas que van evolucionando con el cambio de longitud son la rama 2 y la rama 4, mientras que las ramas 3 y 5 son una línea horizontal que partiendo del segundo 'BP' y quinto 'BP' respectivamente se superponen con la rama 1 y por tanto permanecen invariables con la longitud. Esto se debe a que como estamos representando el máximo de x_1 , que es la flecha en la dirección \underline{e}_1 , y la rama 2 y la rama 4, comenzando desde el primer y tercer 'BP' respectivamente, son las correspondientes a la evolución del pandeo según la dirección \underline{e}_1 , entonces la rama 2 y la rama 4 son las que van a ir variando. En el segundo diagrama, que es el del máximo de x_2 frente a la longitud, ocurre lo contrario; como estamos representando la flecha en la dirección \underline{e}_2 , las ramas que varían son la rama 3 y la rama 5, que son las correspondientes al pandeo según la dirección \underline{e}_2 . Otra cosa que podemos observar en este segundo diagrama es que la rama 3 aparece en la parte inferior a la rama 1 y por tanto las flechas tienen valor negativo, lo que significa que el pandeo se está produciendo en el sentido negativo del eje \underline{e}_2 .

Observando en el primer diagrama la forma de la rama 2 vemos que ésta aumenta su valor muy rápidamente hasta llegar a un máximo y después va disminuyendo lentamente, lo cual es debido a que al principio el extremo libre comienza a separarse de la vertical y por tanto la flecha va aumentando su valor, y a la misma vez va descendiendo en altura hasta que llega un momento

en que empieza a retroceder acercándose de nuevo a la vertical y por tanto la flecha va bajando su valor. En el segundo diagrama ocurre lo mismo con la rama 3 pero hacia el lado contrario.

En el primer diagrama vemos que la rama 4 disminuye su valor de forma rápida hacia valores negativos y posteriormente pasa a ser positiva. La explicación de esto es que al corresponder esta rama al segundo modo ya no se produce el pandeo de la misma forma que en el primer modo en el que toda la pieza se deforma de forma continua en el mismo sentido sino que hay una parte que se deforma en un sentido y otra hacia otro dando lugar a que al principio el extremo de la pieza se sitúe en el lado negativo pero conforme aumenta el pandeo y el extremo de la pieza va disminuyendo su altura la flecha se va haciendo positiva. Con la rama 5 en el segundo diagrama pasa lo mismo pero hacia el lado contrario.

Analizando la rama 6, que es la que nace del primer 'BP' de la rama 5, vemos una diferencia muy importante respecto a todas las ramas anteriores y es que esta rama tiene una evolución con el incremento de longitud en los dos diagramas de las dos flechas, lo cual quiere decir que en el transcurso por dicha rama el filamento tiene flecha distinta de cero en las dos direcciones \underline{e}_1 y \underline{e}_2 a la misma vez.

Para ver la deformación que va sufriendo el filamento en el espacio real vamos a representar dos diagramas para cada modo; uno que va a ser el de x_3 frente a x_1 , que representa la deformación según el eje \underline{e}_1 , y otro que va a ser el de x_3 frente a x_2 , que representa la deformación en la dirección del eje \underline{e}_2 . Para la realización de estos diagramas se ha utilizado un programa de 'Matlab' que extrae las tres columnas x_1, x_2, x_3 de los ficheros 's.xxx'.

Primero vamos a representar las deformaciones en las dos direcciones \underline{e}_1 y \underline{e}_2 para el primer modo de deformación por pandeo. Estas deformaciones van a ser las correspondientes a puntos etiquetados de las dos primeras ramas ('rama2-secc1' y 'rama3-secc1') que hemos obtenido mediante el cambio de rama a partir de los dos 'BP' del primer modo. Tenemos entonces las dos figuras siguientes:

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 87

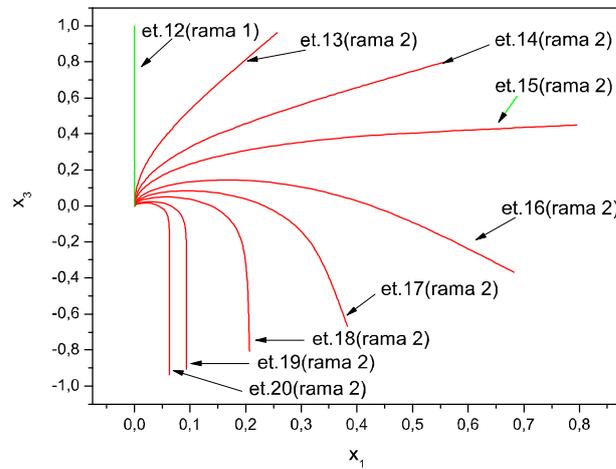


Figura 3.21: Deformación en la dirección x_1 (primer modo)

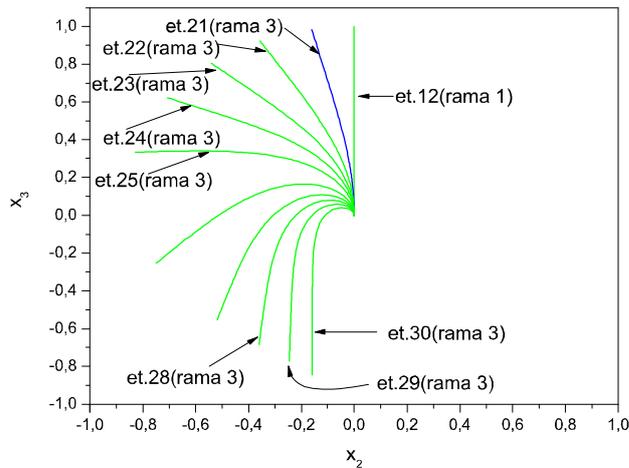


Figura 3.22: Deformación en la dirección x_2 (primer modo)

Efectivamente se comprueba que la primera rama obtenida 'rama2-secc1' corresponde al pandeo en la dirección de menor inercia e_1 porque en la figura de deformación en esta dirección de menor inercia (x_3 frente a x_1) sólo aparecen posiciones deformadas que corresponden a puntos etiquetados de dicha rama 'rama2-secc1', y se comprueba que la segunda rama obtenida 'rama3-secc1' corresponde al pandeo en la dirección de mayor inercia e_2 porque en

88CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

la segunda figura (x_3 frente a x_2), que es la de deformación en esta dirección de mayor inercia, sólo aparecen posiciones deformadas correspondientes a puntos etiquetados de la rama 'rama3-secc1'.

En concordancia con los diagramas de bifurcación vemos como en la primera figura, correspondiente al pandeo en la dirección \underline{e}_1 , la deformación se produce en el sentido positivo del eje, mientras que en la segunda, que corresponde al pandeo en la dirección \underline{e}_2 , el filamento se va doblando en el sentido negativo del eje, ya que las flechas salían negativas en el diagrama correspondiente a esta dirección de pandeo.

Aquí podemos entender claramente la forma de las ramas en los diagramas de bifurcación viendo la evolución que va teniendo el extremo libre.

Las sucesivas posiciones que se muestran de la deformación del filamento son las correspondientes a las etiquetas que el programa ha asignado a diferentes puntos de las ramas según el valor que hemos dado al parámetro NPR. Así tenemos que en la primera figura, correspondiente a la rama 2, hay ocho posiciones sucesivas después de la posición inicial indeformada, que son justamente las correspondientes a las etiquetas que el programa ha colocado en dicha rama y que son las que van desde la número 13 a la número 20. De igual forma, la segunda figura, que corresponde a la rama 3, tiene diez posiciones deformadas correspondientes a las diez etiquetas de la rama 3, que son las que van de la número 21 a la número 30. La posición inicial en ambas figuras corresponde a la etiqueta 12, que es la etiqueta que el programa ha asignado al último 'BP' que ha localizado en la rama 1. A partir del número asignado a esta última etiqueta el programa sigue numerando las etiquetas de la rama 2 y posteriormente las de la rama 3, de modo que si la última etiqueta de la rama 1 fue la número 12 la primera de la rama 2 es la número 13 y si la última de la rama 2 fue la número 20 la primera de la rama 3 es la número 21.

Otra observación es que en el pandeo según las dos direcciones se podría seguir aumentando la deformación si se prolongaran más cada una de las ramas aumentando la longitud en cada una de ellas. Esto se puede hacer dando un valor más alto al parámetro NMX del número de iteraciones, o también manteniendo igual el número de iteraciones y subiendo el valor del paso máximo.

En segundo lugar representamos las deformaciones en las dos direcciones del segundo modo de pandeo, que son las correspondientes a puntos etiquetados de las ramas tercera ('rama4-secc1') y cuarta ('rama5-secc1') obtenidas al hacer el cambio de rama en los dos 'BP' del segundo modo, y a puntos etiquetados de la rama 'rama6-secc1' obtenida al cambiar de rama en el primer

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 89

'BP' de la cuarta rama ('rama5-secc1'). Tenemos las dos figuras siguientes:

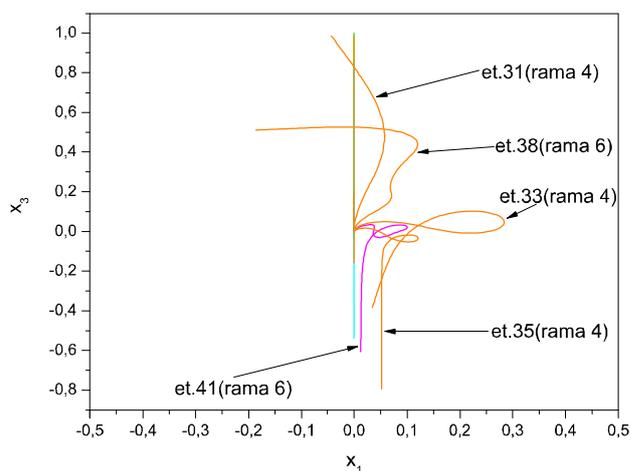


Figura 3.23: Deformación en dirección x_1 (segundo modo)

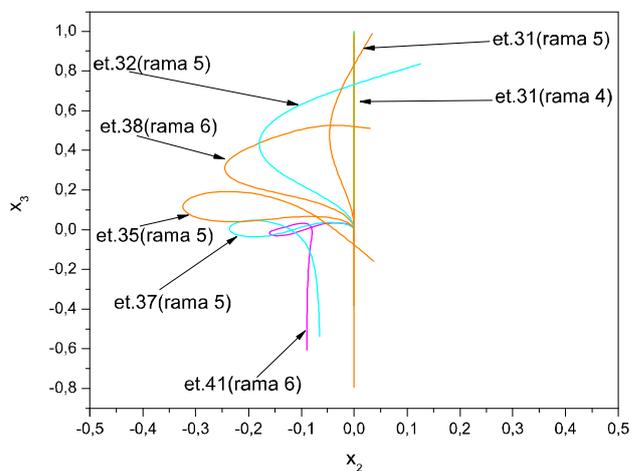


Figura 3.24: Deformación en dirección x_2 (segundo modo)

En la primera figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de menor inercia, vemos que en coherencia con el primer diagrama de

bifurcación ($\max.(x_1)-1$) aparecen las posiciones deformadas de la rama 4 y de la rama 6 mientras que las posiciones deformadas de la rama 5 no se ven porque al no tener flecha en esta dirección aparecen todas confundidas en la línea vertical donde el filamento está recto. Se han representado sólo las posiciones deformadas de algunos puntos etiquetados para que se vea la gráfica con más claridad. Estas posiciones que hemos representado son las de las etiquetas 31,33 y 35 de la rama 4 y las de las etiquetas 38 y 41 de la rama 6. En la segunda figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de mayor inercia, vemos que acorde al segundo diagrama de bifurcación aparecen las posiciones deformadas de la rama 5 y de la rama 6 estando las de la rama 4 confundidas en la línea vertical de inicio por no tener flecha en esta dirección. Las posiciones de la rama 5 que hemos elegido para representarlas son la de las etiquetas 31,32,35 y 37. Las posiciones representadas de la rama 6 en esta segunda figura son las mismas que las representadas en la primera figura, o sea las de las etiquetas 38 y 41.

En la primera figura se puede ver con claridad la trayectoria de la rama 4 en el diagrama de bifurcación, que empieza en la zona de flecha negativa y pasa a la zona de flecha positiva a consecuencia de que el pandeo se produce de una forma más compleja que en el primer modo en el que toda el cable se doblaba de forma continua hacia un mismo lado. Igualmente se ve la trayectoria de la rama 5 en la segunda figura.

Aquí vemos claramente que la rama 6 varía con la longitud en los dos diagramas de bifurcación correspondientes a las dos flechas en las dos direcciones de pandeo, lo que se traduce en que en la deformación gobernada por esta rama aparece flecha en las dos direcciones y entonces el pandeo se está produciendo en las dos direcciones a la vez.

■ SECCIÓN 2 (3x2 mm)

Creamos los ficheros 'estat-secc2.c' y 'c.estat-secc2'. El 'estat-secc2.c' lo obtenemos del 'estat-secc1.c' de la sección 1 con la única modificación de las dimensiones de la nueva sección. Para el 'c.estat-secc2' nos servimos también del correspondiente para la sección 1 y hacemos las modificaciones que nos convengan en los parámetros principales. Los valores que vamos a dar a estos parámetros para obtener la rama principal de esta segunda sección son los siguientes:

IRS=0. Partimos de la solución inicial.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar la rama principal.

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 91

NMX=300. Hacemos un máximo de 300 iteraciones.

NPR=0. Decimos al programa que ponga etiqueta sólo a los puntos especiales.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

DSMAX=0.1. El paso máximo no debe superar a 0.1.

Abrimos un terminal y escribimos:

```
auto
AUTO>ld('estat-secc2')
AUTO>r(c='estat-secc2')
```

El resultado que hemos obtenido lo guardamos como 'rama1-secc2':

```
AUTO>sv('rama1-secc2')
```

Resumimos en la siguiente tabla el valor de los cinco primeros BP que hemos obtenido con esta sección y de los que obtuvimos con la sección anterior:

Orden de aparición de los BP	1°	2°	3°	4°	5°
Valor de los BP (sección 1)	1.92482	3.05546	3.70684	5.13158	5.88424
Valor de los BP (sección 2)	1.92482	2.52223	3.70684	4.85734	5.13158

Como se explicó anteriormente, al cambiar de sección se conserva, para cada modo, el valor del BP que corresponde al pandeo según la dirección de menor inercia, ya que éste depende exclusivamente de la dimensión b que mantenemos constante. Por tanto, en la tabla de los BP anterior, podemos comprobar (en negrita) cómo se mantienen iguales tres de los cinco BP con los valores de 1.92482, que es el valor crítico según la menor inercia para el primer modo de pandeo; 3.70684, que es el valor crítico según la menor inercia para el segundo modo de pandeo; y 5.13158, que es el valor crítico según la menor inercia para el tercer modo de pandeo.

Por otra parte vemos como han cambiado los valores de los BP correspondientes al pandeo según la dirección de mayor inercia: el valor de 3.05546, que es el valor crítico según la mayor inercia para el primer modo, ha disminuido

92CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

su valor a 2.52223, y el valor de 5.88424, que es el valor crítico según la mayor inercia para el segundo modo, ha disminuido a 4.85734.

Hacemos el primer cambio de rama, correspondiente al primer BP, para el cual hacemos los siguientes cambios en los parámetros controlantes:

IRS=2. Partimos de la etiqueta 2 de la solución anterior.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DSMAX=10000. Ponemos un paso máximo de 10000 para recorrer la rama de forma más rápida.

Estos cambios los guardamos como 'c.estat-secc2.1' y tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc2',c='estat-secc2.1')
```

El resultado lo guardamos como 'rama2-secc2' y lo unimos al resultado anterior mediante:

```
AUTO>sv('rama2-secc2')
AUTO>ap('rama2-secc2','rama1-secc2')
```

Hacemos el segundo cambio de rama, correspondiente al segundo BP, dándole los siguientes valores a los parámetros controlantes:

IRS=3. Partimos de la etiqueta 3.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=10000. El paso máximo lo elevamos a 10000 para que avance por la rama con bastante rapidez.

Guardamos estos cambios con el nombre de 'estat-secc2.2' y ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc2',c='estat-secc2.2')
```

El resultado lo guardamos como 'rama3-secc2' :

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 93

```
AUTO>sv('rama3-secc2')
```

Unimos a la primera rama con el comando 'ap':

```
AUTO>ap('rama3-secc2', 'rama1-secc2')
```

El tercer cambio de rama, a partir del tercer 'BP' ($l=3.70684$), lo hacemos con el fichero 'c.estat-secc2.3' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=4. Partimos de la etiqueta 4 (tercer BP).

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Hacemos la ejecución tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc2', c='estat-secc2.3')
```

Salvamos el resultado con el nombre de 'rama4-secc2':

```
AUTO>sv('rama4-secc2')
```

Para hacer el cuarto cambio de rama, a partir del cuarto 'BP' ($l=4.85734$), nos creamos el fichero 'c.estat-secc2.4' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=5. Partimos de la etiqueta 5 (cuarto 'BP').

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX= 1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Ejecutamos tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc2', c='estat-secc2.4')
```

94CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Salvamos el resultado como 'rama5-secc2':

```
AUTO>sv('rama5-secc2')
```

En esta última rama ('rama5-secc2') nos han aparecido puntos 'BP' de los que haremos el cambio de rama en el primero (etiqueta 36). Para ello nos creamos el fichero 'c.estat-secc2.5' con los parámetros controlantes que siguen:

IRS=36. Partimos de la etiqueta 36.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-secc2',c='estat-secc2.5')
```

Salvamos el resultado como 'rama6-secc2':

