

Capítulo 3

Formulación semi-analítica para ondas guiadas en barras

3.1. Introducción

La propagación libre de las ondas guiadas en barras, está gobernada por ecuaciones características con un aspecto aparentemente simple pero de gran complejidad, que sólo pueden ser resueltas analíticamente o numéricamente. Para algunas geometrías simples, como es el caso de placas o tubos, la ecuaciones características analíticas de las ondas guiadas pueden obtenerse como el determinante de una matriz que se construye con el Método de la Matriz de Transferencia (Thomson-Haskell) o el Método de la Matriz Global (Knopoff), siendo necesario recurrir a algoritmos numéricos muy complejos para localizar las raíces de dicho determinante, sobre todo en el caso de raíces complejas. En un artículo de Lowe [8] se recoge una amplia bibliografía sobre estos métodos hasta 1995, y se discuten las dificultades numéricas que plantean.

Para barras con geometrías más complejas en su sección transversal, no hay un método general para obtener la ecuación característica analítica, de manera que es necesario recurrir a métodos numéricos. En esta sección se va a presentar uno de estos métodos, el de los Elementos Finitos, que permite analizar el comportamiento de las ondas guiadas en barras rectas, con una sección transversal genérica pero constante en toda su longitud. Se consideran barras infinitas en el eje de propagación z , mientras los ejes x e y definen la sección transversal plana de la barra, mediante una formulación analítica de Elementos Finitos. Su formulación comienza planteando una separación de variables sobre la solución elastodinámica en la barra y suponiendo una variación armónica en todas las variables salvo en la sección transversal. A continuación la sección transversal se subdivide en elementos, en cada uno de los cuales se aproximan los desplazamientos exactos con funciones de interpolación bidimensionales. Esta

aproximación es válida bajo la hipótesis de que el elemento sea mucho más pequeño que la menor longitud de onda presente en el material. Utilizando esta solución en la expresión del Principio de Hamilton se obtendrá la matriz de rigidez dinámica de la barra infinita. Se describirá cómo, en el caso de vibración libre, este procedimiento proporciona un sistema de autovalores cuadrático que relaciona la frecuencia y el número de onda de las ondas guiadas, y que representa por tanto una ecuación característica aproximada. La solución de dicho sistema constituye una aproximación del espectro de frecuencia y de las curvas de dispersión, así como de la estructura de los desplazamientos de cada modo en la sección transversal.

3.2. Formas fuerte y débil de la Elastodinámica

La forma fuerte (ecuación diferencial) de un problema elastodinámico 3D armónico tiene la siguiente expresión en notación matricial (las matrices y vectores aparecen reflejados en el texto en negrita):

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

donde el superíndice “T” indica vector o matriz traspuesta, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de tensiones, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ es el vector de deformaciones, \mathbf{L} es un operador matricial y \mathbf{D} es la matriz que relaciona tensiones y deformaciones (ley de comportamiento).

Para las condiciones de deformación tridimensional: $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T$ y

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{L}_{xy} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde las matrices \mathbf{L}_x , \mathbf{L}_y y \mathbf{L}_z pueden obtenerse por simple inspección.

La forma débil del problema anterior se obtiene mediante la aplicación del Principio de Hamilton, cuya expresión en ausencia de fuerzas externas es la siguiente:

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \right) = 0 \quad (3.4)$$

donde T es la energía cinética, U es la energía de deformación elástica y t_1 y t_2 son dos instantes de tiempo arbitrarios.