```
AUTO>sv('rama6-secc2')
```

Representamos los dos diagramas de las flechas frente al parámetro; primero el del máximo de x_1 , que es el del pandeo en la dirección de menor inercia, y segundo el del máximo de x_2 , que es el del pandeo en la dirección de mayor inercia.

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 95

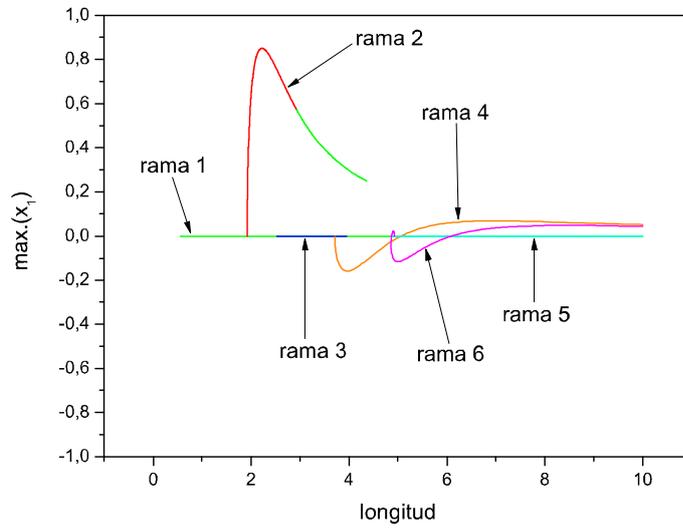


Figura 3.25: Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 2)

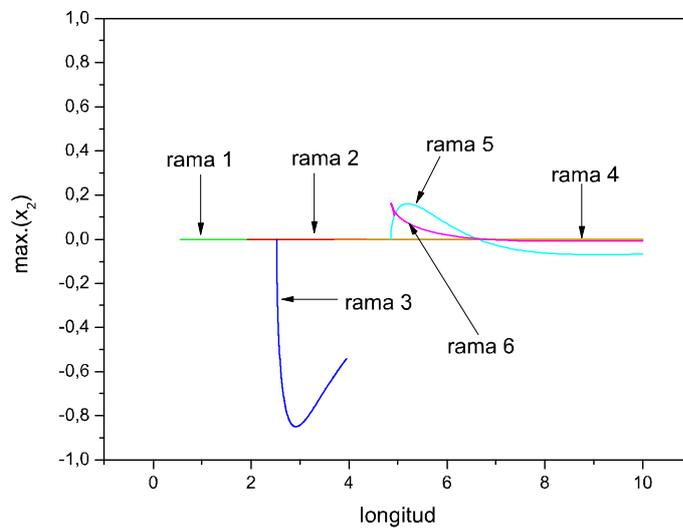


Figura 3.26: Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 2)

En el primer diagrama, el del máximo de x_1 frente al parámetro longitud , vemos que, igual que en la sección 1, las ramas que van cambiando con el

incremento de longitud son la rama 2 y la rama 4, mientras que las ramas 3 y 5 son dos líneas horizontales que parten del segundo y cuarto 'BP' respectivamente y permanecen constantes e iguales a cero con la longitud ya que estamos representando el máximo de x_1 y las ramas 2 y 4 son las que representan el movimiento en la dirección de las x_1 . En el segundo diagrama, el del máximo de x_2 frente a la longitud, ocurre lo contrario; estamos representando la flecha en la dirección e_2 y por tanto las ramas que varían son las ramas 3 y 5, que son las que representan el pandeo en la dirección de las x_2 . En este segundo diagrama la rama 3 vuelve a aparecer en la región negativa de las ordenadas, lo que significa que el pandeo se vuelve a producir en el sentido negativo del eje e_2 .

Ahora la rama 3 está más próxima a la rama 2 que en la sección 1, ya que el segundo BP ha disminuido su valor y se ha acercado más al primero. La rama 5 también está más próxima a la rama 4 porque el 'BP' del que parte la rama 5 se ha acercado más al tercer 'BP' que es del que parte la rama 4.

La forma de las ramas vuelve a ser la misma que las de la sección 1 porque el extremo libre evoluciona de la misma forma cualitativa.

Se vuelve a producir el mismo cambio de signo en las ramas 4 y 5.

La rama 6, al igual que en la sección 1, es la rama obtenida a partir del primer 'BP' de la rama 5 y vuelve a tener evolución con el aumento de longitud en los dos diagramas de bifurcación, lo que significa que existe flecha distinta de cero en las dos direcciones.

Representamos ahora los diagramas de deformación real que son el de x_3 frente a x_1 , que representa la deformación según la dirección del eje e_1 , y el de x_3 frente a x_2 , que representa la deformación en la dirección del eje e_2 .

Primero representamos las deformaciones en las dos direcciones e_1 y e_2 para el primer modo de deformación, que van a ser las correspondientes a puntos etiquetados de las dos primeras ramas ('rama2-secc2' y 'rama3-secc2') obtenidas mediante el cambio de rama a partir de los dos 'BP' del primer modo. Tenemos las dos figuras siguientes:

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 97

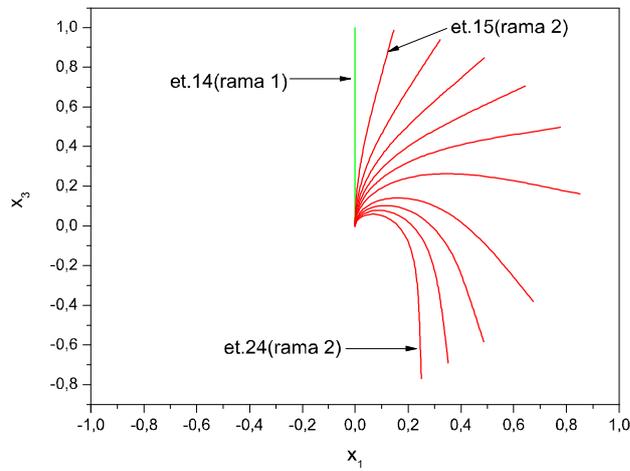


Figura 3.27: Deformación en dirección x_1 (primer modo)

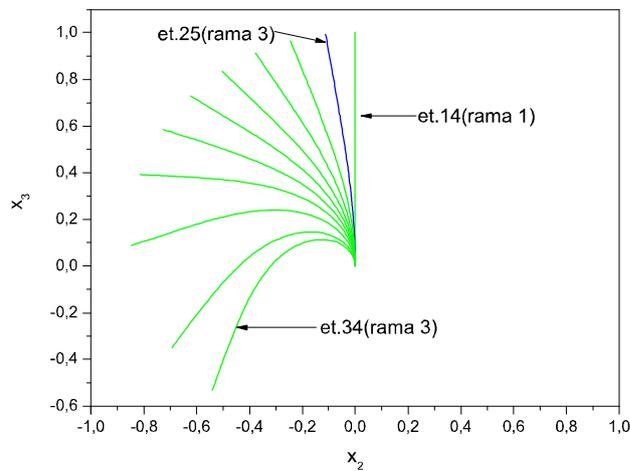


Figura 3.28: Deformación en dirección x_2 (primer modo)

La primera figura, que representa posiciones deformadas de la rama 2, tiene diez posiciones sucesivas después de la posición inicial, que son las correspondientes a las etiquetas de dicha rama y que son las que van desde la número 15 a la número 24. La segunda figura representa las posiciones que corresponden a las etiquetas de la rama 3, que son las diez que van de la

número 25 a la número 34. La posición inicial en ambas figuras es la de la última etiqueta de la rama 1, que es la número 14.

Vemos que las deformaciones en ambas figuras se producen en el sentido acorde al signo de las flechas en los correspondientes diagramas de bifurcación, es decir que en la primera figura se produce el pandeo hacia el lado positivo porque la rama 2 en el primer diagrama de bifurcación evoluciona en la región positiva y en la segunda figura se produce el pandeo hacia el lado negativo porque la rama 3 en el segundo diagrama de bifurcación evoluciona en la región negativa.

En segundo lugar representamos las deformaciones en las dos direcciones para el segundo modo de pandeo mediante puntos etiquetados de las ramas tercera ('rama4-secc2') y cuarta ('rama5-secc2') obtenidas al hacer el cambio de rama en los dos 'BP' del segundo modo, y mediante puntos etiquetados de la rama 'rama6-secc2' obtenida al hacer el cambio de rama en el primer 'BP' de la cuarta rama ('rama5-secc2'). Tenemos las dos figuras siguientes:

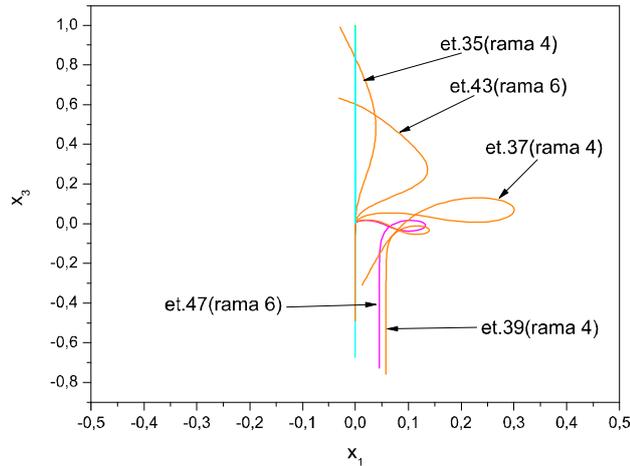


Figura 3.29: Deformación en dirección x_1 (segundo modo)

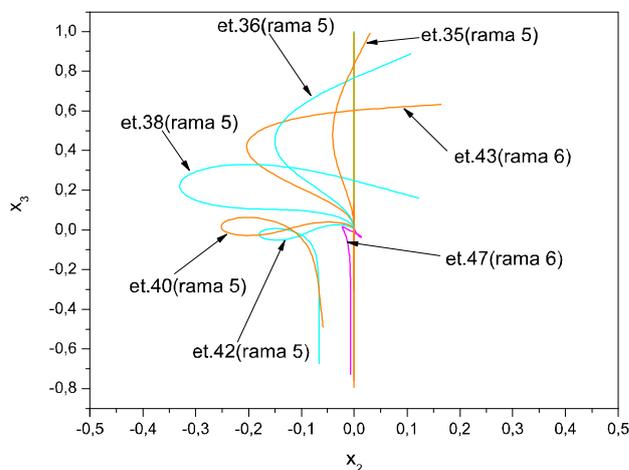


Figura 3.30: Deformación en dirección x_2 (segundo modo)

La primera figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de menor inercia, nos muestra las posiciones deformadas de la rama 4 y de la rama 6 quedando las posiciones deformadas de la rama 5 confundidas en la línea vertical de la posición inicial antes del pandeo por no tener pandeo en esta dirección. Se han representado sólo las posiciones de las etiquetas 35,37 y 39 de la rama 4 y las de las etiquetas 43 y 47 de la rama 6. La segunda figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de mayor inercia, nos muestra las posiciones deformadas de la rama 5 y de la rama 6 quedando las de la rama 4 confundidas en la línea vertical de inicio por no tener pandeo en esta dirección. Las posiciones de la rama 5 que hemos representado son la de las etiquetas 35,36,38,40 y 42 siendo las de la rama 6 las mismas que en la primera figura.

En la primera figura volvemos a ver claro el motivo del cambio de signo de la rama 4 y en la segunda figura el de la rama 5.

Comprobamos igualmente que los puntos de la rama 6 tienen deformada en las dos direcciones de pandeo.

■ SECCIÓN 3 (2.5x2 mm)

Creamos el fichero 'estat-secc3.c' con la modificación de las dimensiones de la sección al 'estat-secc1.c' de la sección 1. A continuación creamos el 'c.estat-secc3' a partir del 'c.estat-secc1' con los siguientes valores de los parámetros principales:

100CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

IRS=0. Partimos de la solución inicial.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar la rama principal.

NMX=300. Hacemos un máximo de 300 iteraciones.

NPR=0. Decimos al programa que ponga etiqueta sólo a los puntos especiales.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

DSMAX=0.1. El paso máximo va a ser 0.1.

Abrimos un terminal y escribimos:

```
auto
AUTO>ld('estat-secc3')
AUTO>r(c='estat-secc3')
```

El resultado lo guardamos como 'rama1-secc3':

```
AUTO>sv('rama1-secc3')
```

Resumimos los BP que hemos obtenido con esta sección y con las dos anteriores:

Orden de aparición de los BP	1°	2°	3°	4°	5°
Valor de los BP (sección 1)	1.92482	3.05546	3.70684	5.13158	5.88424
Valor de los BP (sección 2)	1.92482	2.52223	3.70684	4.85734	5.13158
Valor de los BP (sección 3)	1.92482	2.23356	3.70684	4.30141	5.13161

Comprobamos que se mantienen constantes los BP que corresponden a la dirección de menor inercia de cada modo con los valores de 1.92482 para el primer modo, 3.70684 para el segundo modo, y 5.13161 para el tercer modo.

Por otra parte, el BP correspondiente a la dirección de mayor inercia para el primer modo, que para la sección 1 tenía un valor de 3.05546 y para la sección 2 un valor de 2.52223, ha disminuido su valor otra vez pasando a valer 2.23356 y el BP correspondiente a la dirección de mayor inercia para el segundo modo, que para la sección 1 tenía un valor de 5.88424 y para la sección 2 un valor de 4.85734, ha disminuido su valor hasta 4.30141.

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES101

Hacemos el cambio de rama correspondiente al primer BP haciendo los correspondientes cambios a los parámetros controlantes:

IRS=2. Partimos de la etiqueta 2 de la solución anterior.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1200. El número de iteraciones va a ser 1200 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DSMAX=20000. Elevamos el paso máximo a 20000 para recorrer la rama de forma rápida.

Guardamos los cambios como 'c.estat-secc3.1' y tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc3',c='estat-secc3.1')
```

El resultado lo guardamos como 'rama2-secc3' y lo unimos al anterior:

```
AUTO>sv('rama2-secc3')
AUTO>ap('rama2-secc3','rama1-secc3')
```

Hacemos el cambio de rama correspondiente al segundo BP con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=3. Partimos de la etiqueta 3.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1200. Hacemos un máximo de 1200 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=20000. El paso máximo lo elevamos a 20000 para que avance por la rama con bastante rapidez.

Guardamos estos valores con el nombre de 'estat-secc3.2' y ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc3',c='estat-secc3.2')
```

El resultado lo guardamos como 'rama3-secc3' :

```
AUTO>sv('rama3-secc3')
```

Unimos a la primera rama con el comando 'ap':

102 *CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES*

```
AUTO>ap('rama3-secc3', 'rama1-secc3')
```

Hacemos el tercer cambio de rama a partir del tercer 'BP' ($l=3.70684$) con el fichero 'c.estat-secc3.3' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=4. Partimos de la etiqueta 4 (tercer BP).

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Hacemos la ejecución tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc3', c='estat-secc3.3')
```

Salvamos el resultado con el nombre de 'rama4-secc3':

```
AUTO>sv('rama4-secc3')
```

Hacemos el cuarto cambio de rama a partir del cuarto 'BP' ($l=4.30141$) con el fichero 'c.estat-secc3.4' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=5. Partimos de la etiqueta 5 (cuarto 'BP').

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Ejecutamos tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc3', c='estat-secc3.4')
```

Salvamos el resultado como 'rama5-secc3':

```
AUTO>sv('rama5-secc3')
```

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES103

En esta última rama ('rama5-secc3') nos han aparecido puntos 'BP' y entonces haremos el cambio de rama en el primero (etiqueta 38). Para ello nos creamos el fichero 'c.estat-secc3.5' con los parámetros controlantes que siguen:

IRS=38. Partimos de la etiqueta 38.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=50. Decimos que ponga una etiqueta cada 50 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a 1e5 para que avance por la rama con bastante rapidez.

Lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-secc3',c='estat-secc3.5')
```

Salvamos el resultado como 'rama6-secc3':

```
AUTO>sv('rama6-secc3')
```

Los diagramas de bifurcación son los siguientes:

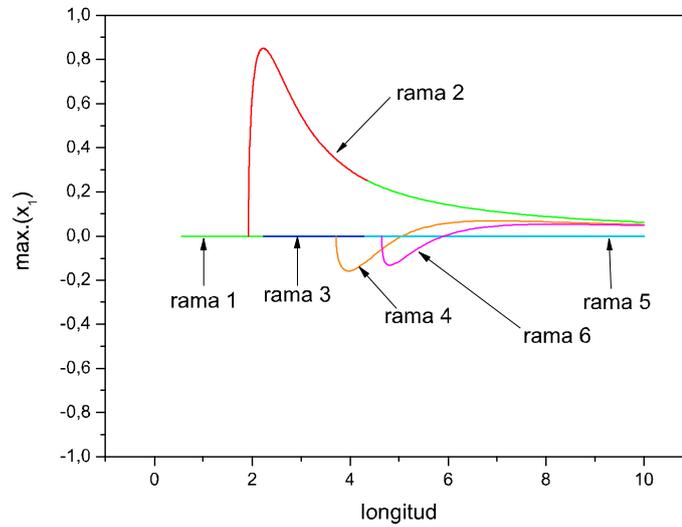


Figura 3.31: Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 3)

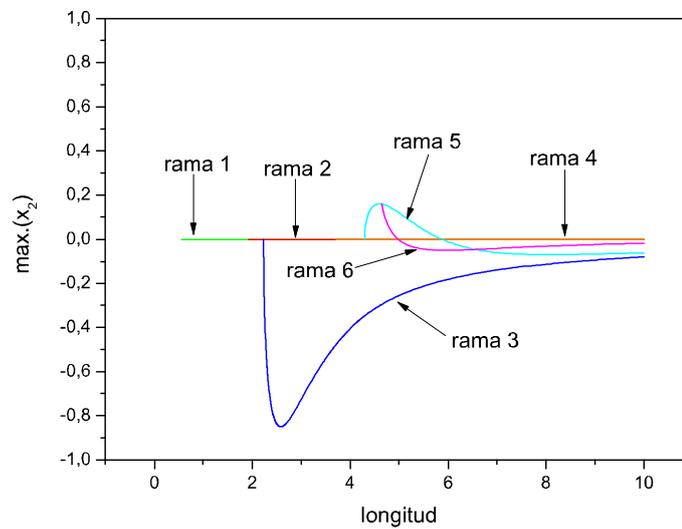


Figura 3.32: Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 3)

Vemos que cualitativamente los diagramas siguen siendo iguales a los de las secciones anteriores y lo que varía son las distancias entre la rama 2 y

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 105

la rama 3 y entre la rama 4 y la rama 5, que son ambas menores porque el segundo 'BP' se ha aproximado al primero aún más y el cuarto al primero también.

La rama 6 que nace del primer 'BP' de la rama 5 vuelve a tener evolución con la longitud al igual que en la sección 1 y en la sección 2, con lo que al movernos por esta rama tenemos pandeo en las dos direcciones a la vez.

Representamos los diagramas de deformación real, el de x_3 frente a x_1 y el de x_3 frente a x_2 .

Primero representamos los diagramas de las dos direcciones e_1 y e_2 para el primer modo de deformación con puntos etiquetados de las dos primeras ramas ('rama2-secc3' y 'rama3-secc3') obtenidas mediante el cambio de rama en los dos 'BP' del primer modo. Tenemos las dos figuras siguientes:

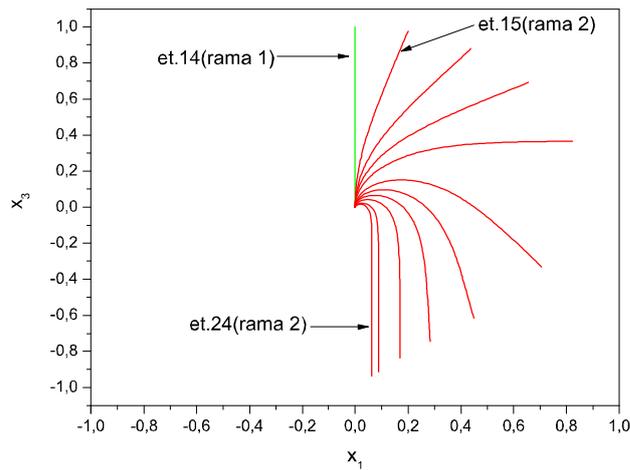


Figura 3.33: Deformación en dirección x_1 (primer modo)

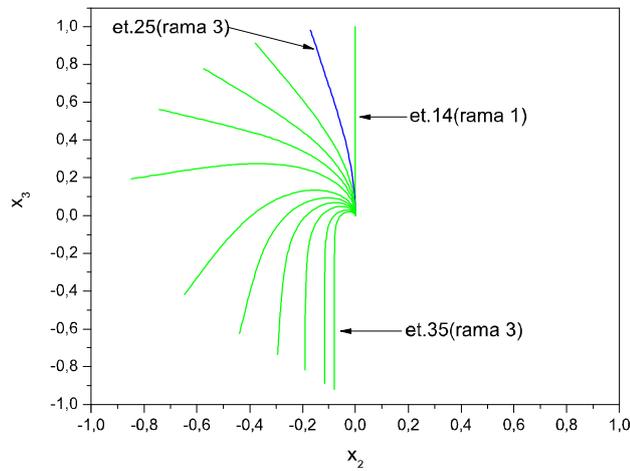


Figura 3.34: Deformación en dirección x_2 (primer modo)

La figura primera, que representa deformaciones de la rama 2, tiene diez posiciones sucesivas después de la posición inicial, que son las correspondientes a las etiquetas que van desde la número 15 a la número 24. La figura segunda, en la que se ven las deformaciones de la rama 3, representa las once posiciones que corresponden a las etiquetas que van de la número 25 a la número 35. La posición inicial en ambas figuras es la de la etiqueta número 14 de la rama 1.

Podemos comprobar que las deformaciones en ambas figuras se producen en el sentido acorde al signo de las flechas en los correspondientes diagramas de bifurcación.

A continuación representamos los diagramas de las dos direcciones del segundo modo de pandeo mediante puntos etiquetados de las ramas tercera ('rama4-secc3') y cuarta ('rama5-secc3') obtenidas al hacer el cambio de rama en los dos 'BP' del segundo modo, y mediante puntos etiquetados de la rama 'rama6-secc3' obtenida al hacer el cambio de rama en el primer 'BP' de la cuarta rama ('rama5-secc3'). Tenemos las dos figuras siguientes:

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 107

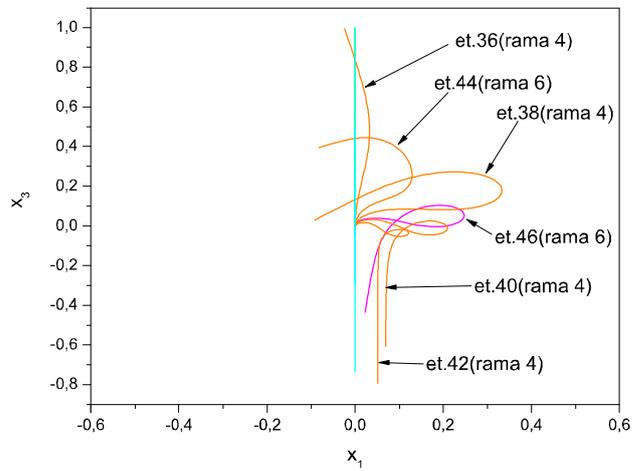


Figura 3.35: Deformación en dirección x_1 (segundo modo)

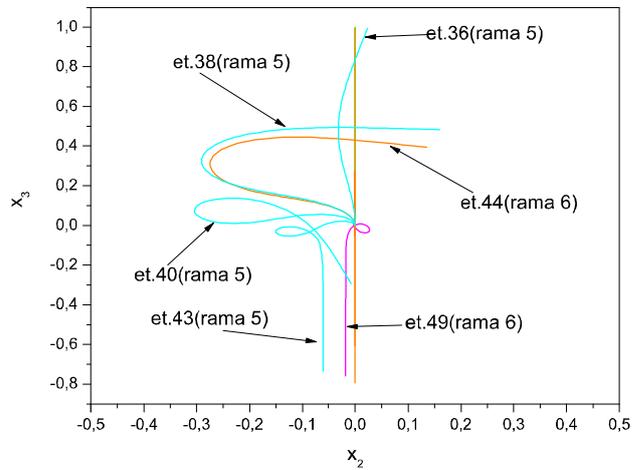


Figura 3.36: Deformación en dirección x_2 (segundo modo)

En la primera figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de menor inercia, aparecen las posiciones deformadas de la rama 4 y de la rama 6 quedando las posiciones deformadas de la rama 5 confundidas en la línea vertical de la posición inicial. Se han representado las posiciones de las etiquetas 36,38,40 y 42 de la rama 4 y las de las etiquetas 44 y 46 de la

rama 6. En la segunda figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de mayor inercia, aparecen las posiciones deformadas de la rama 5 y de la rama 6 quedando las de la rama 4 confundidas en la línea vertical. Las posiciones de la rama 5 que hemos representado son la de las etiquetas 36,38,40 y 43 siendo las de la rama 6 las mismas que en la primera figura.

En la primera figura se vuelve a ver claro por qué cambia de signo la rama 4. En la segunda figura se ve igualmente el motivo del cambio de signo de la rama 5.

Comprobamos nuevamente que los puntos de la rama 6 tienen deformada en las dos direcciones de pandeo.

- SECCIÓN 4 (2.1x2 mm)

Creamos el fichero 'estat-secc4.c' modificando las dimensiones de la sección en el 'estat-secc1.c' de la sección 1, y el 'c.estat-secc4', que tiene los siguientes valores de los parámetros principales:

IRS=0. Partimos de la solución inicial.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar la rama principal.

NMX=300. Hacemos un máximo de 300 iteraciones.

NPR=0. Decimos al programa que ponga etiqueta sólo a los puntos especiales.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

DSMAX=0.1. El paso máximo va a ser 0.1.

Abrimos un terminal y escribimos:

```
auto
AUTO>ld('estat-secc4')
AUTO>r(c='estat-secc4')
```

El resultado lo guardamos como 'rama1-secc4':

```
AUTO>sv('rama1-secc4')
```

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 109

Resumimos los BP de esta sección y de las tres anteriores:

Orden de aparición de los BP	1°	2°	3°	4°	5°
Valor de los BP (sección 1)	1.92482	3.05546	3.70684	5.13158	5.88424
Valor de los BP (sección 2)	1.92482	2.52223	3.70684	4.85734	5.13158
Valor de los BP (sección 3)	1.92482	2.23356	3.70684	4.30141	5.13161
Valor de los BP (sección 4)	1.92482	1.98846	3.70684	3.8294	5.13158

Vemos que permanecen constantes los BP correspondientes a la menor inercia con los valores de 1.92482 para el primer modo, 3.70684 para el segundo modo, y 5.13158 para el tercer modo.

El BP correspondiente a la mayor inercia del primer modo, que para la sección 3 valía 2.23356, disminuye su valor a 1.98846, y el BP correspondiente a la mayor inercia del segundo modo, que para la sección 3 valía 4.30141, disminuye su valor a 3.8294.

Hacemos el cambio de rama en el primer BP con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=2. Partimos de la etiqueta 2 de la solución anterior.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1200. El número de iteraciones va a ser 1200 como máximo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DSMAX=30000. Elevamos el paso máximo a 30000 para aumentar la velocidad de obtención de la rama.

Guardamos estos cambios como 'c.estat-secc4.1' y tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc4',c='estat-secc4.1')
```

El resultado lo guardamos como 'rama2-secc4' y lo unimos al anterior:

```
AUTO>sv('rama2-secc4')
```

```
AUTO>ap('rama2-secc4','rama1-secc4')
```

110CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

Hacemos el cambio de rama en el segundo BP con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=3. Partimos de la etiqueta 3.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1200. Hacemos un máximo de 1200 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=30000. El paso máximo lo elevamos a 30000 para que avance por la rama con mucha rapidez.

Guardamos estos valores con el nombre de 'estat-secc4.2' y ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc4',c='estat-secc4.2')
```

El resultado lo guardamos como 'rama3-secc4' :

```
AUTO>sv('rama3-secc4')
```

Unimos a la primera rama:

```
AUTO>ap('rama3-secc4','rama1-secc4')
```

Hacemos el tercer cambio de rama a partir del tercer 'BP' ($l=3.70684$) con el fichero 'c.estat-secc4.3' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=4. Partimos de la etiqueta 4 (tercer BP).

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Hacemos la ejecución tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc4',c='estat-secc4.3')
```

Salvamos el resultado con el nombre de 'rama4-secc4':

```
AUTO>sv('rama4-secc4')
```

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 111

El cuarto cambio de rama a partir del cuarto 'BP' ($l=3.8294$) lo hacemos con el fichero 'c.estat-secc4.4' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=5. Partimos de la etiqueta 5 (cuarto 'BP').

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Ejecutamos tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc4',c='estat-secc4.4')
```

Salvamos el resultado como 'rama5-secc4':

```
AUTO>sv('rama5-secc4')
```

Los diagramas de bifurcación son los que siguen:

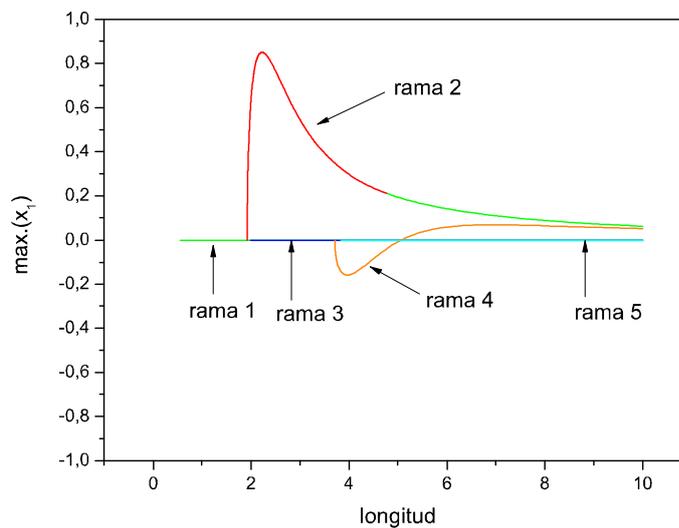


Figura 3.37: Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 4)

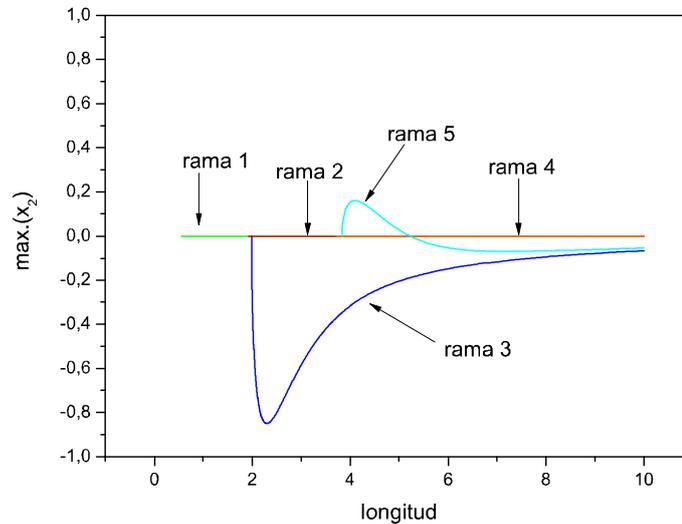


Figura 3.38: Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 4)

Vemos que los diagramas siguen siendo iguales cualitativamente a los de las secciones anteriores. La rama 3 está más próxima a la rama 2 y la rama 5 está más próxima a la rama 4 que en los casos anteriores, puesto que el segundo 'BP' está más próximo al primero y el cuarto más próximo al tercero.

Los diagramas de deformación en las dos direcciones e_1 y e_2 para el primer modo de pandeo se representan mediante puntos etiquetados de las dos primeras ramas ('rama2-secc4' y 'rama3-secc4') obtenidas al hacer el cambio de rama en los dos 'BP' del primer modo y los tenemos en las dos figuras siguientes:

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 113

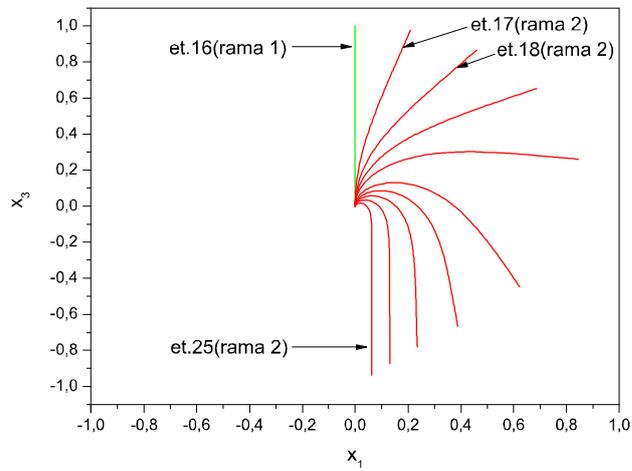


Figura 3.39: Deformación en dirección x_1 (primer modo)

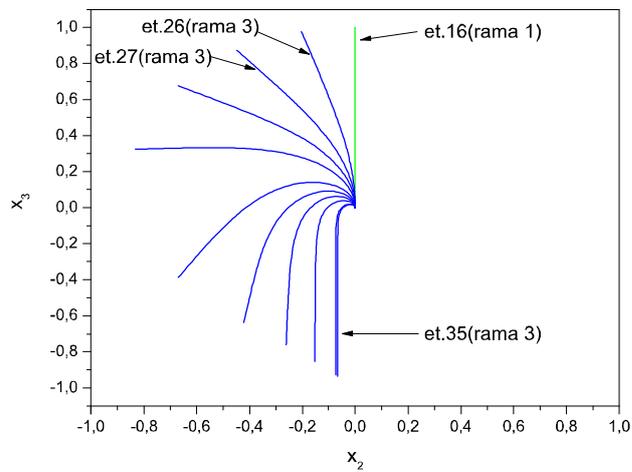


Figura 3.40: Deformación en dirección x_2 (primer modo)

La figura primera, que representa las deformaciones de la rama 2, tiene nueve posiciones que corresponden a las etiquetas que van desde la número 17 a la número 25. La figura segunda, que representa las deformaciones de la rama 3, tiene nueve posiciones que corresponden a las etiquetas que van de la número 26 a la número 34. La posición inicial es la de la etiqueta número 16 de la rama 1.

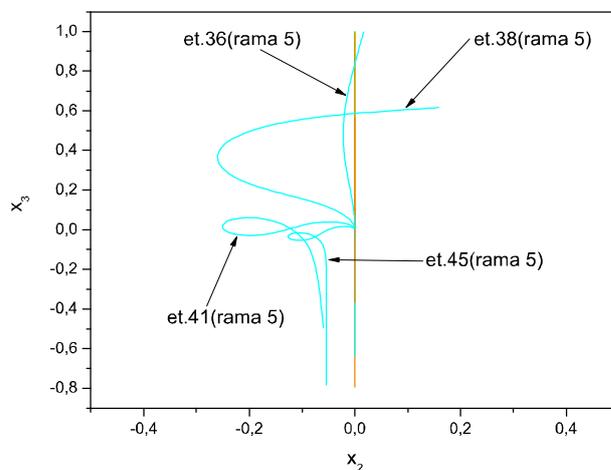


Figura 3.42: Deformación en dirección x_2 (segundo modo)

En la primera figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de menor inercia, aparecen las posiciones deformadas de la rama 4 de los puntos que hemos elegido para representar, que son los correspondientes a las etiquetas 36,38,40 y 44. En la segunda figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de mayor inercia, aparecen las posiciones deformadas de la rama 5 de los puntos elegidos, que son los correspondientes a las etiquetas 36,38,41 y 45.

En las dos figuras vemos que las formas son coherentes con las trayectorias de las ramas 4 y 5 de los diagramas de bifurcación.

■ SECCIÓN 5 (2.01x2 mm)

Creamos el fichero 'estat-secc5.c' con las nuevas dimensiones de la sección, y el 'c.estat-secc5' con los siguientes valores de los parámetros principales:

IRS=0. Partimos de la solución inicial.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar la rama principal.

NMX=1200. Hacemos hasta un máximo de 1200 iteraciones, que es un número elevado debido a que el paso máximo lo vamos a poner bastante pequeño.

NPR=0. Decimos al programa que ponga etiqueta sólo a los puntos especiales.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

116CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

DSMAX=0.01. El paso máximo va a ser 0.01, que es un valor bastante pequeño debido a que los 'BP' van a salir muy juntos y con un valor más grande del paso máximo el programa no detectaría muchos de los 'BP'.

Abrimos un terminal y escribimos:

```
auto
AUTO>ld('estat-secc5')
AUTO>r(c='estat-secc5')
```

El resultado lo guardamos como 'rama1-secc5':

```
AUTO>sv('rama1-secc5')
```

Resumiendo los BP obtenidos con esta sección y los obtenidos con las cuatro secciones anteriores tenemos:

Orden de aparición de los BP	1º	2º	3º	4º	5º
Valor de los BP (sección 1)	1.92482	3.05546	3.70684	5.13158	5.88424
Valor de los BP (sección 2)	1.92482	2.52223	3.70684	4.85734	5.13158
Valor de los BP (sección 3)	1.92482	2.23356	3.70684	4.30141	5.13161
Valor de los BP (sección 4)	1.92482	1.98846	3.70684	3.8294	5.13158
Valor de los BP (sección 5)	1.92482	1.93123	3.70685	3.7192	5.13159

Vemos que para esta nueva sección se vuelven a repetir los valores de los BP que corresponden al pandeo en la dirección de menor inercia, que son 1.92482, 3.70685 y 5.13159 para el primer, segundo y tercer modo respectivamente.

El 'BP' de la mayor inercia del primer modo pasa a valer 1.93123, que es un valor muy próximo al 1.92482 de la menor inercia, y el BP de la mayor inercia del segundo modo pasa a valer 3.7192, que también es un valor muy cercano al 3.70685 de la menor inercia.

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES117

Hacemos el cambio de rama del primer BP con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=2. Partimos de la etiqueta 2 de la solución anterior.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1500. El número de iteraciones va a ser 1500 como máximo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DSMAX=50000. Elevamos el paso máximo a 50000 para aumentar la velocidad de obtención de la rama.

Guardamos estos cambios como 'c.estat-secc5.1' y tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc5',c='estat-secc5.1')
```

El resultado lo guardamos como 'rama2-secc5' y lo unimos al anterior:

```
AUTO>sv('rama2-secc5')
AUTO>ap('rama2-secc5','rama1-secc5')
```

Hacemos el cambio de rama del segundo BP con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=3. Partimos de la etiqueta 3.

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1200. Hacemos un máximo de 1200 iteraciones.

NPR=100. Decimos que ponga una etiqueta cada 100 iteraciones.

DSMAX=50000. El paso máximo lo elevamos a 50000 para que avance por la rama con mucha rapidez.

Guardamos estos valores con el nombre de 'estat-secc5.2' y ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama1-secc5',c='estat-secc5.2')
```

El resultado lo guardamos como 'rama3-secc5' :

```
AUTO>sv('rama3-secc5')
```

Unimos a la primera rama:

118CAPÍTULO 3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES

```
AUTO>ap('rama3-secc5','rama1-secc5')
```

Hacemos el tercer cambio de rama a partir del tercer 'BP' ($l=3.70685$) con el fichero 'c.estat-secc5.3' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=4. Partimos de la etiqueta 4 (tercer BP).

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Hacemos la ejecución tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc5',c='estat-secc5.3')
```

Salvamos el resultado con el nombre de 'rama4-secc5':

```
AUTO>sv('rama4-secc5')
```

El cuarto cambio de rama a partir del cuarto 'BP' ($l=3.7192$) lo hacemos con el fichero 'c.estat-secc5.4' que tiene los siguientes parámetros controlantes:

IRS=5. Partimos de la etiqueta 5 (cuarto 'BP').

ISW=-1. Vamos a hacer un cambio de rama.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=30. Decimos que ponga una etiqueta cada 30 iteraciones.

DSMAX=1e5. El paso máximo lo elevamos a $1e5$ para que avance por la rama con bastante rapidez.

Ejecutamos tecleando lo siguiente:

```
AUTO>r(s='rama1-secc5',c='estat-secc5.4')
```

Salvamos el resultado como 'rama5-secc5':

```
AUTO>sv('rama5-secc5')
```

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 119

Los diagramas de bifurcación son los que siguen:

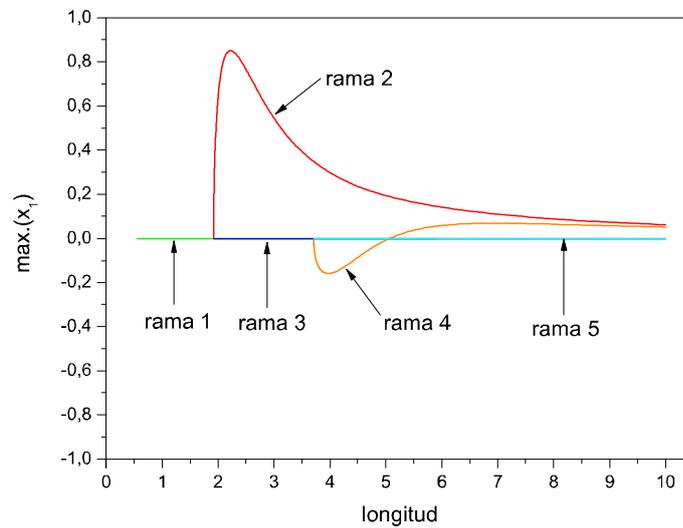


Figura 3.43: Máximo de x_1 frente a la longitud (sección 5)

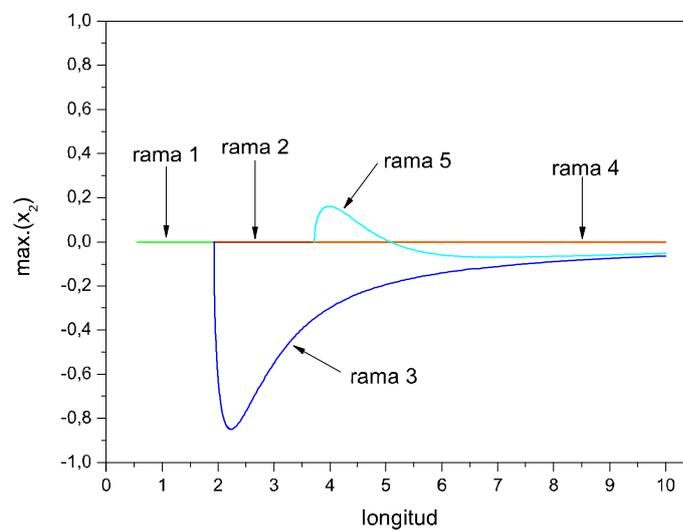


Figura 3.44: Máximo de x_2 frente a la longitud (sección 5)

Vemos que los diagramas siguen siendo iguales cualitativamente a los de

las secciones anteriores y que la rama 3 se ha aproximado de nuevo a la rama 2 y la rama 5 a la rama 4 de forma que los orígenes de las ramas están ya casi coincidiendo dos a dos, puesto que al ser la sección casi cuadrada el segundo BP sale ya muy próximo al primero y el cuarto muy próximo al tercero.

Representamos los diagramas de deformación en las dos direcciones e_1 y e_2 para el primer modo de pandeo con puntos etiquetados de las dos primeras ramas ('rama2-secc5' y 'rama3-secc5') obtenidas al hacer el cambio de rama en los dos 'BP' del primer modo. Tenemos las dos figuras siguientes:

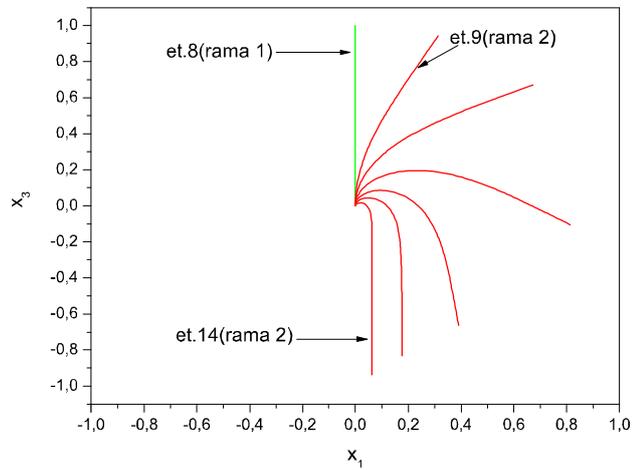


Figura 3.45: Deformación en dirección x_1 (primer modo)

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES 121

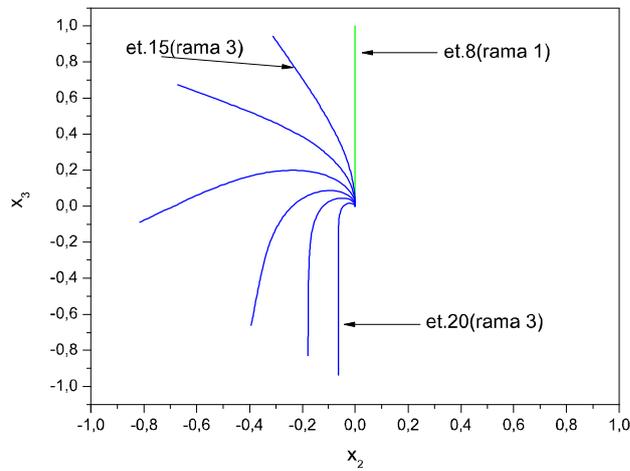


Figura 3.46: Deformación en dirección x_2 (primer modo)

La figura primera, representativa de la rama 2, tiene las seis posiciones que corresponden a las etiquetas que van desde la número 9 a la número 14. La figura segunda, representativa de la rama 3, tiene las seis posiciones que corresponden a las etiquetas que van de la número 15 a la número 20. La posición inicial es la de la etiqueta número 8 de la rama 1.

Podemos comprobar que las deformaciones en ambas direcciones se producen en el sentido del signo de las flechas.

Ahora representamos los diagramas de las dos direcciones correspondientes al segundo modo de pandeo mediante puntos etiquetados de las ramas tercera ('rama4-secc5') y cuarta ('rama5-secc5') obtenidas al hacer el cambio de rama en los dos 'BP' del segundo modo. Tenemos las dos figuras siguientes:

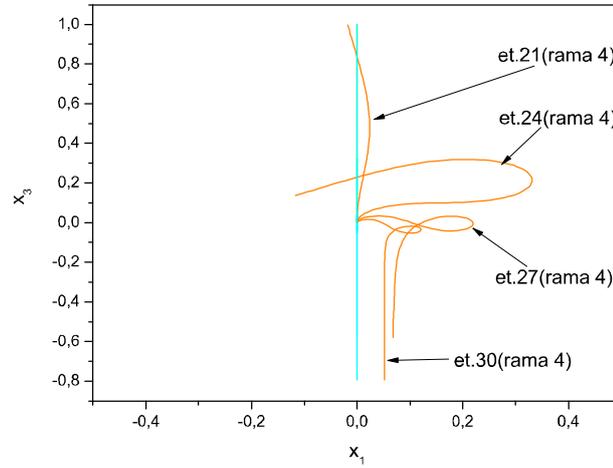


Figura 3.47: Deformación en dirección x_1 (segundo modo)

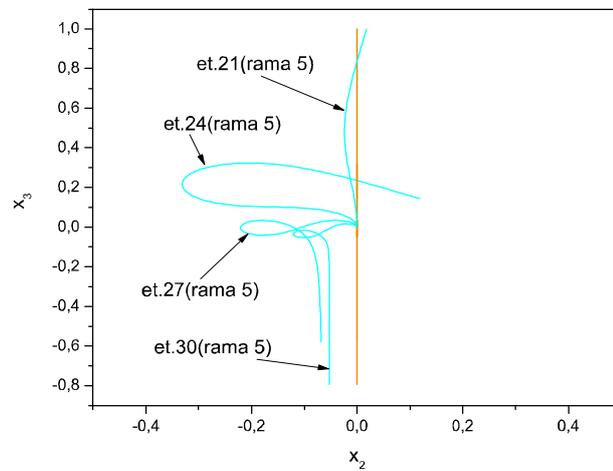


Figura 3.48: Deformación en dirección x_2 (segundo modo)

En la primera figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de menor inercia, aparecen las posiciones deformadas de la rama 4 de los puntos que hemos elegido para representar, que son los correspondientes a las etiquetas 21,24,27 y 30. En la segunda figura, correspondiente a la deformación real en la dirección de mayor inercia, aparecen las posiciones

3.5. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON DIFERENTES SECCIONES¹²³

deformadas de la rama 5 de los puntos elegidos, que son los correspondientes a las etiquetas 21,24,27 y 30.

En las dos figuras vemos que las formas son coherentes con las trayectorias de las ramas 4 y 5 de los diagramas de bifurcación.

- SECCIÓN CUADRADA (2x2 mm)

Al llegar a la sección cuadrada (situación de isotropía) lo que ocurre es que los BP se superponen dos a dos, es decir, que los BP variables, que se van acercando cada uno de ellos a un BP constante, se hacen coincidentes cada uno con el BP fijo al cual se aproximaba conforme se disminuía la altura de la sección, y también se harán coincidentes las ramas dos a dos convirtiéndose las dos ramas de cada modo de pandeo en una sola rama.

Entonces haciendo la continuación ocurre que el programa se queda bloqueado sin llegar a detectar ningún punto BP, que era exactamente lo que ocurría cuando obteníamos la función 'bp'.

Capítulo 4

Material con comportamiento no lineal

Con idea de incorporar fenómenos no lineales que aparecen en los filamentos, cables y vigas, como la histéresis, hemos modificado el modelo para incorporar no linealidades del material.

4.1. Ecuaciones momento-curvatura no lineales

Cuando el material presenta un comportamiento no lineal lo que hacemos es añadir un término cúbico a cada ecuación que relaciona el momento con la curvatura de la siguiente forma:

$$M_1 = P \cdot k_1 \implies M_1 = P \cdot (k_1 + N \cdot k_1^3),$$

$$M_2 = P \cdot R \cdot k_2 \implies M_2 = P \cdot R \cdot (k_2 + N \cdot k_2^3),$$

$$M_3 = \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot k_3 \implies M_3 = \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (k_3 + N \cdot k_3^3).$$

De esta forma tenemos modelado el comportamiento no lineal del material. 'N' va a ser el parámetro que controla la no linealidad. Cuando 'N' es

igual a cero tenemos que el material se comporta de forma lineal, y cuando 'N' es mayor que cero el comportamiento del material es no lineal.

Reordenando las ecuaciones tenemos:

$$N \cdot k_1^3 + k_1 - \frac{M_1}{P} = 0,$$

$$N \cdot k_2^3 + k_2 - \frac{M_2}{P \cdot R} = 0,$$

$$N \cdot k_3^3 + k_3 - M_3 \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} = 0.$$

Cada una de estas tres ecuaciones corresponde a una ecuación de tercer grado del tipo siguiente:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x + c = 0.$$

En cada ecuación la curvatura es la incógnita 'x' que queremos despejar y el momento juega el papel de una constante.

Para despejar la incógnita 'x' lo que vamos a hacer es implementar un método iterativo aproximado que es el método de Newton, porque las expresiones simbólicas (fórmula de Cardano) no son sencillas de implementar en el código (ver apéndice B).

4.2. Implementación del método de Newton

Vamos a implementar el método de Newton en auto y para ello vamos a introducir lo siguiente:

- Un bucle 'if' en el lugar de la función 'func' donde antes teníamos las expresiones de las curvaturas en función de los momentos para que distinga el caso en que el parámetro 'N' valga cero de cuando sea mayor que cero. Este bucle es necesario porque al hacer el método de Newton la 'N' aparece dividiendo y da problemas.
- Una nueva función llamada 'cubica' que va a ser la que realice propiamente el Método de Newton. La llamada a esta función se hace desde el bucle 'if' cuando la 'N' sea mayor que cero y se hace una llamada diferente para obtener cada una de las curvaturas k1, k2 y k3 en función

del valor de cada uno de los tres momentos M_1, M_2 y M_3 correspondientes. De esta forma se recalcula el valor de cada curvatura al variar su momento correspondiente.

Dentro de la función 'cubica' introducimos un bucle 'while' para que controle el número de iteraciones del método de Newton e imponga una tolerancia a la diferencia de la curvatura calculada en cada iteración con la curvatura inicial correspondiente a 'N' igual a cero.

Para implementar el Método de Newton ponemos las tres ecuaciones cúbicas en la forma siguiente:

$$x^3 + p \cdot x = q.$$

Entonces tenemos las ecuaciones de la siguiente forma con los correspondientes valores de 'p' y 'q' de cada una :

(1)

$$k_1^3 + k_1 \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{M_1}{P \cdot N},$$

$$p_1 = \frac{1}{N}, \quad q_1 = \frac{M_1}{P \cdot N},$$

(2)

$$k_2^3 + k_2 \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{M_2}{P \cdot R \cdot N},$$

$$p_2 = \frac{1}{N}, \quad q_2 = \frac{M_2}{P \cdot R \cdot N},$$

(3)

$$k_3^3 + k_3 \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = M_3 \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1) \cdot N},$$

$$p_3 = \frac{1}{N} \quad , \quad q_3 = M_3 \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1) \cdot N} .$$

El bucle 'if' es el siguiente:

```
//Calculo curvaturas de momentos
if(N==0.0)
{
k1=M1/P;
k2=M2/(P*R);
k3=2.0*(1.0+nu)*M3/(P*(R+1.0));
}
else
{
p=1.0/N;
//k1
q1=M1/(P*N);
k10=M1/P;
k1=cubica(p,q1,k10);
//k2
q2=M2/(P*R*N);
k20=M2/(P*R);
k2=cubica(p,q2,k20);
//k3
k30=2.0*(1.0+nu)*M3/(P*(R+1.0));
q3=2.0*(1.0+nu)*M3/(P*(R+1.0)*N);
k3=cubica(p,q3,k30);
}
```

El motivo de este bucle 'if' es porque en la definición del parámetro 'q' de cada ecuación cúbica aparece la 'N' dividiendo y por tanto para el caso en que la 'N' valga cero habría una singularidad.

Cuando 'N' es mayor que cero lo que hacemos es llamar a la función 'cubica' para el cálculo de cada curvatura y pasamos como argumentos la 'p' y 'q' correspondientes, y la curvatura para 'N' igual a cero.

La función llamada 'cubica' que hemos creado es la siguiente:

```
doublereal cubica(doublereal p,doublereal q,doublereal k0)
{
doublereal tol,err,f,fp,ki;
int maxiter,cont;
cont=0;
```

```

tol=10e-10;
maxiter=40;
err=10.0;
while(cont<=maxiter && err>tol)
{
f=k0*k0*k0+p*k0-q;
fp=3.0*k0*k0+p;
ki=k0-(f/fp);
err=abs(ki-k0);
k0=ki;
cont=cont+1;
}
return k0;
}

```

Esta función lo que hace es calcular la curvatura por el Método de Newton mediante una serie de iteraciones que hace el bucle 'while' en cada una de las cuales se hace un cálculo nuevo de la curvatura restando a la curvatura anterior el cociente formado por la ecuación cúbica y su derivada primera, y se compara esta nueva curvatura con la anterior para conseguir acotar la diferencia dentro de un determinado valor llamado tolerancia. Esta función la añadimos después de la última función en el correspondiente fichero 'xxx.c'.

4.3. Continuación numérica con material de comportamiento no lineal

En esta sección vamos a partir de un punto de los que tenemos etiquetados en la primera rama y manteniendo la longitud constante vamos a continuar el parámetro 'N' hasta que alcance un cierto valor. A continuación vamos a tomar varios puntos etiquetados de esta continuación y en cada uno de ellos vamos a volver a continuar en el parámetro longitud hacia la parte izquierda de disminución de la longitud y hacia la parte derecha de incremento de la longitud.

Para hacer esto tenemos que definir la 'N' como un parámetro a continuar ($N=\text{par}[6]$) y lo inicializamos a cero en la función 'stpnt'.

De esta forma vamos a ver cómo se comportan las nuevas ramas correspondientes a los diferentes valores de 'N' respecto a la rama original donde la 'N' tiene valor cero.

4.3.1. Diagramas de bifurcación y soluciones en el espacio real

Creamos en primer lugar el fichero de ecuaciones 'estat.c', que es el mismo fichero de ecuaciones usado para el estudio del caso lineal con la introducción de los bucles 'if' y 'while' que hemos explicado y el nuevo parámetro de cambio de linealidad 'N'. La sección que vamos a usar para todo el estudio es la de 4x2mm.

Igualmente creamos el correspondiente fichero 'c.estat' con los siguientes valores de los parámetros principales:

IRS=0. Partimos de la solución inicial.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar la rama principal.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=100. Decimos al programa que ponga etiqueta cada 100 iteraciones.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

DSMAX=0.5. El paso máximo no debe superar a 0.5.

Empezamos la continuación de la rama principal. Tecleamos:

```
auto
AUTO>ld('estat')
AUTO>r('estat')
```

Guardamos el resultado como 'rama1-11':

```
AUTO>sv('rama1-11')
```

Obtenemos la primera rama del primer BP con un fichero de constantes que vamos a llamar 'c.estat-11.1' que tiene los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=2. Partimos de la etiqueta 2 de la solución anterior.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 131

NMX=1500. El número de iteraciones va a ser 1500 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DSMAX= 1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma más rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama1-11',c='estat-11.1')
```

Salvamos el resultado como 'rama2-11' tecleando:

```
AUTO>sv('rama2-11')
```

Una vez que tenemos la rama cogemos un punto de los que están etiquetados para hacer continuación en el parámetro 'N'. Dicho punto va a ser el correspondiente a la etiqueta número 16. Para hacer esta continuación creamos un fichero de constantes que vamos a llamar 'c.estat-N' y que tiene los siguientes valores de los parámetros:

IRS=16. Partimos de la etiqueta 16.

NICP=3. Mostramos tres parámetros por pantalla siendo el primero el número seis.

NBC=20. Tenemos 20 condiciones de contorno.

ISW=1. Vamos a ejecutar una rama principal.

NMX=1000. Hacemos un máximo de 1000 iteraciones.

NPR=10. Decimos al programa que ponga etiqueta cada 10 iteraciones.

DS=0.1. El paso inicial es 0.1.

DSMAX=10000. El paso máximo no debe superar a 10000.

NUZR=1. Para que nos coloque etiquetas en puntos concretos.

Procedemos a la ejecución:

```
AUTO>r(s='rama2-11',c='estat-N')
```

Guardamos el resultado como 'rama-N':

```
AUTO>sv('rama-N')
```

De todos los puntos etiquetados vamos a tomar los siguientes para volver a hacer la continuación en longitud:

$N=0.1$ (etiqueta 45), $N=0.516$ (etiqueta 54), $N=1.048$ (etiqueta 60), $N=10.262$ (etiqueta 96).

También nos ha salido un punto 'BP' en $N=0.276$ (etiqueta 51) en el que tendremos que hacer el cambio de rama.

Empezamos haciendo continuación en longitud en cada uno de los cuatro puntos que hemos seleccionado de 'rama-N':

- $N=0.1$

Vamos a continuar en primer lugar por la izquierda, para lo cual creamos el fichero de constantes 'c.estat-N1i.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=45. Partimos de la etiqueta 45 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=600. El número de iteraciones va a ser 600 a lo sumo.

NPR=10. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 10 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de $1e4$ para recorrer la rama de forma rápida.

Una vez que tenemos el fichero tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N1i.1')
```

Guardamos el resultado como 'rama-N1i.1':

```
AUTO>sv('rama-N1i.1')
```

Continuamos ahora por la derecha, para lo que creamos el fichero 'c.estat-N1d.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=45. Partimos de la etiqueta 45 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 133

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N1d.1')
```

Vemos que nos han salido algunos puntos 'BP' en la rama de los cuales vamos a tomar el primero de ellos para hacer el cambio de rama.

Salvamos el resultado como 'rama-N1d.1':

```
AUTO>sv('rama-N1d.1')
```

Procedemos a hacer el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 97) que nos ha salido en 'rama-N1d.1', para el cual creamos el fichero 'c.estat-N1d.2' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=97. Partimos de la etiqueta 97 de 'rama-N1d.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N1d.1',c='estat-N1d.2')
```

Salvamos como 'N1d.2':

```
AUTO>sv('rama-N1d.2')
```

En los diagramas de bifurcación vamos a representar la rama inicial de la situación lineal ($N=0$) de la que hemos partido, que es la 'rama2-11', y todas las ramas que hemos obtenido en $N=0.1$. Los diagramas de bifurcación de las dos direcciones de pandeo son los siguientes:

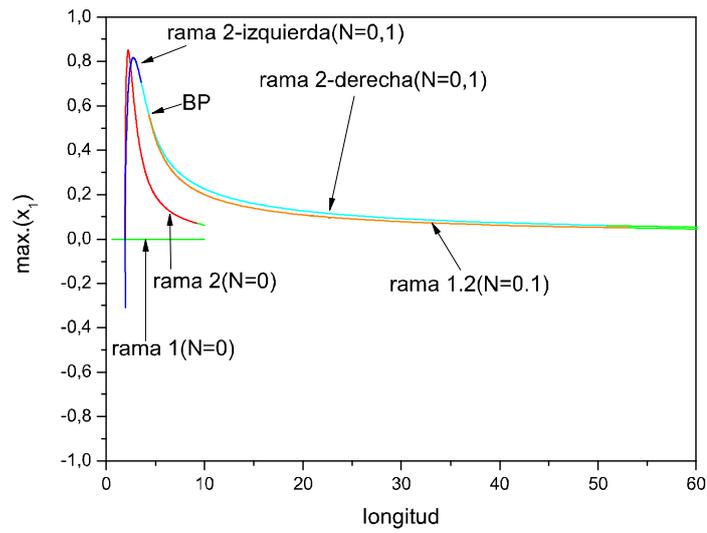
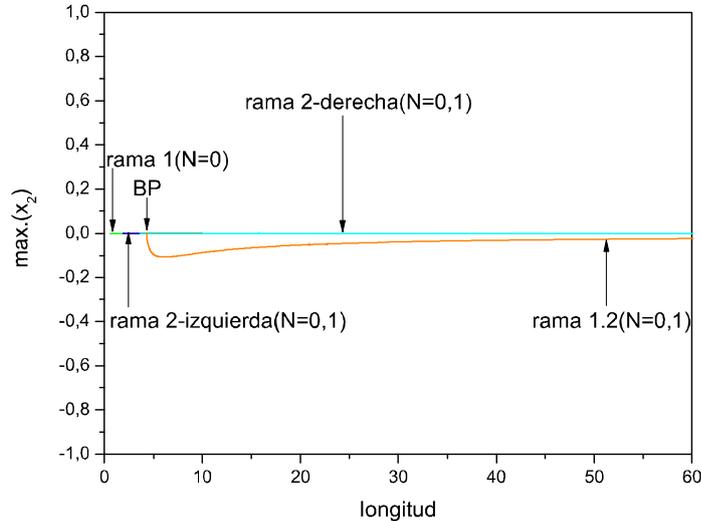


Figura 4.1: Máximo de x_1 en $N=0.1$

Figura 4.2: Máximo de x_2 en $N=0.1$

La notación que hemos usado para señalar las ramas en los diagramas es la siguiente:

'rama1-11': rama 1 ($N=0$)

'rama2-11': rama 2 ($N=0$)

'rama-N1i.1': rama 2-izquierda ($N=0.1$). Es la que se obtiene al continuar por la izquierda en $N=0.1$.

'rama-N1d.1': rama 2-derecha ($N=0.1$). Es la que se obtiene al continuar por la derecha en $N=0.1$.

'rama-N1d.2': rama 1.2 ($N=0.1$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N1d.1'.

Fijándonos en el diagrama de la flecha en la dirección de menor inercia, máximo de x_1 , vemos que el punto de la rama de la que hemos partido (etiqueta 16 de 'rama2-11') cuando teníamos linealidad ($N=0$) sube una cierta cantidad cuando continuamos en ' N ' y nos paramos en $N=0.1$, pasando a tener por tanto mayor flecha debido a una menor rigidez.

Al continuar en sentido decreciente (por la izquierda) la rama sube hasta un máximo y después disminuye de forma casi vertical hasta que llega un

momento en que queda por debajo de la rama original en $N=0$ y posteriormente pasa a ser prácticamente coincidente con la rama en $N=0$, llegando a flecha cero en el mismo punto en el que nacía la rama en $N=0$. Entonces lo que está ocurriendo es que al disminuir la longitud, el filamento vuelve a la posición inicial de flecha cero cuando la longitud es la misma para la que se producía el pandeo al ir incrementando la longitud.

Una observación importante es el cambio que se produce en la rigidez del filamento cuando al continuar por la izquierda la rama atraviesa a la rama original ($N=0$) quedando por debajo de esta última, con lo cual tenemos que al principio la rigidez es menor que la del punto de partida en $N=0$ y al continuar en longitud a partir de $N=0.1$ en sentido decreciente dicha rigidez empieza a aumentar hasta superar a la de la rama original ($N=0$) para un mismo valor de la longitud. Por tanto en el intervalo en que la rama en $N=0.1$ queda por debajo de la rama en $N=0$ el filamento tiene más rigidez, para una determinada longitud, en el camino de retorno hacia la posición recta que en el camino que tuvo hacia la posición deformada cuando 'N' era cero.

Cuando nos movemos por la rama que nace del primer 'BP' de la rama obtenida al continuar por la derecha ('rama-N1d.2) aparece también flecha en la otra dirección puesto que en el segundo diagrama, correspondiente al máximo de x_2 , aparece una evolución de esta rama mientras que las otras ramas aparecen como una línea horizontal a la altura de flecha cero porque en ellas sólo existe flecha en la dirección de menor inercia.

En los diagramas de formas representamos sólo algunos de los puntos etiquetados de cada rama obtenida. Los dos diagramas de las dos direcciones de pandeo son los siguientes:

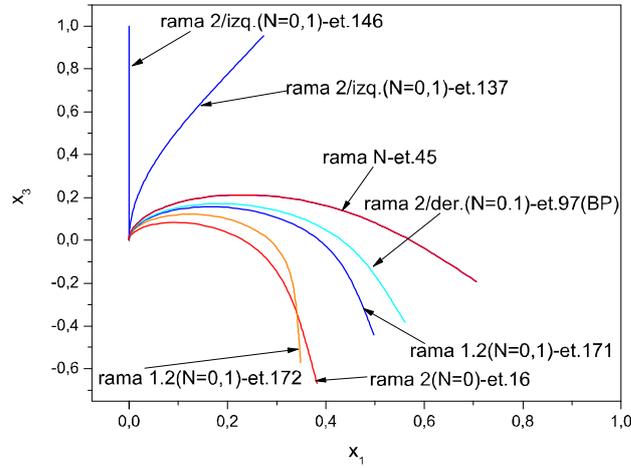


Figura 4.3: Deformación en dirección x_1 para $N=0.1$

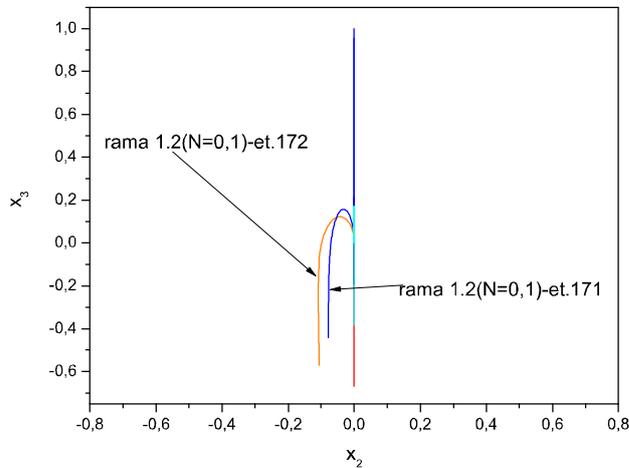


Figura 4.4: Deformación en dirección x_2 para $N=0.1$

En el diagrama del pandeo según la menor inercia (x_3-x_1) tenemos las posiciones deformadas en la dirección de menor inercia de los puntos etiquetados que hemos tomado para representar que son el de la etiqueta 16 de 'rama2-11', el de la etiqueta 45 de 'rama-N', el de las etiquetas 137 y 146 de 'rama-N1i.1', el de la etiqueta 97 de 'rama-N1d.1', y los de las etiquetas

171 y 172 de 'rama-N1d.2'. Sin embargo en el diagrama según la mayor inercia (x_3-x_2) sólo tenemos a la vista las posiciones deformadas de los puntos etiquetados de 'rama-N1d.2', que son el 171 y el 172, porque todas las posiciones de los puntos etiquetados de las demás ramas las vemos confundidas en la misma línea vertical de inicio del pandeo por existir pandeo sólo en la dirección de menor inercia para dichos puntos.

Podemos ver que todas las deformaciones que hemos representado de todas las ramas son deformaciones en primer modo, que en ninguna de las ramas aparece un segundo modo de deformación.

- N=0.516

Continuamos en primer lugar por la izquierda, para lo cual creamos el fichero de constantes 'c.estat-N2i.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=54. Partimos de la etiqueta 54 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=600. El número de iteraciones va a ser 600 a lo sumo.

NPR=10. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 10 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Una vez que tenemos el fichero tecleamos:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N2i.1')
```

Nos han salido varios 'BP' en la rama de los que haremos el cambio de rama en el primero de ellos.