3.3. Forma débil para ondas guiadas planas en barras

En este apartado se pretende particularizar la forma débil general al caso de una barra infinita en la cual se propagan ondas elásticas guiadas planas. Para ello hacemos uso del principio de Hamilton en ausencia de fuerzas externas:

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \right) = 0 \quad (3.5)$$

donde T es la energía cinética, U es la energía de deformación elástica y t_1 y t_2 son dos instantes de tiempo arbitrarios. La energía cinética viene dada por

$$T = \int \int \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} \right) dV = 0 \quad (3.6)$$

donde ρ es la densidad del material, \mathbf{u} es el vector desplazamiento y V es el volumen del cuerpo. La energía de deformación elástica del cuerpo es

$$U = \int \int \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV = 0 \quad (3.7)$$

Sabemos que los vectores de deformación y de desplazamientos están relacionados por la ecuación $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$. Sustituyendo esta relación en la ecuación (3.7) obtenemos

$$U = \int \int \int_V \left(\frac{1}{2} (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{L}\mathbf{u} \right) dV = 0 \quad (3.8)$$

Combinando las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.8) el principio de Hamilton puede ser expresado como

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \int \int \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{L}\mathbf{u} \right) dV dt \right) = 0 \quad (3.9)$$

Aplicando el operador variacional e integrando por partes el término de la energía cinética se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \int \int_V (-\rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} - \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) dV dt = 0 \quad (3.10)$$

Si consideramos ondas guiadas en una barra infinita, podemos expresar los desplazamientos como:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \Phi(x, y) \mathbf{H}(z, t) \quad (3.11)$$

donde $\Phi(x, y)$ representa la estructura modal en la sección transversal y $\mathbf{H}(z, t)$ es la variación temporal y espacial en la dirección axial de la barra. A partir de esta expresión podemos obtener que:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \Phi \ddot{\mathbf{H}} \quad (3.12)$$

$$\delta \mathbf{u} = \Phi \delta \mathbf{H} \quad (3.13)$$

Además teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u} &= \mathbf{L}\Phi\mathbf{H} = (\mathbf{L}_{xy} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z}) \Phi\mathbf{H} = \\ &(\mathbf{L}_{xy}\Phi\mathbf{H} + \mathbf{L}_z\Phi\mathbf{H}') = (\mathbf{B}_{xy}(x, y)\mathbf{H} + \mathbf{B}_z(x, y)\mathbf{H}') \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{H}$. A continuación se van a definir los términos $\mathbf{H}'(z, t)$, $\mathbf{B}_{xy}(x, y)$ $\mathbf{B}_z(x, y)$ empleados en la ecuación anterior:

$$\mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{H}(z, t)}{\partial z} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B}_{xy}(x, y) = \mathbf{L}_{xy}\Phi(x, y) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B}_z(x, y) = \mathbf{L}_z\Phi(x, y) \quad (3.17)$$

Si sustituimos estos términos en la ecuación (3.10):

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \int \int_V [-\rho \delta \mathbf{H}^T \Phi^T \Phi \ddot{\mathbf{H}} - (\delta \mathbf{H}^T \mathbf{B}_{xy}^T + \delta \mathbf{H}'^T \mathbf{B}_z^T) \mathbf{D}(\mathbf{B}_{xy}\mathbf{H} + \mathbf{B}_z\mathbf{H}')] dV dt = 0 \quad (3.18)$$

Desarrollando términos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int \int \int_V [-\rho \delta \mathbf{H}^T \Phi^T \Phi \ddot{\mathbf{H}} - \delta \mathbf{H}^T \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} \mathbf{H} - \delta \mathbf{H}^T \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z \mathbf{H}' - \\ \delta \mathbf{H}'^T \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} \mathbf{H} - \delta \mathbf{H}'^T \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z \mathbf{H}'] dV dt = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Realizando una integración por partes de los dos últimos términos con respecto a z :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int \int_A \int_{z_1}^{z_2} z \delta \mathbf{H}^T [-\rho \Phi^T \Phi \ddot{\mathbf{H}} - \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} \mathbf{H} - \\ & \quad \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z \mathbf{H}' + \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} \mathbf{H}' + \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z \mathbf{H}''] dA dz dt \\ & - \left[\int_{t_1}^{t_2} \int \int_A \delta \mathbf{H}^T [\mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} \mathbf{H} + \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z \mathbf{H}' z] dA dt \right]_{z_1}^{z_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Con esta última integral se podrían aplicar condiciones de contorno en z , pero se van a dejar fuera porque consideramos una barra ∞ en dirección z . Además como la ecuación (3.20) debe cumplirse para $\delta \mathbf{H}(z, t)$ arbitrarios y como $\mathbf{H}(z, t)$ es independiente de las coordenadas x e y que definen la sección transversal, por tanto se puede afirmar que