Guardamos el resultado como 'rama-N2i.1':

```
AUTO>sv('rama-N2i.1')
```

Continuamos ahora por la derecha, para lo que creamos el fichero 'c.estat-N2d.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=54. Partimos de la etiqueta 54 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 139

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N2d.1')
```

Nos han salido algunos 'BP' en la rama de los cuales vamos a tomar el primero de ellos para hacer el cambio de rama.

Salvamos el resultado como 'rama-N2d.1':

```
AUTO>sv('rama-N2d.1')
```

Procedemos a hacer el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 103) que nos ha salido al continuar por la parte izquierda ('rama-N2i.1'), para el cual creamos el fichero 'c.estat-N2i.2' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=103. Partimos de la etiqueta 103 de 'rama-N2i.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e5. Ponemos un paso máximo de 1e5 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N2i.1',c='estat-N2i.2')
```

Salvamos como 'rama-N2i.2':

```
AUTO>sv('rama-N2i.2')
```

Hacemos ahora el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 99) que nos ha salido al continuar por la parte derecha ('rama-N2d.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N2d.3' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=99. Partimos de la etiqueta 99 de 'rama-N2d.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1300. El número de iteraciones va a ser 1300 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama-N2d.1',c='estat-N2d.3')
```

Salvamos como 'rama-N2d.3':

```
AUTO>sv('rama-N2d.3')
```

En los diagramas de bifurcación vamos a representar la rama inicial de la situación lineal ($N=0$) de la que hemos partido, que es la 'rama2-11', y todas las ramas que hemos obtenido en $N=0.516$. Los diagramas de bifurcación de las dos direcciones de pandeo son los siguientes:

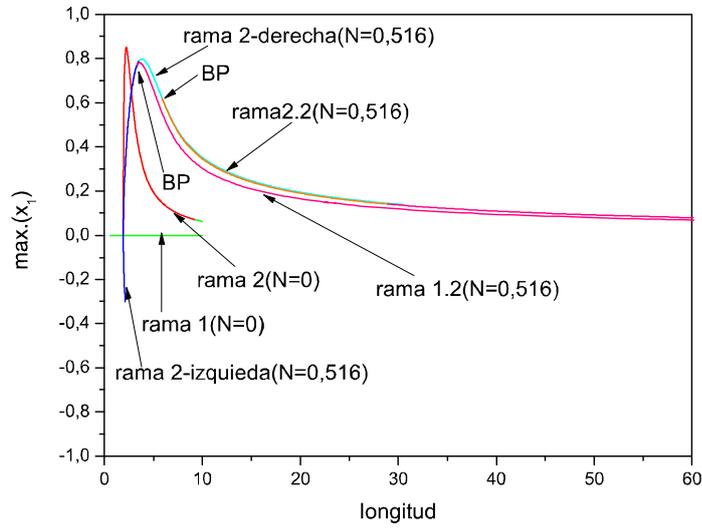


Figura 4.5: Máximo de x_1 en $N=0.516$

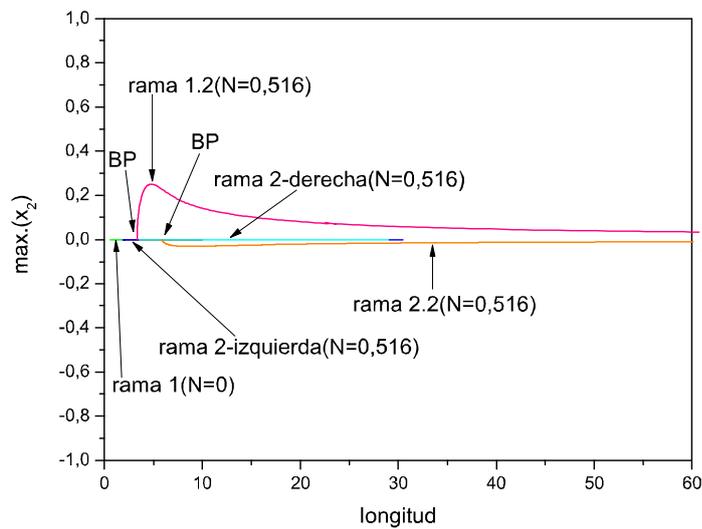


Figura 4.6: Máximo de x_2 en $N=0.516$

La notación que hemos usado para señalar las ramas en los diagramas es la siguiente:

'rama1-11': rama 1 ($N=0$)

'rama2-11': rama 2 ($N=0$)

'rama-N2i.1': rama 2-izquierda ($N=0.516$). Es la que se obtiene al continuar por la izquierda en $N=0.516$.

'rama-N2d.1': rama 2-derecha ($N=0.516$). Es la que se obtiene al continuar por la derecha en $N=0.516$.

'rama-N2i.2': rama 1.2 ($N=0.516$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N2i.1'.

'rama-N2d.3': rama 2.2 ($N=0.516$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N2d.1'.

En el diagrama de la flecha en la dirección de menor inercia, máximo de x_1 , vemos que al igual que para la 'N' anterior, el punto de la rama de la que hemos partido (etiqueta 16 de 'rama2-11') ha subido una cierta cantidad cuando hemos continuado en 'N' y nos hemos parado en $N=0.516$, por lo que la flecha ha aumentado su valor y por tanto ha disminuido la rigidez del filamento en esta dirección.

Al continuar en sentido decreciente (por la izquierda) la rama disminuye de forma casi vertical hasta que llega un momento en que queda por debajo de la rama original en $N=0$, con lo cual la rigidez pasa a ser mayor que la del caso lineal para los mismos valores de longitud. Posteriormente la rama pasa a ser coincidente con la rama lineal ($N=0$), llegando a flecha cero en el mismo valor de la longitud para el que nacía la rama en $N=0$. Por tanto tenemos que al disminuir la longitud, el filamento vuelve a su posición inicial recta para el mismo valor de la longitud a partir del cual el filamento pandeaba cuando se iba incrementando la longitud.

En el segundo diagrama, correspondiente al máximo de x_2 , aparece únicamente una evolución de las ramas que hemos obtenido al continuar en los primeros 'BP' de las ramas obtenidas al continuar por la izquierda y por la derecha, que son la 'rama-N2i.2' y la 'rama-N2d.3' respectivamente; mientras que las otras ramas aparecen todas confundidas en la línea horizontal de flecha cero porque en ellas sólo existe pandeo en la dirección de menor inercia. Una observación es que la 'rama-N2i.2' sale en sentido creciente del parámetro a pesar de que hemos hecho la continuación en el sentido decreciente.

En los diagramas de formas representamos sólo un punto etiquetado de cada rama obtenida. Los dos diagramas de las dos direcciones de pandeo son

los siguientes:

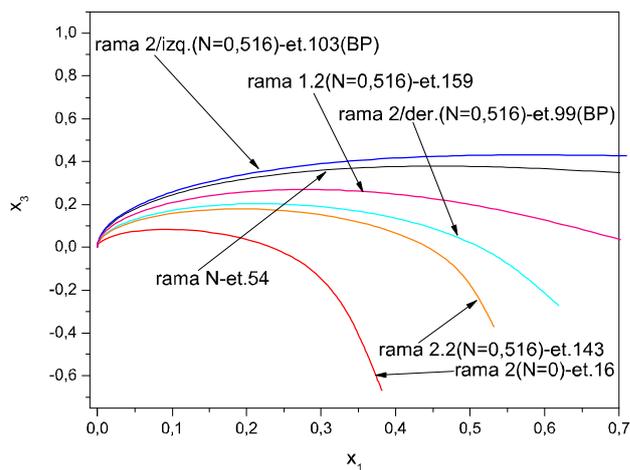


Figura 4.7: Deformación en dirección x_1 para $N=0.516$

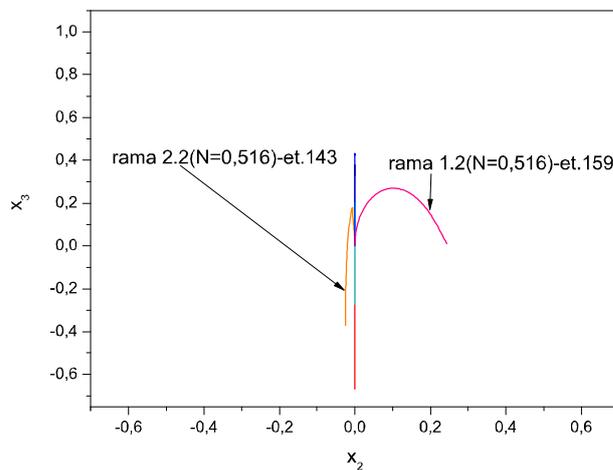


Figura 4.8: Deformación en dirección x_2 para $N=0.516$

En el diagrama del pandeo según la menor inercia (x_3-x_1) vemos las posiciones deformadas en la dirección de menor inercia de los puntos etiquetados

que hemos tomado que son el de la etiqueta 16 de 'rama2-11', el de la etiqueta 54 de 'rama-N', el de la etiqueta 103 de 'rama-N2i.1', el de la etiqueta 99 de 'rama-N2d.1', el de la etiqueta 159 de 'rama-N2i.2', y el de la etiqueta 143 de 'rama-N2d.3'. En el diagrama según la mayor inercia (x_3-x_2) sólo vemos posiciones deformadas de los puntos etiquetados tomados de 'rama-N2i.2' y de 'rama-N2d.3' porque los demás puntos etiquetados que hemos tomado de las otras ramas no tienen deformación en esta dirección y sus posiciones deformadas las vemos confundidas en la misma línea vertical de inicio del pandeo por producirse la deformación únicamente en la dirección de menor inercia.

Podemos ver que, al igual que en la 'N' anterior, todas las deformaciones que hemos representado de todas las ramas son deformaciones en primer modo, que en ninguna de las ramas aparece un segundo modo de deformación.

- N=1.048

Continuamos primero por la izquierda, para lo cual creamos el fichero de constantes 'c.estat-N3i.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=60. Partimos de la etiqueta 60 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=600. El número de iteraciones va a ser 600 a lo sumo.

NPR=10. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 10 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Una vez que tenemos el fichero lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N3i.1')
```

De los 'BP' que nos han salido en la rama haremos el cambio de rama en el primero de ellos.

Guardamos el resultado como 'rama-N3i.1':

```
AUTO>sv('rama-N3i.1')
```

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 145

Continuamos ahora por la derecha, para lo cual creamos el fichero 'c.estat-N3d.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=60. Partimos de la etiqueta 60 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N3d.1')
```

Igualmente haremos el cambio de rama en el primero de los 'BP' que nos han salido.

Salvamos el resultado como 'rama-N3d.1':

```
AUTO>sv('rama-N3d.1')
```

Hacemos el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 107) que nos ha salido al continuar por la parte izquierda ('rama-N3i.1'), para el cual creamos el fichero 'c.estat-N3i.2' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=107. Partimos de la etiqueta 107 de 'rama-N3i.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e5. Ponemos un paso máximo de 1e5 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N3i.1',c='estat-N3i.2')
```

Salvamos como 'rama-N3i.2':

```
AUTO>sv('rama-N3i.2')
```

Hacemos el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 99) que nos ha salido al continuar por la parte derecha ('rama-N3d.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N3d.3' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=99. Partimos de la etiqueta 99 de 'rama-N3d.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1300. El número de iteraciones va a ser 1300 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e6. Ponemos un paso máximo de 1e6 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama-N3d.1',c='estat-N3d.3')
```

Salvamos como 'rama-N3d.3':

```
AUTO>sv('rama-N3d.3')
```

En los diagramas de bifurcación vamos a representar la rama inicial de la situación lineal ($N=0$) de la que hemos partido, que es la 'rama2-11', y todas las ramas que hemos obtenido en $N=1.048$. Los diagramas de bifurcación de las dos direcciones son los siguientes:

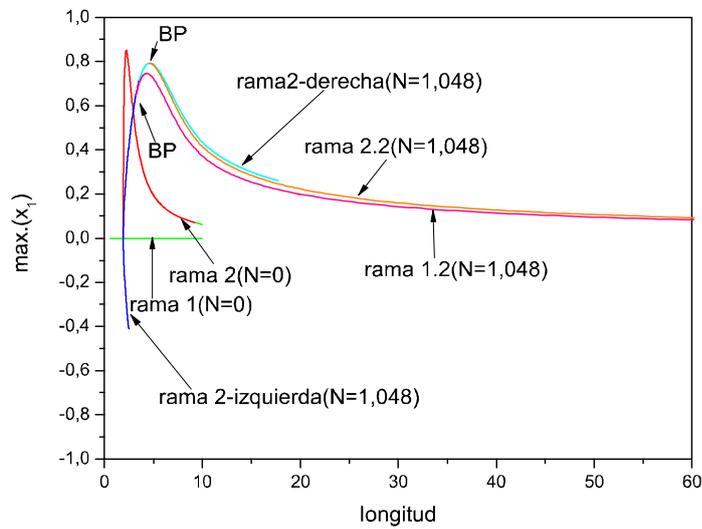


Figura 4.9: Máximo de x_1 en $N=1.048$

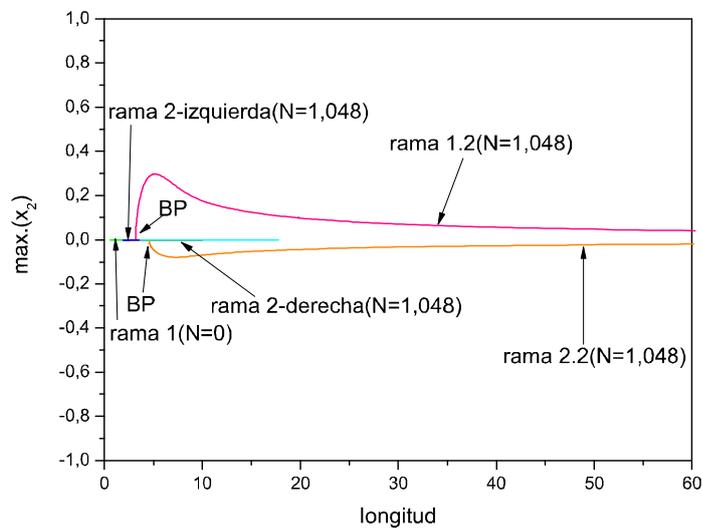


Figura 4.10: Máximo de x_2 en $N=1.048$

La notación que hemos usado para señalar las ramas en los diagramas es la siguiente:

'rama1-11': rama 1 ($N=0$)

'rama2-11': rama 2 ($N=0$)

'rama-N3i.1': rama 2-izquierda ($N=1.048$). Es la que se obtiene al continuar por la izquierda en $N=1.048$

'rama-N3d.1': rama 2-derecha ($N=1.048$). Es la que se obtiene al continuar por la derecha en $N=1.048$.

'rama-N3i.2': rama 1.2 ($N=1.048$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N3i.1'.

'rama-N3d.3': rama 2.2 ($N=1.048$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N3d.1'.

En el diagrama de la flecha en la dirección de menor inercia, máximo de x_1 , vemos que al igual que para las dos 'N' anteriores, el punto de la rama de la que hemos partido (etiqueta 16 de 'rama2-11') ha subido un poco cuando hemos continuado en 'N' y nos hemos parado en $N=1.048$, por lo que la flecha ha aumentado debido a que la rigidez ha disminuido respecto al punto de partida en que tenemos material lineal.

Al continuar en sentido decreciente (por la izquierda) la rama disminuye de forma casi vertical hasta que llega un momento en que queda por debajo de la rama original en $N=0$ y entonces la rigidez pasa a ser mayor que la del caso lineal para los mismos valores de longitud. Posteriormente la rama pasa a ser coincidente con la rama lineal ($N=0$), llegando a flecha cero en el mismo valor de la longitud para el que nacía la rama lineal. Por tanto, al igual que en los dos casos anteriores, tenemos que al disminuir la longitud, el filamento vuelve a su posición inicial recta para el mismo valor de la longitud a partir del cual el filamento pandeaba cuando se iba incrementando la longitud.

En el segundo diagrama, correspondiente al máximo de x_2 , las ramas que únicamente evolucionan son las que hemos obtenido al continuar en los primeros 'BP' de las ramas obtenidas al continuar por la izquierda y por la derecha, que son la 'rama-N3i.2' y la 'rama-N3d.3' respectivamente; mientras que las otras ramas aparecen todas confundidas en la línea horizontal de flecha cero porque en ellas sólo existe pandeo en la dirección de menor inercia. Al igual que en la 'N' anterior la 'rama-N3i.2' va en sentido creciente a pesar de haber continuado en sentido decreciente.

En los diagramas de formas representamos sólo un punto etiquetado por cada rama obtenida. Los dos diagramas de las dos direcciones son los siguientes:

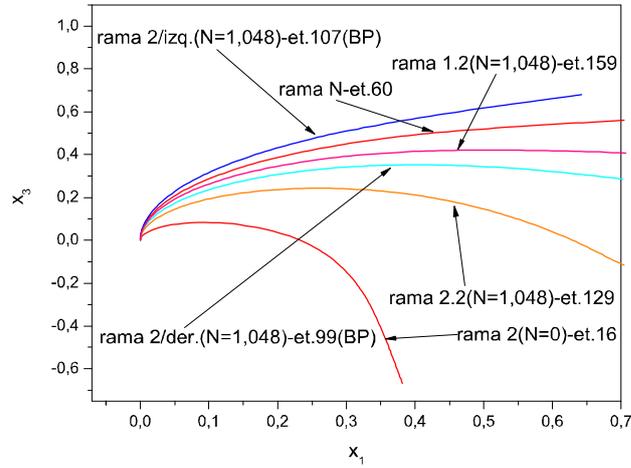


Figura 4.11: Deformación en dirección x_1 para $N=1.048$

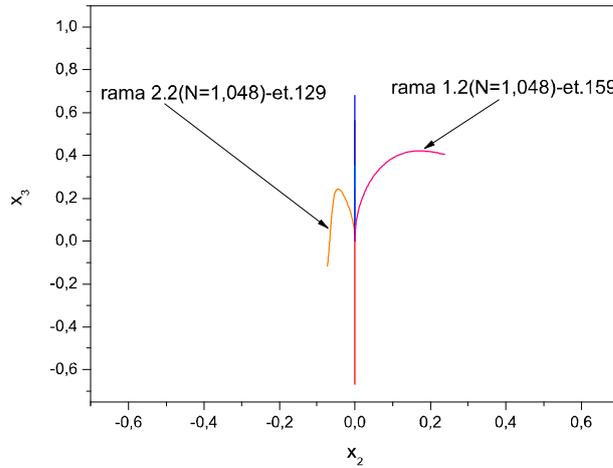


Figura 4.12: Deformación en dirección x_2 para $N=1.048$

En el diagrama del pandeo según la menor inercia (x_3-x_1) vemos las posiciones deformadas en la dirección de menor inercia de los puntos etiquetados que hemos tomado que son el de la etiqueta 16 de 'rama-11', el de la etiqueta 60 de 'rama-N', el de la etiqueta 107 de 'rama-N3i.1', el de la etiqueta 99 de 'rama-N3d.1', el de la etiqueta 159 de 'rama-N3i.2', y el de la etiqueta 129 de 'rama-N3d.3'. En el diagrama según la mayor inercia (x_3-x_2) sólo vemos

posiciones deformadas de los puntos etiquetados tomados de 'rama-N3i.2' y de 'rama-N3d.3' porque los demás puntos etiquetados que hemos tomado de las otras ramas no tienen deformación en esta dirección y sus posiciones deformadas las vemos confundidas en la misma línea vertical de inicio del pandeo por producirse la deformación únicamente en la dirección de menor inercia.

Podemos ver que, al igual que en las 'N' anteriores, todas las deformaciones que hemos representado de todas las ramas son deformaciones en primer modo y que en ninguna de las ramas aparece un segundo modo de deformación.

- N=10.262

Continuamos en primer lugar por la izquierda, para lo cual creamos el fichero de constantes 'c.estat-N4i.1' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=96. Partimos de la etiqueta 96 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=600. El número de iteraciones va a ser 600 a lo sumo.

NPR=10. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 10 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Una vez que tenemos el fichero lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N4i.1')
```

De los 'BP' que nos han salido haremos el cambio de rama en el primero de ellos.

Guardamos el resultado como 'rama-N4i.1':

```
AUTO>sv('rama-N4i.1')
```

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 151

Continuamos por la derecha, para lo cual creamos el fichero 'c.estat-N4d.1' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=96. Partimos de la etiqueta 96 de 'rama-N'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e5. Ponemos un paso máximo de 1e5 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N4d.1')
```

Igualmente haremos el cambio de rama en el primero de los 'BP' que nos han salido.

Salvamos el resultado como 'rama-N4d.1':

```
AUTO>sv('rama-N4d.1')
```

Hacemos el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 100) que nos ha salido en la parte izquierda ('rama-N4i.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N4i.2' con los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=100. Partimos de la etiqueta 100 de 'rama-N4i.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=2000. El número de iteraciones va a ser 2000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e4. Ponemos un paso máximo de 1e4 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N4i.1',c='estat-N4i.2')
```

Salvamos como 'rama-N4i.2':

```
AUTO>sv('rama-N4i.2')
```

Hacemos el cambio de rama en el primer 'BP' (etiqueta 97) que nos ha salido en la parte de la derecha ('rama-N4d.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N4d.3' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=97. Partimos de la etiqueta 97 de 'rama-N4d.1'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1300. El número de iteraciones va a ser 1300 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e6. Ponemos un paso máximo de $1e6$ para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos:

```
AUTO>r(s='rama-N4d.1',c='estat-N4d.3')
```

Salvamos como 'rama-N4d.3':

```
AUTO>sv('rama-N4d.3')
```

En los diagramas de bifurcación vamos a representar la rama inicial de la situación lineal ($N=0$) de la que hemos partido, la 'rama2-11', y todas las ramas que hemos obtenido en $N=10.262$. Los diagramas de bifurcación de las dos direcciones son los siguientes:

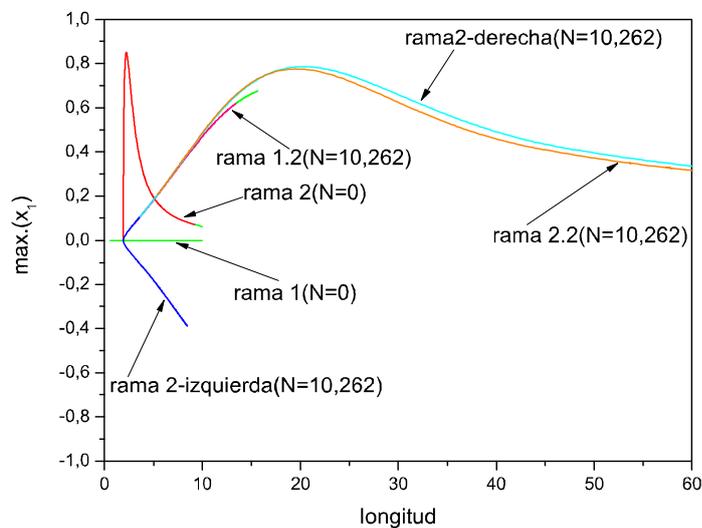


Figura 4.13: Máximo de x_1 en $N=10.262$

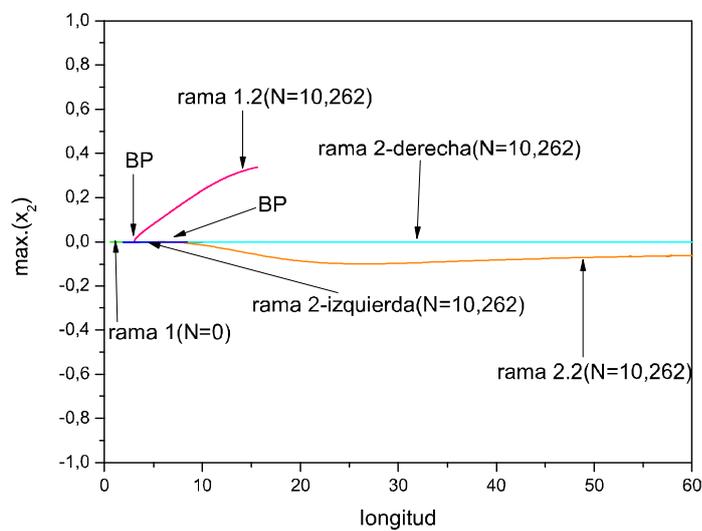


Figura 4.14: Máximo de x_2 en $N=10.262$

La notación que hemos usado para señalar las ramas en los diagramas es la siguiente:

'rama1-11': rama 1 ($N=0$)

'rama2-11': rama 2 ($N=0$)

'rama-N4i.1': rama 2-izquierda ($N=10.262$). Es la que se obtiene al continuar por la izquierda en $N=10.262$

'rama-N4d.1': rama 2-derecha ($N=10.262$). Es la que se obtiene al continuar por la derecha en $N=10.262$.

'rama-N4i.2': rama 1.2 ($N=10.262$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N4i.1'.

'rama-N4d.3': rama 2.2 ($N=10.262$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N4d.1'.

En el diagrama de la flecha en la dirección de menor inercia, máximo de x_1 , vemos que al contrario que para las tres 'N' anteriores, el punto de la rama de la que hemos partido (etiqueta 16 de 'rama2-11') ha bajado cuando hemos continuado en 'N' y nos hemos parado en $N=10.262$, por lo que la flecha ha disminuido porque la rigidez ha aumentado respecto al punto de partida en que el material es lineal. Este aumento de rigidez y consecuente bajada de flecha es debido a que hemos tomado una 'N' con un valor bastante alto en relación a los valores anteriores y hemos aumentado mucho la curvatura equivalente de las ecuaciones momento-curvatura.

Al continuar en sentido decreciente (por la izquierda) la rama disminuye y corta al eje de flecha cero en el mismo valor de la longitud para el que nace la rama de pandeo en el caso lineal. La rama pasa a ser coincidente con la rama lineal ($N=0$) un poco antes de llegar a flecha cero, llegando a flecha cero en el mismo valor de la longitud para el que nacía la rama lineal. En este caso, al tener 'N' un valor elevado, el descenso de la rama en sentido decreciente no se produce de forma tan vertical, con lo cual la diferencia de rigidez para iguales valores de longitud entre el proceso de recuperación a flecha cero y el de deformación es mayor que en los casos anteriores. También la coincidencia con la rama lineal se produce más abajo, muy cerca de la flecha cero.

En el segundo diagrama, correspondiente al máximo de x_2 , las ramas que evolucionan son, al igual que en las 'N' anteriores, sólo las que hemos obtenido al continuar en los primeros 'BP' de las ramas obtenidas al continuar por la izquierda y por la derecha, que son la 'rama-N4i.2' y la 'rama-N4d.3' respectivamente; mientras que las otras ramas aparecen todas confundidas en la línea horizontal de flecha cero. Vuelve a ocurrir que la 'rama-N4i.2' se dirige en sentido creciente aunque la hayamos continuado en sentido decreciente.

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 155

En los diagramas de formas representamos sólo un punto etiquetado por cada rama obtenida. Los dos diagramas de las dos direcciones son los siguientes:

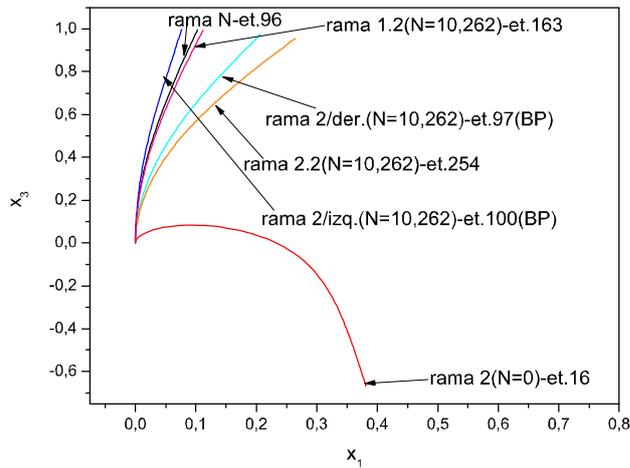


Figura 4.15: Deformación en dirección x_1 para $N=10.262$

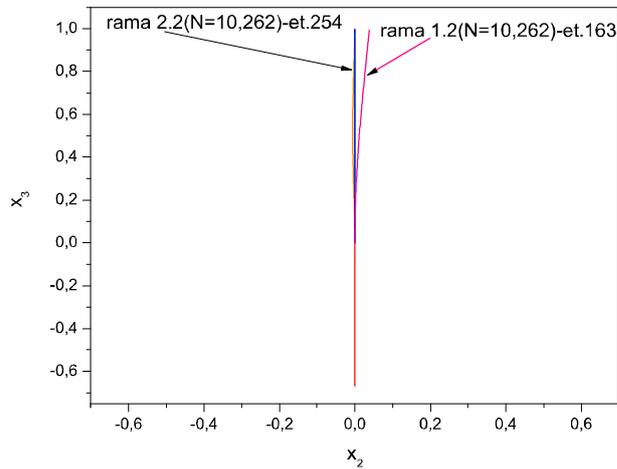


Figura 4.16: Deformación en dirección x_2 para $N=10.262$

En el diagrama del pandeo según la menor inercia (x_3-x_1) vemos las posiciones deformadas en la dirección de menor inercia de los puntos etiquetados

que hemos elegido que son el de la etiqueta 16 de 'rama2-11', el de la etiqueta 96 de 'rama-N', el de la etiqueta 100 de 'rama-N4i.1', el de la etiqueta 97 de 'rama-N4d.1', el de la etiqueta 163 de 'rama-N4i.2', y el de la etiqueta 254 de 'rama-N4d.3'. En el diagrama según la mayor inercia (x_3-x_2) sólo vemos posiciones deformadas de los puntos etiquetados representados de 'rama-N4i.2' y de 'rama-N4d.3' porque los demás puntos etiquetados que hemos representado de las otras ramas no tienen deformación en esta dirección y sus posiciones deformadas las vemos confundidas en la misma línea vertical de inicio del pandeo por producirse la deformación únicamente en la dirección de menor inercia.

Podemos ver que, al igual que en las 'N' anteriores, todas las deformaciones que hemos representado de todas las ramas son deformaciones en primer modo y que en ninguna de las ramas aparece un segundo modo de deformación.

Ahora vamos a hacer el cambio de rama en el punto 'BP' que nos había salido al hacer la continuación en 'N' desde el punto inicial de la rama en $N=0$. Este 'BP' corresponde a la etiqueta 51 de 'rama-N' y el fichero de constantes que se va a utilizar para hacer el cambio de rama se va a llamar 'c.estat-N.1' y va a tener los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=51. Partimos de la etiqueta 51 de 'rama-N'.

ISW=-1. Hacemos el cambio de rama.

NMX=1000. El número máximo de iteraciones va a ser 1000.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e5. Ponemos un paso máximo de $1e5$ para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos el cambio de rama con el siguiente comando:

```
AUTO>r(s='rama-N',c='estat-N.1')
```

Guardamos la rama resultado como 'rama-N.1':

```
AUTO>sv('rama-N.1')
```

Vamos a mostrar los diagramas de bifurcación de las dos continuaciones en 'N' que hemos realizado, la continuación de la rama principal 'rama-N' y la continuación del cambio de rama en el primer 'BP' 'rama-N.1':

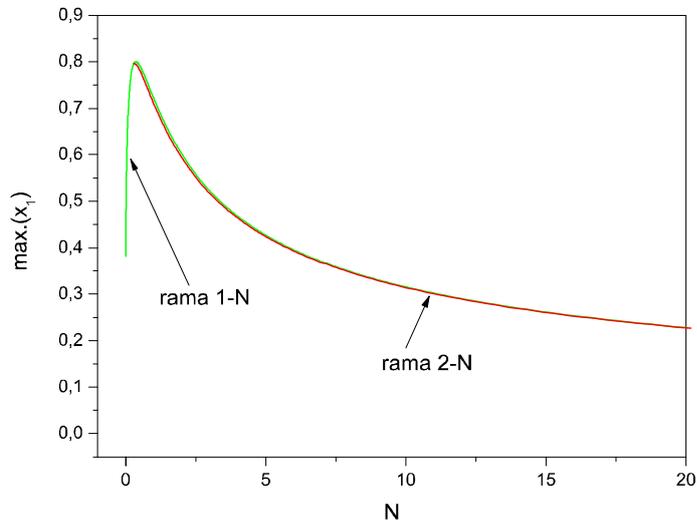


Figura 4.17: Máximo de x_1 para continuación en ' N '

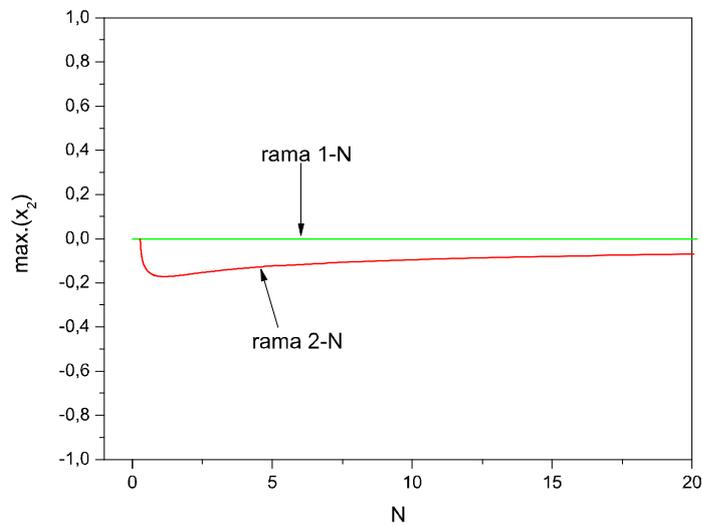


Figura 4.18: Máximo de x_2 para continuación en ' N '

Hemos llamado rama 1-N a la rama principal de la continuación 'rama-N', y la rama obtenida a partir del primer 'BP' de la rama principal 'rama-N.1' la hemos llamado rama 2-N.

En el primer diagrama vemos lo que hemos estado viendo cuando hemos representado los diagramas de bifurcación frente a la longitud para las diferentes 'N', que es un aumento de la flecha para valores bajos de 'N' y una progresiva disminución de la flecha conforme 'N' va alcanzando valores altos. En la nueva rama obtenida a partir del 'BP' de la rama principal ocurre lo mismo, al principio la flecha ha subido respecto a la que tenemos inicialmente y conforme 'N' aumenta su valor la flecha disminuye progresivamente. Otra cosa importante es que esta segunda rama presenta una evolución en el segundo diagrama, lo cual significa que en el transcurso por esta rama aparece pando también en la dirección de mayor inercia.

En dos de los puntos etiquetados de la nueva rama 'rama-N.1' que hemos obtenido del cambio de rama vamos a proceder de manera análoga a como hicimos en los puntos de la rama principal de la continuación en 'N' ('rama-N'), es decir, manteniendo 'N' constante vamos a continuar en longitud desde cada punto de esta nueva rama por la parte izquierda y por la parte derecha. Los dos puntos etiquetados en los que vamos a hacer esta continuación van a ser los correspondientes a $N=0.732580$ (etiqueta 97) y a $N=17.0673$ (etiqueta 99):

- $N=0.732580$

Continuamos primero por la izquierda, con el fichero de constantes 'c.estat-N6i.1' que tiene los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=97. Partimos de la etiqueta 97 de 'rama-N.1'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1200. El número de iteraciones va a ser 1200 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e8. Ponemos un paso máximo de $1e8$ para recorrer la rama de forma rápida.

Una vez que tenemos el fichero lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N.1',c='estat-N6i.1')
```

El resultado lo salvamos como 'rama-N6i.1':

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 159

```
AUTO>sv('rama-N6i.1')
```

Continuamos por la derecha con el fichero de constantes 'c.estat-N6d.1' que tiene los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=97. Partimos de la etiqueta 97 de 'rama-N.1'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e5. Ponemos un paso máximo de 1e5 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N.1',c='estat-N6d.1')
```

Guardamos el resultado como 'rama-N6d.1':

```
AUTO>sv('rama-N6d.1')
```

Al igual que en los casos anteriores vamos a hacer el cambio de rama en el primer 'BP' que nos ha salido en la rama obtenida por la izquierda ('rama-N6i.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N6i.2' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=101. Partimos de la etiqueta 101 de 'rama-N6i.1'.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e10. Ponemos un paso máximo de 1e10 para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N6i.1',c='estat-N6i.2')
```

Salvamos el resultado como 'rama-N6i.2':

```
AUTO>sv('rama-N6i.2')
```

En los diagramas de bifurcación vamos a representar la rama inicial de la situación lineal ($N=0$) de la que hemos partido ('rama2-11') y todas las ramas que hemos obtenido en el punto $N=0.732580$ de la segunda rama obtenida de la continuación en 'N'. Los diagramas de bifurcación de las dos direcciones son los siguientes:

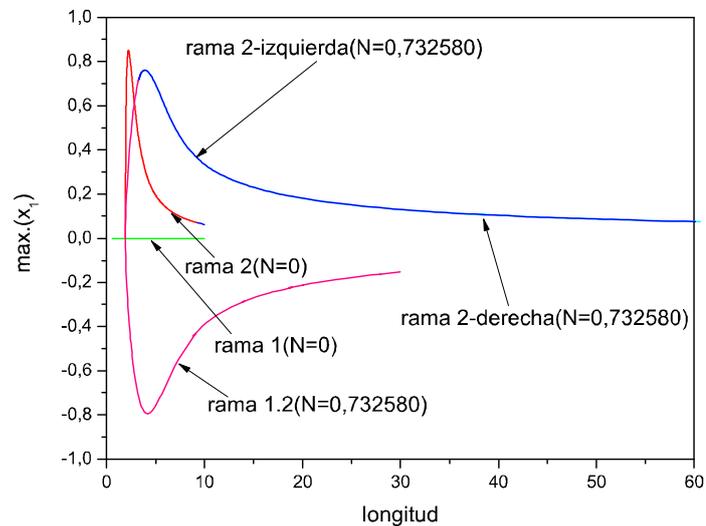
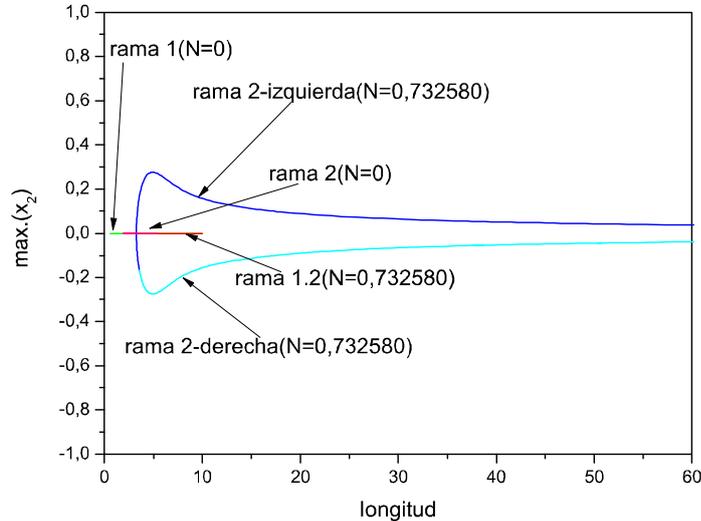


Figura 4.19: Máximo de x_1 en $N=0.732580$

Figura 4.20: Máximo de x_2 en $N=0.732580$

La notación que hemos usado para señalar las ramas en los diagramas es la siguiente:

'rama1-11': rama 1 ($N=0$)

'rama2-11': rama 2 ($N=0$)

'rama-N6i.1': rama 2-izquierda ($N=0.732580$). Es la que se obtiene al continuar por la izquierda en $N=0.732580$ de 'rama-N.1'.

'rama-N6d.1': rama 2-derecha ($N=0.732580$). Es la que se obtiene al continuar por la derecha en $N=0.732580$ de 'rama-N.1'.

'rama-N6i.2': rama 1.2 ($N=0.732580$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N6i.1'.

En el diagrama de la flecha en la dirección de menor inercia, máximo de x_1 , vemos que al continuar en ' N ' por la nueva rama y pararnos en $N=0.732580$, el punto de la rama inicial ($N=0$) de la que hemos partido (etiqueta 16 de 'rama2-11') ha subido un poco pasando a una flecha algo mayor que la inicial. Esto se ve claro en los diagramas de bifurcación las ramas de continuación en ' N ' que se mostraron anteriormente.

Al hacer continuación en sentido decreciente de la longitud (por la izquierda) ocurre algo distinto a lo que ocurría en los puntos de la rama primaria

('rama-N'), y es que la rama obtenida no retrocede sino que va en el sentido creciente de la longitud y además aparece confundida con la rama de continuación por la derecha en este diagrama del máximo de x_1 . Las dos ramas, al estar confundidas, vemos que siguen la misma trayectoria, que es una subida al principio y después una bajada lentamente. Pero otra cosa importante que ocurre es que la rama obtenida al hacer el cambio de rama en el primer 'BP' de la rama obtenida como resultado de la continuación por la izquierda, que es la 'rama-N6i.2', es la que se dirige en el sentido decreciente de la longitud atravesando a la rama lineal en primer lugar y posteriormente pasando a coincidir con la rama lineal antes de llegar a la flecha cero. Por tanto cualitativamente esta rama hace lo mismo que hacían las ramas de la continuación por la izquierda en la rama principal de la continuación en 'N'.

En el segundo diagrama, correspondiente al máximo de x_2 , también hay algo que cambia y es que las ramas que evolucionan son las de continuación por la izquierda y por la derecha, que son la 'rama-N6i.1' y la 'rama-N6d.1' respectivamente, y sin embargo no evoluciona la que hemos obtenido al continuar en el primer 'BP' de 'rama-N6i.1' ('rama-N6i.2') como si evolucionaba en todos los 'N' de la rama principal de la continuación en 'N' en los que hicimos la continuación en longitud. Esta evolución de las ramas principales 'rama-N6i.1' y 'rama-N6d.1' en el diagrama de la flecha en la dirección de mayor inercia es lógica, puesto que la rama de partida para continuar en longitud, que es la 'rama-N.1', es una rama que presenta flecha en la dirección de mayor inercia.

En los diagramas de formas representamos sólo un punto etiquetado de cada rama obtenida. Los dos diagramas de las dos direcciones son los siguientes:

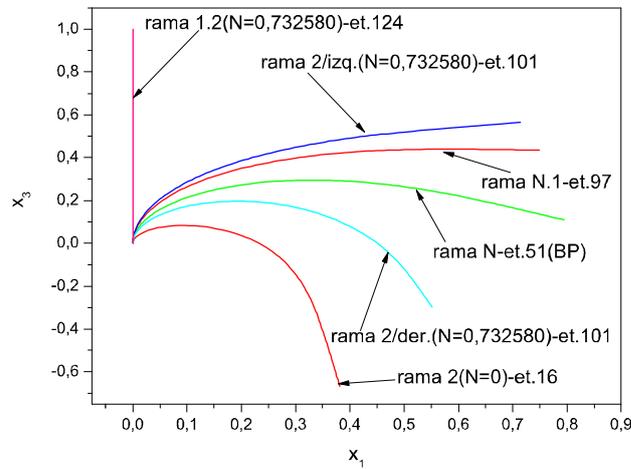


Figura 4.21: Deformación en dirección x_1 para $N=0.732580$

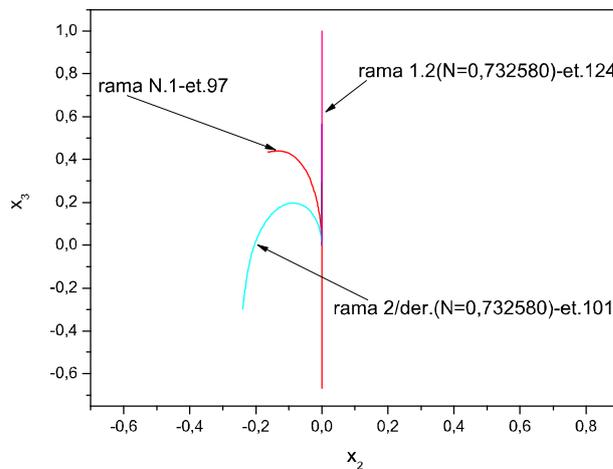


Figura 4.22: Deformación en dirección x_2 para $N=0.732580$

En el diagrama del pandeo según la menor inercia (x_3-x_1) vemos las posiciones deformadas en la dirección de menor inercia de los puntos etiquetados que hemos elegido. Estos puntos son el de la etiqueta 16 de 'rama2-11', el de la etiqueta 51 de 'rama-N' de donde nace la nueva rama en 'N', el de la etiqueta 97 de la nueva rama 'rama-N.1' del que se parte para continuar en

longitud, el de la etiqueta 101 de 'rama-N6i.1', el de la etiqueta 101 de 'rama-N6d.1', y el de la etiqueta 124 de 'rama-N6i.2'. En el diagrama según la mayor inercia (x_3-x_2) sólo vemos posiciones deformadas de los puntos etiquetados que hemos representado de 'rama-N.1' y de 'rama-N6d.1', porque los demás puntos etiquetados que hemos representado de las otras ramas, excepto el de 'rama-N6i.1', no tienen deformación en esta dirección y sus posiciones deformadas las vemos confundidas en la línea vertical de inicio. La posición de 'rama-N6i.1' aparece confundida con alguna de las demás posiciones y por eso no la vemos en este segundo diagrama.

Las deformaciones son en primer modo en todas las ramas sin aparecer ninguna deformación en segundo modo.

■ N=17.0673

Continuamos primero por la izquierda, con el fichero de constantes 'c.estat-N7i.1' que tiene los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=99. Partimos de la etiqueta 99 de 'rama-N.1'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e6. Ponemos un paso máximo de 1e6 para recorrer la rama de forma rápida.

Una vez que tenemos el fichero lo ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N.1',c='estat-N7i.1')
```

El resultado lo salvamos como 'rama-N7i.1':

```
AUTO>sv('rama-N7i.1')
```

Continuamos por la derecha con el fichero de constantes 'c.estat-N7d.1' que tiene los siguientes valores de los parámetros controlantes:

IRS=99. Partimos de la etiqueta 99 de 'rama-N.1'.