$$\begin{aligned} & \left[\int_A \rho \Phi^T \Phi dA \right] \ddot{\mathbf{H}} + \left[\int_A \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} dA \right] \mathbf{H} + \\ & \left[\int_A (\mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z - \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy}) dA \right] \mathbf{H}' - \left[\int_A \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z dA \right] \mathbf{H}'' = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Considerando ahora ondas armónicas:

$$\mathbf{H}(z, t) = \mathbf{d} e^{i(kz + \omega t)} \quad (3.22)$$

así que las derivadas con respecto a z y respecto a t

$$\mathbf{H}' = \frac{d\mathbf{H}}{dz} = ik\mathbf{H} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{H}'' = \frac{d^2\mathbf{H}}{dz^2} = -k^2\mathbf{H} \quad (3.24)$$

$$\ddot{\mathbf{H}} = \frac{d^2\mathbf{H}}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{H} \quad (3.25)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.21)

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 \left[\int_A \rho \Phi^T \Phi dA \right] + \left[\int_A \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} dA \right] + \right. \\ & \quad ik \left[\int_A (\mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z - \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy}) dA \right] + \\ & \quad \left. k^2 \left[\int_A \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z dA \right] \right) \mathbf{d} e^{i(kz + \omega t)} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como la ecuación (3.26) se cumple para todo z y para todo t , puede reescribirse como:

$$[\mathbf{K}_0 + ik\mathbf{K}_1 + k^2\mathbf{K}_2 - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{d} = 0 \quad (3.27)$$

donde

$$\mathbf{M} = \int_A \rho \Phi^T \Phi dA \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K}_0 = \int_A \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy} dA \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_A (\mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z - \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{xy}) dA \quad (3.30)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_A \mathbf{B}_z^T \mathbf{D} \mathbf{B}_z dA \quad (3.31)$$

Las matrices \mathbf{M} , \mathbf{K}_0 y \mathbf{K}_2 son simétricas, mientras que \mathbf{K}_1 es antisimétrica.

3.4. Ecuaciones del MEF para ondas guiadas en barras

La resolución numérica requiere de la discretización de la sección transversal de la barra en elementos, como se muestra en la figura 3.1, para reducir el infinito número de grados de libertad (gdl) de la solución continua (desplazamientos $\mathbf{u}(x, y, z)$ en todos los puntos de la sección) a un número finito en la solución discreta (desplazamientos \mathbf{d}_i en los nodos de cada elemento).

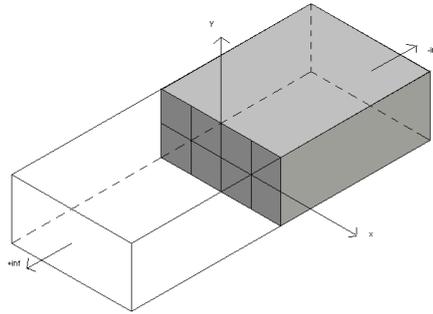


Figura 3.1. Discretización de la sección transversal de una barra infinita en elementos

En este apartado se van a plantear las ecuaciones del MEF para el problema de ondas guiadas en barras mediante el procedimiento habitual. En primer lugar se discretiza el dominio (en este caso la sección transversal de la barra) en elementos. Los desplazamientos reales y virtuales en el dominio se interpolan a partir de los valores nodales empleando funciones de forma, para obtener así unos campos elastodinámicos discretizados. Por último se obliga a que dichos campos satisfagan la forma débil, ec. (3.27), lo cual proporciona un sistema de ecuaciones cuya solución se aproxima a la solución elastodinámica exacta.