ISW=1. Continuamos una rama principal.

4.3. CONTINUACIÓN NUMÉRICA CON MATERIAL NO LINEAL 165

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e8. Ponemos un paso máximo de $1e8$ para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N.1',c='estat-N7d.1')
```

Guardamos el resultado como 'rama-N7d.1':

```
AUTO>sv('rama-N7d.1')
```

Hacemos el cambio de rama en el primer 'BP' que nos ha salido en la rama obtenida al continuar por la izquierda ('rama-N7i.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N7i.2' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=101. Partimos de la etiqueta 101 de 'rama-N7i.1'.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1000. El número de iteraciones va a ser 1000 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=-0.1. Paso inicial 0.1 negativo para que continúe en sentido decreciente del parámetro.

DSMAX=1e30. Ponemos un paso máximo de $1e30$ para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N7i.1',c='estat-N7i.2')
```

Salvamos el resultado como 'rama-N7i.2':

```
AUTO>sv('rama-N7i.2')
```

Hacemos el cambio de rama en el primer 'BP' que nos ha salido en la rama obtenida al continuar por la derecha ('rama-N7d.1'). Para ello creamos el fichero 'c.estat-N7d.3' con los siguientes parámetros controlantes:

IRS=102. Partimos de la etiqueta 102 de 'rama-N7d.1'.

ISW=-1. Hacemos un cambio de rama.

NMX=1300. El número de iteraciones va a ser 1300 a lo sumo.

NPR=100. Decimos al programa que aparte de los puntos especiales coloque una etiqueta en la rama cada 100 iteraciones.

DS=0.1. Paso inicial 0.1 positivo para que continúe en sentido creciente del parámetro.

DSMAX=1e30. Ponemos un paso máximo de $1e30$ para recorrer la rama de forma rápida.

Ejecutamos tecleando:

```
AUTO>r(s='rama-N7d.1',c='estat-N7d.3')
```

Salvamos el resultado como 'rama-N7d.3':

```
AUTO>sv('rama-N7d.3')
```

En los diagramas de bifurcación vamos a representar la rama inicial de la situación lineal ($N=0$) de la que hemos partido ('rama2-11') y todas las ramas que hemos obtenido en el punto $N=17.0673$ de la segunda rama de continuación en 'N'. Los diagramas de bifurcación de las dos direcciones son los siguientes:

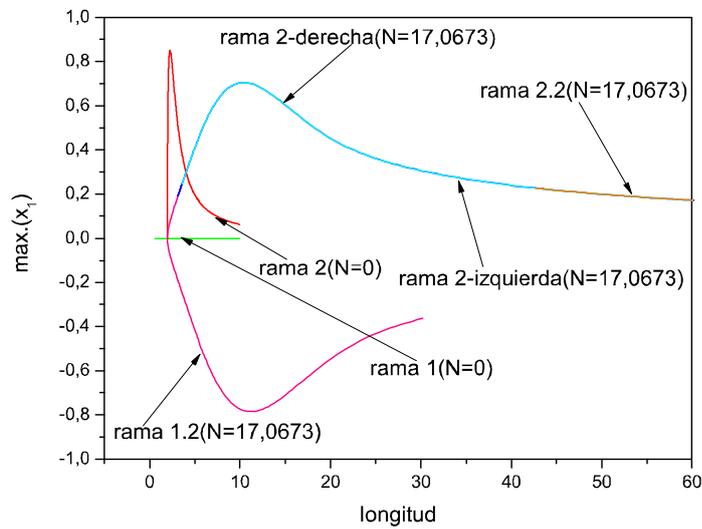


Figura 4.23: Máximo de x_1 en $N=17.0673$

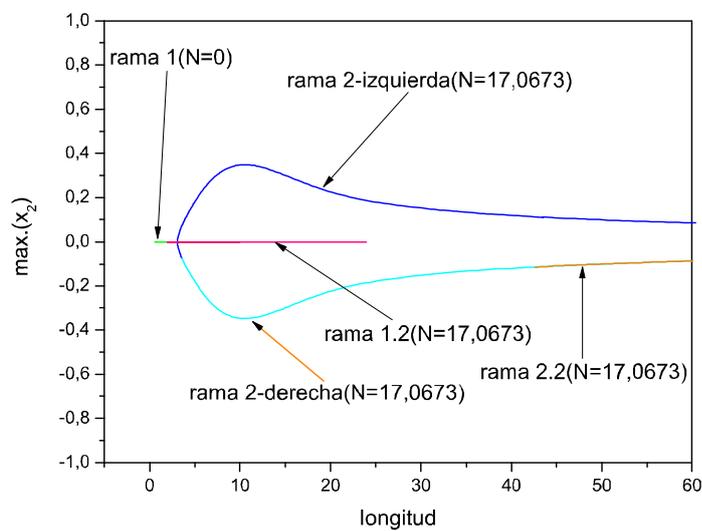


Figura 4.24: Máximo de x_2 en $N=17.0673$

La notación que hemos usado para señalar las ramas en los diagramas es la siguiente:

'rama1-11': rama 1 ($N=0$)

'rama2-11': rama 2 ($N=0$)

'rama-N7i.1': rama 2-izquierda ($N=17.0673$). Es la que se obtiene al continuar por la izquierda en $N=17.0673$ de 'rama-N.1'.

'rama-N7d.1': rama 2-derecha ($N=17.0673$). Es la que se obtiene al continuar por la derecha en $N=17.0673$ de 'rama-N.1'.

'rama-N7i.2': rama 1.2 ($N=17.0673$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N7i.1'.

'rama-N7d.3': rama 2.2 ($N=17.0673$). Es la que se obtiene al hacer el primer cambio de rama en 'rama-N7d.1'.

En el diagrama de la flecha en la dirección de menor inercia, máximo de x_1 , vemos que al continuar en 'N' por la nueva rama y pararnos en $N=17.0673$, el punto de la rama inicial ($N=0$) de la que hemos partido (etiqueta 16 de 'rama2-11') ha bajado un poco; por lo que la flecha ha disminuido respecto a la del punto inicial al llegar a este otro punto. Esta disminución de la flecha respecto a la inicial es debida a que el valor de 'N' es bastante alto al igual que ocurría en la $N=10.262$ de la rama principal 'rama-N'. Esto se veía claramente en los diagramas de bifurcación de las ramas de continuación en 'N'.

Al hacer continuación en sentido decreciente de la longitud (por la izquierda) ocurre lo mismo que ocurría para la 'N' anterior que es distinto a lo que ocurría en los puntos de la rama primaria ('rama-N'), y es que la rama obtenida no va hacia atrás sino que va en el sentido creciente de la longitud y además aparece confundida con la rama de continuación por la derecha en el diagrama del máximo de x_1 . Las dos ramas obtenidas de continuación por la izquierda y por la derecha hacen la misma trayectoria en este diagrama; primero suben hasta llegar a un máximo y después descienden lentamente. Aquí también vuelve a ocurrir lo mismo que ocurría para la 'N' anterior, y es que la rama obtenida al hacer el cambio de rama en el primer 'BP' de la rama obtenida como resultado de la continuación por la izquierda, que es la 'rama-N7i.2', es la que se dirige en el sentido decreciente de la longitud hasta coincidir con la rama lineal un poco antes de llegar a la flecha cero. Como el valor de 'N' es elevado, el descenso hasta flecha cero es menos acusado que en la 'N' anterior, existiendo mayor diferencia de rigidez para iguales valores de longitud entre los procesos de recuperación y deformación, y produciéndose la coincidencia con la rama lineal mucho más cerca de la flecha cero. Entonces tenemos que cualitativamente esta rama hace lo mismo que hacían las ramas de la continuación por la izquierda en la rama principal de la continuación en 'N'.

En el segundo diagrama, correspondiente al máximo de x_2 , también hay algo diferente respecto a la continuación en la rama principal 'rama-N' al igual que en la 'N' anterior, y es que las ramas que evolucionan son las de continuación por la izquierda y por la derecha, que son la 'rama-N7i.1' y la 'rama-N7d.1' respectivamente, y de las ramas que hemos obtenido como cambio de rama en los 'BP' sólo evoluciona la que hemos obtenido al continuar en el primer 'BP' de 'rama-N7d.1', que es la 'rama-N7d.3', siendo la del otro 'BP' (rama-N7i.2) una recta horizontal en flecha cero.

En los diagramas de formas representamos sólo un punto etiquetado de cada rama obtenida. Los dos diagramas de las dos direcciones son los siguientes:

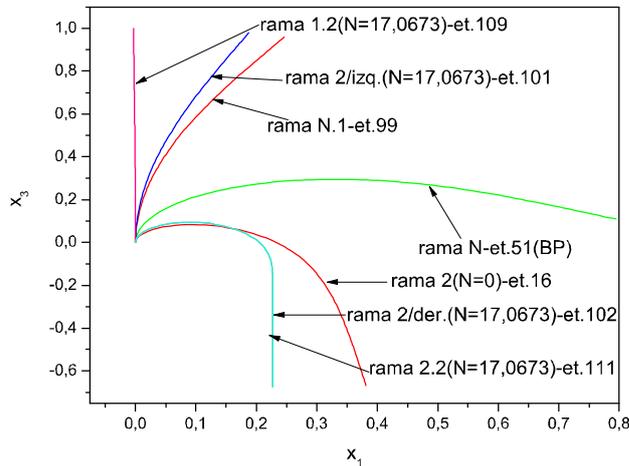


Figura 4.25: Deformación en dirección x_1 para $N=17.0673$

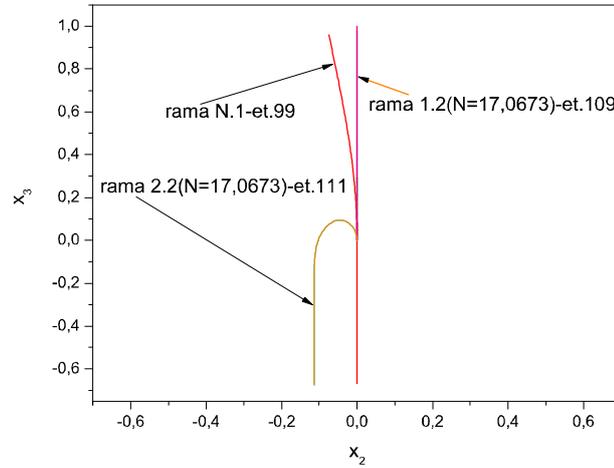


Figura 4.26: Deformación en dirección x_2 para $N=17.0673$

En el diagrama del pandeo según la menor inercia (x_3-x_1) vemos las posiciones deformadas en la dirección de menor inercia de los puntos etiquetados que hemos representado. Estos puntos son el de la etiqueta 16 de 'rama2-11', el de la etiqueta 51 de 'rama-N' de donde nace la nueva rama en 'N', el de la etiqueta 99 de la nueva rama 'rama-N.1' del que se parte para continuar en longitud, el de la etiqueta 101 de 'rama-N7i.1', el de la etiqueta 102 de 'rama-N7d.1', el de la etiqueta 109 de 'rama-N7i.2', y el de la etiqueta 111 de 'rama-N7d.3'. En el diagrama según la mayor inercia (x_3-x_2) sólo vemos posiciones deformadas de los puntos etiquetados que hemos representado de 'rama-N.1' y de 'rama-N7d.3', porque los demás puntos etiquetados que hemos representado de las otras ramas, excepto el de 'rama-N7i.1' y el de 'rama-N7d.1', no tienen deformación en esta dirección y sus posiciones deformadas las vemos confundidas en la línea vertical de inicio. Las posiciones de 'rama-N7i.1' y 'rama-N7d.1' no las vemos porque aparecen confundidas con alguna de las otras posiciones.

Las deformaciones son en primer modo en todas las ramas sin aparecer ninguna deformación en segundo modo.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de los capítulos tercero y cuarto hemos estudiado numéricamente la estabilidad del sistema estático que hemos planteado al simplificar el problema dinámico que teníamos inicialmente. En primer lugar hemos comprobado que la solución recta es solución del problema sustituyéndola en las ecuaciones y hemos hecho continuaciones numéricas tomando diferentes parámetros relativos a la geometría del sistema y a las propiedades del material, y hemos podido comprobar que los resultados obtenidos son coherentes con los resultados que nos da la fórmula exacta del pandeo de barras prismáticas solicitadas por fuerzas axiales uniformemente distribuidas, existiendo una pequeña diferencia entre los resultados obtenidos de ambas formas debido a que la continuación numérica se lleva a cabo mediante incrementos del parámetro de continuación. Para una mayor seguridad de la correcta implementación en AUTO, hemos comprobado también que el resultado que se obtiene al introducir una carga puntual y tomarla como parámetro principal de continuación es coherente con el resultado que obtenemos al despejar dicha carga de la fórmula de Euler, aunque la diferencia entre ambos resultados es mayor debido a que la fórmula de Euler es aproximada. En todos los casos hemos podido comprobar que la continuación numérica da un resultado más exacto que la fórmula de Euler, dado que esta fórmula es aproximada.

Posteriormente hemos hecho un estudio de continuación numérica tomando como parámetro la longitud del filamento en el que hemos ido cambiando la altura de la sección del filamento hasta llegar a la sección cuadrada. En este estudio hemos visto el cambio de estabilidad para cada una de las secciones con el aumento de la longitud y hemos comprobado que existen diferentes modos de pandeo cada uno de los cuales se produce para las dos direcciones principales inercia, primero en la dirección de menor inercia y después en

la de mayor inercia. Para cada sección hemos determinado la función 'bp' y hemos comprobado que el número de pasos por cero de esta función en un intervalo de longitud determinado se corresponde con el número de cambios de estabilidad en dicho intervalo de longitud. Hemos visto que conforme se disminuye la altura de la sección, la longitud de pandeo en la dirección de mayor inercia es cada vez más próxima a la longitud de pandeo en la dirección de menor inercia en cada uno de los modos hasta que coinciden cuando la sección es cuadrada, permaneciendo invariable la longitud de pandeo en la dirección de menor inercia en todos los modos. Por tanto al llegar a la sección cuadrada, las dos longitudes de pandeo de cada modo son coincidentes y el programa presenta dificultades para detectarlas porque no sabe con cual quedarse en primer lugar y se queda bloqueado sin hacer la continuación. Lo mismo ocurre cuando hacemos la continuación con una sección circular debido a que todas las direcciones de pandeo son igual de probables y el programa no sabe con cual quedarse primero, quedándose bloqueado. Otra cosa que hemos visto es que al hacer el cambio de rama en una rama que corresponde al pandeo en una de las direcciones principales para un determinado modo, aparece pandeo también en la otra dirección principal.

Por último hemos visto lo que ocurre cuando el material presenta comportamiento no lineal, tomando un punto de la primera rama de pandeo, haciendo continuación en el parámetro 'N', que es el que introduce el comportamiento no lineal, a partir de dicho punto, y volviendo a continuar en longitud en los dos sentidos para diferentes valores de la rama obtenida al continuar en 'N'. Para valores bajos de 'N' la flecha aumenta respecto a la de partida de la rama lineal, y conforme 'N' aumenta la flecha disminuye hasta llegar a ser inferior a la de partida. Cuando a partir de los diferentes valores de 'N' continuamos en sentido decreciente, la rama que sale no coincide en principio con la rama de pandeo del comportamiento lineal de la que hemos partido, pero al llegar al punto en que la flecha se hace cero si coinciden las dos ramas para todos los valores de 'N'; incluso casi siempre empiezan a coincidir las dos ramas un poco antes de llegar a la flecha cero. Por tanto la rigidez del filamento no es la misma durante el periodo de deformación que durante el periodo de recuperación a la posición recta. Para valores bajos de 'N' la rama decreciente desciende de forma casi vertical, y conforme aumentamos el valor de 'N' el descenso se hace menos vertical y la coincidencia con la rama original se produce más cerca de la flecha cero. Al hacer el cambio de rama en las nuevas ramas obtenidas a partir de los diferentes 'N' hemos visto que aparece pandeo en la otra dirección de inercia. Después hemos hecho el cambio de rama en un punto 'BP' que nos salió al hacer la continuación en 'N', hemos vuelto a repetir la continuación en longitud para dos 'N' diferentes, y nos ha salido en ambos casos que la rama

que vuelve hacia atrás terminando en flecha cero es la que hemos obtenido al hacer el cambio de rama en el primer punto 'BP' de la rama obtenida de hacer continuación en sentido decreciente, mientras que esta última sale en sentido creciente. Al representar gráficamente esta nueva rama obtenida de continuar en 'N' a partir del 'BP' vemos que sigue una evolución con el aumento de 'N' que es prácticamente coincidente con la evolución de la rama principal de continuación en 'N', presentando flecha alta para valores bajos de 'N' y flecha baja para valores altos de 'N', y además vemos que presenta deformación en la otra dirección principal. El comportamiento cualitativo de la rama decreciente con el aumento del valor de 'N' viene a ser idéntico que el de la rama principal, teniendo que para valores bajos de 'N' la rama decrece casi verticalmente coincidiendo con la rama lineal mucho antes de flecha cero y que para valores altos de 'N' la rama decrece de forma más progresiva coincidiendo con la rama lineal un poco antes de flecha cero. Otra observación de la continuación en estas dos 'N' es que las dos ramas principales obtenidas de la continuación en longitud en ambos sentidos presentan también pandeo en la otra dirección, lo cual es coherente dado que la rama de continuación en 'N' de la que parten ya presenta pandeo en ambas direcciones, y en la rama obtenida del cambio de rama de la rama principal obtenida por la derecha a partir del último 'N' también aparece pandeo en la otra dirección. Por tanto en todas estas ramas donde aparece pandeo en las dos direcciones tenemos soluciones tridimensionales. En todas las ramas obtenidas a partir de los valores de 'N' tomados de las dos ramas obtenidas de continuar en 'N' aparece sólo deformación en primer modo.

El comportamiento postcrítico es lo que sucede una vez que sobrepasamos el punto crítico (punto de bifurcación), que es un fenómeno no lineal. Como nuestro modelo es no lineal hemos podido determinar el punto crítico y también hemos podido representar lo que sucede después de dicho punto crítico; sin embargo una teoría lineal como es la teoría de Euler sólo es capaz de determinar el punto crítico y no es capaz de reproducir el comportamiento postcrítico.

Podemos concluir diciendo, que en el presente proyecto, se han cumplido los objetivos marcados en el capítulo de introducción, ya que hemos calculado, mediante continuación numérica, todos los cambios de estabilidad que se han producido en el sistema al variar un parámetro en cada uno de los casos que hemos ido tratando.

Apéndice A

Estudio del problema estático del filamento

Vamos a explicar cómo se empezó a tratar la resolución del problema estático del filamento en un principio. Lo que se hizo fue tomar las ecuaciones proyectadas sobre los ejes del triedro móvil y transformarlas a la forma estándar para poderlas introducir en auto. Lo que ocurre con esta forma de resolución alternativa es que las ecuaciones tienen unas expresiones mucho más complejas, y por eso se optó por el otro camino de proyectar las ecuaciones sobre los ejes del triedro del centro de una sección del filamento.

Cuando no hay dependencia temporal las ecuaciones (5) permiten despejar las curvaturas en función de los momentos o al revés :

$$k_1 = \frac{M_1}{P} ,$$
$$k_2 = \frac{M_2}{P \cdot R} ,$$
$$k_3 = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} \cdot M_3 .$$

De esta forma se eliminan 3 ecuaciones y 3 incógnitas con las 21 ecuaciones se reducen a 18 ecuaciones diferenciales con 18 incógnitas siendo el número de condiciones de contorno también 18.