El número de grados de libertad en cada nodo será $g = 3$. El número total de gdl de la malla G será $G = N \cdot g$, donde N será el número de nodos. Se supone que las propiedades del material de cada elemento son homogéneas.

Dentro de un elemento, los desplazamientos \mathbf{u} en cualquier punto del mismo se pueden obtener a partir de los desplazamientos en los nodos mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{\Phi}(x, y) \mathbf{d}^e = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d}^e \quad (3.32)$$

donde $\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{\Phi}(x, y)$ a nivel elemental, es una matriz que contiene las funciones de forma utilizadas en la interpolación y \mathbf{d}^e es un vector con los desplazamientos nodales del elemento. Podemos expresar el campo de desplazamientos en función de las funciones de forma:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{d}^e e^{i(kx + \omega t)} \quad (3.33)$$

Para un elemento isoparamétrico de 4 nodos, como el que se muestra en la figura 3.2 la matriz de funciones de forma tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I} \quad N_2 \mathbf{I} \quad N_3 \mathbf{I} \quad N_4 \mathbf{I}] \quad (3.34)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden g , $N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$, $N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$, $N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$ y $N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$ son las funciones de forma bilineales, y $\xi \in [-1, 1]$ y $\eta \in [-1, 1]$ son las coordenadas naturales del elemento. Los desplazamientos nodales del elemento se organizan en un vector

$$\mathbf{d}^e = [\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T \quad \mathbf{d}_3^T \quad \mathbf{d}_4^T]^T \quad (3.35)$$

3.4.1. Matrices globales

Las matrices de rigidez y masa globales para la barra infinita discretizada con n elementos y N nodos en la sección transversal, pueden obtenerse a partir

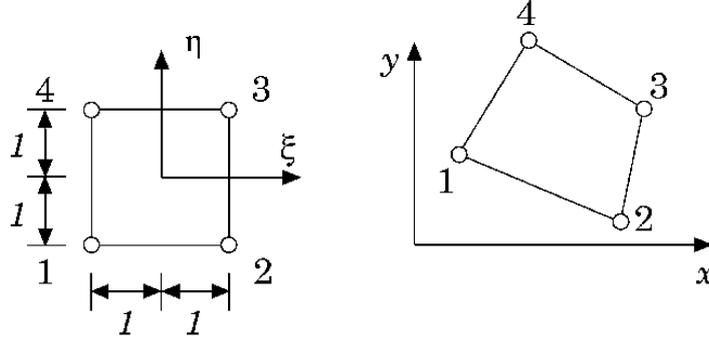


Figura 3.2. Coordenadas de un elemento isoparamétrico de cuatro nodos

de las correspondientes matrices elementales mediante el proceso de montaje habitual de EF (el cual consiste en aplicar compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas en las interfases entre elementos). Como resultado, el sistema de ecuaciones globales puede escribirse como

$$(k^2 \mathbf{K}_2 + ik \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.36)$$

donde las matrices globales \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_0 y \mathbf{M} son simétricas y \mathbf{B} es antisimétrica, y donde los vectores \mathbf{d} y \mathbf{f} contienen respectivamente los desplazamientos y fuerzas de todos los nodos de la barra (G gdl)

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{d}_N^T]^T, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_N^T]^T \quad (3.37)$$

La imposición de las condiciones de contorno de la barra sobre la ec. (3.36) proporciona un sistema de ecuaciones que gobierna la respuesta dinámica de la barra discretizada frente a solicitaciones armónicas. La solución se compone de dos partes:

- la solución general del problema homogéneo, correspondiente a $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, que representa la respuesta de la barra en ausencia de acciones exteriores (su *vibración libre*, empleando la terminología de dinámica de estructuras). Esta situación corresponde precisamente con la