Eliminando las derivadas temporales y los parámetros que dependen del tiempo las 18 ecuaciones quedan:

$$f'_1 = 0 ,$$

$$f'_2 = 0 ,$$

$$f'_3 = \delta ,$$

$$(M'_1 \cdot d_{11} + M'_2 \cdot d_{21} + M'_3 \cdot d_{31}) + (M_1 \cdot d'_{11} + M_2 \cdot d'_{21} + M_3 \cdot d'_{31}) + Q \cdot (d_{32} \cdot f_3 - d_{33} \cdot f_2) = 0 ,$$

$$(M'_1 \cdot d_{12} + M'_2 \cdot d_{22} + M'_3 \cdot d_{32}) + (M_1 \cdot d'_{12} + M_2 \cdot d'_{22} + M_3 \cdot d'_{32}) + Q \cdot (d_{33} \cdot f_1 - d_{31} \cdot f_3) = 0 ,$$

$$(M'_1 \cdot d_{13} + M'_2 \cdot d_{23} + M'_3 \cdot d_{33}) + (M_1 \cdot d'_{13} + M_2 \cdot d'_{23} + M_3 \cdot d'_{33}) + Q \cdot (d_{31} \cdot f_2 - d_{32} \cdot f_1) = 0 ,$$

$$x'_1 = d_{31} ,$$

$$x'_2 = d_{32} ,$$

$$x'_3 = d_{33} ,$$

$$\begin{aligned} \underline{d}'_1 = k_3 \cdot \underline{d}_2 - k_2 \cdot \underline{d}_3 &\implies \begin{Bmatrix} d'_{11} \\ d'_{12} \\ d'_{13} \end{Bmatrix} = k_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} - k_2 \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} \cdot M_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} = F \cdot M_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} , \end{aligned}$$

$$\underline{d}'_2 = k_1 \cdot \underline{d}_3 - k_3 \cdot \underline{d}_1 \implies \begin{Bmatrix} d'_{21} \\ d'_{22} \\ d'_{23} \end{Bmatrix} = k_1 \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} - k_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} = \frac{M_1}{P} \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} -$$

$$-\frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} \cdot M_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} = \frac{M_1}{P} \cdot \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{Bmatrix} - F \cdot M_3 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix},$$

$$\underline{d}'_3 = k_2 \cdot \underline{d}_1 - k_1 \cdot \underline{d}_2 \implies \begin{Bmatrix} d'_{31} \\ d'_{32} \\ d'_{33} \end{Bmatrix} = k_2 \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} - k_1 \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} = \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} -$$

$$-\frac{M_1}{P} \cdot \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix},$$

$$F = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)}.$$

Las ecuaciones de los momentos hay que transformarlas para que quede la derivada espacial de una variable en el miembro de la izquierda y no haya ninguna derivada espacial en el miembro de la derecha:

$$(M'_1 \cdot d_{11} + M'_2 \cdot d_{21} + M'_3 \cdot d_{31}) = -(M_1 \cdot d'_{11} + M_2 \cdot d'_{21} + M_3 \cdot d'_{31}) - Q \cdot (d_{32} \cdot f_3 - d_{33} \cdot f_2),$$

$$(M'_1 \cdot d_{12} + M'_2 \cdot d_{22} + M'_3 \cdot d_{32}) = -(M_1 \cdot d'_{12} + M_2 \cdot d'_{22} + M_3 \cdot d'_{32}) - Q \cdot (d_{33} \cdot f_1 - d_{31} \cdot f_3),$$

$$(M'_1 \cdot d_{13} + M'_2 \cdot d_{23} + M'_3 \cdot d_{33}) = -(M_1 \cdot d'_{13} + M_2 \cdot d'_{23} + M_3 \cdot d'_{33}) - Q \cdot (d_{31} \cdot f_2 - d_{32} \cdot f_1).$$

Sustituyendo las derivadas espaciales del miembro de la derecha de cada ecuación por su correspondiente expresión dada por las ecuaciones se tiene:

$$(M'_1 \cdot d_{11} + M'_2 \cdot d_{21} + M'_3 \cdot d_{31}) = -[M_1 \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} \right) + \\ + M_2 \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11} \right) + M_3 \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21} \right)] - Q \cdot (d_{32} \cdot f_3 - d_{33} \cdot f_2) ,$$

$$(M'_1 \cdot d_{12} + M'_2 \cdot d_{22} + M'_3 \cdot d_{32}) = -[M_1 \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} \right) + \\ + M_2 \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12} \right) + M_3 \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22} \right)] - Q \cdot (d_{33} \cdot f_1 - d_{31} \cdot f_3) ,$$

$$(M'_1 \cdot d_{13} + M'_2 \cdot d_{23} + M'_3 \cdot d_{33}) = -[M_1 \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} \right) + \\ + M_2 \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13} \right) + M_3 \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23} \right)] - Q \cdot (d_{31} \cdot f_2 - d_{32} \cdot f_1) .$$

Expresando estas tres ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} & \frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11} & \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21} \\ F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} & \frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12} & \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22} \\ F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} & \frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13} & \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} - \\ - Q \cdot \begin{bmatrix} 0 & -d_{33} & d_{32} \\ d_{33} & 0 & -d_{31} \\ -d_{32} & d_{31} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} .$$

Hay que despejar el vector de momentos derivados respecto a 's', para lo cual se multiplican ambos miembros de la ecuación por la inversa de la matriz que multiplica a dicho vector de momentos:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{Z} \cdot \begin{bmatrix} -d_{23} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{33} & d_{23} \cdot d_{31} - d_{21} \cdot d_{33} & -d_{22} \cdot d_{31} + d_{21} \cdot d_{32} \\ d_{13} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{33} & -d_{13} \cdot d_{31} + d_{11} \cdot d_{33} & d_{12} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{32} \\ -d_{13} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{23} & d_{13} \cdot d_{21} - d_{11} \cdot d_{23} & -d_{12} \cdot d_{21} + d_{11} \cdot d_{22} \end{bmatrix},$$

$$Z = -d_{13} \cdot d_{22} \cdot d_{31} + d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31} + d_{13} \cdot d_{21} \cdot d_{32} - d_{11} \cdot d_{23} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{21} \cdot d_{33} + d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33}.$$

Multiplicando esta matriz por la izquierda en ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{Z} \cdot \begin{bmatrix} -d_{23} \cdot d_{32} + & d_{23} \cdot d_{31} - & -d_{22} \cdot d_{31} + \\ +d_{22} \cdot d_{33} & -d_{21} \cdot d_{33} & +d_{21} \cdot d_{32} \\ d_{13} \cdot d_{32} - & -d_{13} \cdot d_{31} + & d_{12} \cdot d_{31} - \\ -d_{12} \cdot d_{33} & +d_{11} \cdot d_{33} & -d_{11} \cdot d_{32} \\ -d_{13} \cdot d_{22} + & d_{13} \cdot d_{21} - & -d_{12} \cdot d_{21} + \\ +d_{12} \cdot d_{23} & -d_{11} \cdot d_{23} & +d_{11} \cdot d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \cdot M_3 \cdot d_{21} - & \frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - & \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \\ -\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} & -F \cdot M_3 \cdot d_{11} & -\frac{M_1}{P} \cdot d_{21} \\ F \cdot M_3 \cdot d_{22} - & \frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - & \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \\ -\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} & -F \cdot M_3 \cdot d_{12} & -\frac{M_1}{P} \cdot d_{22} \\ F \cdot M_3 \cdot d_{23} - & \frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - & \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \\ -\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} & -F \cdot M_3 \cdot d_{13} & -\frac{M_1}{P} \cdot d_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{Q}{Z} \cdot \begin{bmatrix} -d_{23} \cdot d_{32} + & d_{23} \cdot d_{31} - & -d_{22} \cdot d_{31} + \\ +d_{22} \cdot d_{33} & -d_{21} \cdot d_{33} & +d_{21} \cdot d_{32} \\ d_{13} \cdot d_{32} - & -d_{13} \cdot d_{31} + & d_{12} \cdot d_{31} - \\ -d_{12} \cdot d_{33} & +d_{11} \cdot d_{33} & -d_{11} \cdot d_{32} \\ -d_{13} \cdot d_{22} + & d_{13} \cdot d_{21} - & -d_{12} \cdot d_{21} + \\ +d_{12} \cdot d_{23} & -d_{11} \cdot d_{23} & +d_{11} \cdot d_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -d_{33} & d_{32} \\ d_{33} & 0 & -d_{31} \\ -d_{32} & d_{31} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando las matrices se obtienen las tres ecuaciones de momentos.

Las 18 ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$f'_1 = 0 ,$$

$$f'_2 = 0 ,$$

$$f'_3 = \delta ,$$

$$\begin{aligned}
M'_1 = & -\frac{M_1}{Z} \cdot [-(d_{23} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{33}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31}\right) + \\
& + (d_{23} \cdot d_{31} - d_{21} \cdot d_{33}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32}\right) + \\
& + (-d_{22} \cdot d_{31} + d_{21} \cdot d_{32}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33}\right)] - \\
& - \frac{M_2}{Z} \cdot [(-d_{23} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11}\right) + \\
& + (d_{23} \cdot d_{31} - d_{21} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12}\right) + \\
& + (-d_{22} \cdot d_{31} + d_{21} \cdot d_{32}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13}\right)] - \\
& - \frac{M_3}{Z} \cdot [(-d_{23} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21}\right) + \\
& + (d_{23} \cdot d_{31} - d_{21} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22}\right) + \\
& + (-d_{22} \cdot d_{31} + d_{21} \cdot d_{32}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23}\right)] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_1 \cdot [(d_{23} \cdot d_{31} - d_{21} \cdot d_{33}) \cdot d_{33} - (-d_{22} \cdot d_{31} + d_{21} \cdot d_{32}) \cdot d_{32}] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_2 \cdot [(-d_{23} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{33}) \cdot d_{33} + (-d_{22} \cdot d_{31} + d_{21} \cdot d_{32}) \cdot d_{31}] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_3 \cdot [(-d_{23} \cdot d_{32} + d_{22} \cdot d_{33}) \cdot d_{32} - (d_{23} \cdot d_{31} - d_{21} \cdot d_{33}) \cdot d_{31}] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M'_2 = & -\frac{M_1}{Z} \cdot [(d_{13} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{33}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} \right) + \\
& + (-d_{13} \cdot d_{31} + d_{11} \cdot d_{33}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} \right) + \\
& + (d_{12} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{32}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} \right)] - \\
& - \frac{M_2}{Z} \cdot [(d_{13} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11} \right) + \\
& + (-d_{13} \cdot d_{31} + d_{11} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12} \right) + \\
& + (d_{12} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{32}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13} \right)] - \\
& - \frac{M_3}{Z} \cdot [(d_{13} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21} \right) + \\
& + (-d_{13} \cdot d_{31} + d_{11} \cdot d_{33}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22} \right) + \\
& + (d_{12} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{32}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23} \right)] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_1 \cdot [(-d_{13} \cdot d_{31} + d_{11} \cdot d_{33}) \cdot d_{33} - (d_{12} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{32}) \cdot d_{32}] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_2 \cdot [-(d_{13} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{33}) \cdot d_{33} + (d_{12} \cdot d_{31} - d_{11} \cdot d_{32}) \cdot d_{31}] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_3 \cdot [(d_{13} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{33}) \cdot d_{32} - (-d_{13} \cdot d_{31} + d_{11} \cdot d_{33}) \cdot d_{31}] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M'_3 = & -\frac{M_1}{Z} \cdot [(-d_{13} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{23}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} \right) + \\
& + (d_{13} \cdot d_{21} - d_{11} \cdot d_{23}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} \right) + \\
& + (-d_{12} \cdot d_{21} + d_{11} \cdot d_{22}) \cdot \left(F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} \right)] - \\
& - \frac{M_2}{Z} \cdot [(-d_{13} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{23}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11} \right) + \\
& + (d_{13} \cdot d_{21} - d_{11} \cdot d_{23}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12} \right) + \\
& + (-d_{12} \cdot d_{21} + d_{11} \cdot d_{22}) \cdot \left(\frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13} \right)] - \\
& - \frac{M_3}{Z} \cdot [(-d_{13} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{23}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21} \right) + \\
& + (d_{13} \cdot d_{21} - d_{11} \cdot d_{23}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22} \right) + \\
& + (-d_{12} \cdot d_{21} + d_{11} \cdot d_{22}) \cdot \left(\frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23} \right)] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_1 \cdot [(d_{13} \cdot d_{21} - d_{11} \cdot d_{23}) \cdot d_{33} - (-d_{12} \cdot d_{21} + d_{11} \cdot d_{22}) \cdot d_{32}] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_2 \cdot [-(-d_{13} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{23}) \cdot d_{33} + (-d_{12} \cdot d_{21} + d_{11} \cdot d_{22}) \cdot d_{31}] - \\
& - \frac{Q}{Z} \cdot f_3 \cdot [(-d_{13} \cdot d_{22} + d_{12} \cdot d_{23}) \cdot d_{32} - (d_{13} \cdot d_{21} - d_{11} \cdot d_{23}) \cdot d_{31}] ,
\end{aligned}$$

$$x'_1 = d_{31} ,$$

$$x'_2 = d_{32} ,$$

$$x'_3 = d_{33} ,$$

$$d'_{11} = F \cdot M_3 \cdot d_{21} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{31} ,$$

$$d'_{12} = F \cdot M_3 \cdot d_{22} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{32} ,$$

$$\begin{aligned}
d'_{13} &= F \cdot M_3 \cdot d_{23} - \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{33} , \\
d'_{21} &= \frac{M_1}{P} \cdot d_{31} - F \cdot M_3 \cdot d_{11} , \\
d'_{22} &= \frac{M_1}{P} \cdot d_{32} - F \cdot M_3 \cdot d_{12} , \\
d'_{23} &= \frac{M_1}{P} \cdot d_{33} - F \cdot M_3 \cdot d_{13} , \\
d'_{31} &= \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{11} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{21} , \\
d'_{32} &= \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{12} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{22} , \\
d'_{33} &= \frac{M_2}{P \cdot R} \cdot d_{13} - \frac{M_1}{P} \cdot d_{23} ,
\end{aligned}$$

donde los parámetros son los siguientes:

- g : gravedad
- ω_0 : frecuencia
- l : longitud del filamento
- D : diámetro de la sección del filamento
- E : módulo de Young
- ρ : densidad
- ν : módulo de Poisson

A partir de estos parámetros se construyen las siguientes variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
A_s &= \pi \cdot \frac{D^2}{4} , \quad I_1 = \frac{1}{64} \cdot D^4 , \quad I_2 = \frac{1}{64} \cdot D^4 , \quad \delta = \frac{g}{\omega_0^2 \cdot l} , \quad Q = \frac{A_s \cdot l^2}{I_1} , \quad R = \frac{I_2}{I_1} , \\
P &= \frac{E}{\rho \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} , \quad F = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} .
\end{aligned}$$

$$Z = -d_{13} \cdot d_{22} \cdot d_{31} + d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{31} + d_{13} \cdot d_{21} \cdot d_{32} - d_{11} \cdot d_{23} \cdot d_{32} - d_{12} \cdot d_{21} \cdot d_{33} + d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} .$$

Las condiciones iniciales para resolver en AUTO son las siguientes:

Parámetros

Van a permanecer constantes en todas las iteraciones menos uno de ellos que va a ir variando. Los valores iniciales son:

$$g = 9.8m/s^2$$

$$\omega_0 = 1rad/s$$

$$l = 55 \cdot 10^{-2}m$$

$$D = 3 \cdot 10^{-3}m$$

$$E = 2.1 \cdot 10^{11}N/m^2$$

$$\rho = 7850Kg/m^3$$

$$\nu = 0,3$$

Incógnitas

Los valores iniciales para las 18 incógnitas son:

$$f_1 = 0 ,$$

$$f_2 = 0 ,$$

$$f_3 = \frac{\rho \cdot A_s \cdot g \cdot (s - l)}{\rho \cdot A_s \cdot \omega_0^2 \cdot l^2} ,$$

$$M_1 = 0 ,$$

$$M_2 = 0 ,$$

$$M_3 = 0 ,$$

$$x_1 = 0 ,$$

$$x_2 = 0 ,$$

$$x_3 = \frac{s}{l} ,$$

$$d_{11} = 1 ,$$

$$d_{12} = 0 ,$$

$$d_{13} = 0 ,$$

$$d_{21} = 0 ,$$

$$d_{22} = 1 ,$$

$$d_{23} = 0 ,$$

$$d_{31} = 0 ,$$

$$d_{32} = 0 ,$$

$$d_{33} = 1 .$$

Las condiciones de contorno son las 18 que se explicaban en el desarrollo de las ecuaciones:

En $s=0$

Son 12 condiciones:

$$x_1 = 0 \quad , \quad d_{11} = 1 \quad , \quad d_{21} = 0 \quad , \quad d_{31} = 0 ,$$

$$x_2 = 0 \quad , \quad d_{12} = 0 \quad , \quad d_{22} = 1 \quad , \quad d_{32} = 0 ,$$

$$x_3 = 0 \quad , \quad d_{13} = 0 \quad , \quad d_{23} = 0 \quad , \quad d_{33} = 1 .$$

En $s=1$

Son 6 condiciones:

$$f_1 = 0 \quad , \quad M_1 = 0 \quad ,$$

$$f_2 = 0 \quad , \quad M_2 = 0 \quad ,$$

$$f_3 = 0 \quad , \quad M_3 = 0 \quad .$$

Entonces para resolver el problema se introducen en auto las ecuaciones, las condiciones iniciales y las condiciones de contorno. Pero ocurre que hay dos ecuaciones que son triviales y son las dos primeras:

$$f'_1 = 0 \quad ,$$

$$f'_2 = 0 \quad .$$

Estas ecuaciones lo que dicen es que ambas fuerzas f_1 y f_2 no varían con respecto a 's' y que además como sus valores iniciales son 0 van a seguir siendo 0, por lo que se deben eliminar para que el auto no de problemas al resolver. Por consiguiente se tienen que eliminar también f_1 y f_2 como incógnitas con lo cual desaparecen las 2 condiciones iniciales correspondientes a dichas incógnitas y también las 2 condiciones de contorno en que aparecen involucradas.

De esta forma el problema queda como un problema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas que se resuelve con las condiciones iniciales y con las 16 condiciones de contorno.

Apéndice B

Curvaturas en función de los momentos para el material no lineal

Vamos a hacer un inciso de por qué ha sido necesario emplear el método de Newton para despejar las curvaturas en función de los momentos para el caso en que el material es no lineal.

Cuando tenemos material no lineal tenemos que los momentos cambian de la siguiente forma:

$$M_1 = P \cdot k_1 \implies M_1 = P \cdot (k_1 + N \cdot k_1^3) ,$$

$$M_2 = P \cdot R \cdot k_2 \implies M_2 = P \cdot R \cdot (k_2 + N \cdot k_2^3) ,$$

$$M_3 = \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot k_3 \implies M_3 = \frac{P \cdot (R + 1)}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot (k_3 + N \cdot k_3^3) .$$

Si pasamos todos los términos a la izquierda tenemos las tres expresiones igualadas a cero:

$$N \cdot k_1^3 + k_1 - \frac{M_1}{P} = 0 ,$$

188 APÉNDICE B. CURVATURAS EN FUNCIÓN DE LOS MOMENTOS

$$N \cdot k_2^3 + k_2 - \frac{M_2}{P \cdot R} = 0 ,$$

$$N \cdot k_3^3 + k_3 - M_3 \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1)} = 0 .$$

Cada una de estas tres ecuaciones corresponde a una ecuación de tercer grado del tipo siguiente:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x + c = 0 .$$

En cada ecuación la incógnita 'x' que queremos despejar es la curvatura y el momento juega el papel de una constante.

La solución a esta ecuación es la denominada 'fórmula de Cardano'. Para poder expresar la solución 'x' mediante dicha fórmula hay que transformar un poco la ecuación y escribirla de la siguiente forma:

$$x^3 + p \cdot x = q .$$

Una vez que tenemos la ecuación escrita de esta forma ya podemos escribir el valor de la incógnita 'x' mediante la expresión de 'Cardano', que al ser la ecuación de tercer grado habrá tres soluciones que son las siguientes:

(1)

$$x = \left(\frac{1}{2} \cdot q + \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} \cdot q - \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} ,$$

(2)

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot q + \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} \cdot q - \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} \right] + \\ + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot q + \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} - \left(\frac{1}{2} \cdot q - \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} \right] ,$$

(3)

$$x = -\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot q + \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} \cdot q - \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot q + \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} - \left(\frac{1}{2} \cdot q - \left[\left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)^{1/3} \right] .$$

Para saber el número de raíces reales e imaginarias hay un número que lo determina que es el siguiente:

$$D = \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 .$$

Según el signo de este número tenemos las siguientes posibilidades:

- $D > 0 \implies$ Una raíz es real y dos raíces son complejas conjugadas.
- $D = 0 \implies$ Las tres raíces son reales y dos son iguales.
- $D < 0 \implies$ Las tres raíces son reales y distintas.

Para cada una de las tres ecuaciones obtenemos los valores de 'p' y 'q':

$$k_1^3 + k_1 \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{M_1}{P \cdot N} ,$$

$$p_1 = \frac{1}{N} \quad , \quad q_1 = \frac{M_1}{P \cdot N} ,$$

$$k_2^3 + k_2 \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{M_2}{P \cdot R \cdot N} ,$$

$$p_2 = \frac{1}{N} \quad , \quad q_2 = \frac{M_2}{P \cdot R \cdot N} ,$$

$$k_3^3 + k_3 \cdot \left(\frac{1}{N} \right) = M_3 \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1) \cdot N} ,$$

$$p_3 = \frac{1}{N} \quad , \quad q_3 = M_3 \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{P \cdot (R + 1) \cdot N} .$$

Vemos que el valor de 'p' es el mismo en las tres ecuaciones y que siempre es positivo, y que el valor de 'q' es diferente en cada una y su valor positivo o negativo es función del signo positivo o negativo del momento. Por tanto tenemos que 'D' es siempre mayor que cero y para este caso la teoría predice que en cada una de las tres ecuaciones una de las raíces es real y las otras dos son complejas conjugadas.

Entonces lo que habría que hacer sería tomar para cada ecuación la expresión que corresponda a la raíz real para definir las curvaturas en función de los momentos ya que el programa auto sólo reconoce números reales. Pero el problema está en que la expresión real no es siempre la misma para cada ecuación sino que puede ser uno u otra de entre las tres posibles dependiendo de la variación que vaya teniendo el momento correspondiente.

Por tanto, al no poder escoger para cada ecuación una de las tres expresiones para que defina la curvatura en función del momento en todo el rango de la continuación es por lo que hay que recurrir a obtener las raíces mediante el método de Newton.

Bibliografía

- [1] J. Galán, W.B.Fraser, D.J.Acheson, A.R.Champneys. "*The parametrically excited upside-down rod: an elastic jointed pendulum model*". Journal of Sound and Vibration 280 (2005) 359-377.
- [2] J. Valverde. "*Análisis dinámico de estructuras tether giroestabilizadas*". Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2006.
- [3] Tom Mullin, Alan Champneys, W. Barrie Fraser, Jorge Galán, David Acheson. "*The 'Indian rod trick' via parametric excitation*".
- [4] Peter Wolfe. "*Bifurcation theory of an elastic conducting rod in a magnetic field*". Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA.
- [5] T.J. Healey, P.G. Mehta. "*Straightforward computation of spatial equilibria of geometrically exact Cosserat rods*". *Theoretical & Applied Mechanics and Center for Applied Mathematics*, Cornell University, Ithaca, NY 14850.
- [6] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Greenhill.html>. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 4: 65-73.
- [7] S. Timoshenko. "*Resistencia de Materiales*". Segunda parte.
- [8] Apuntes de cátedra de Estructuras Metálicas. Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras.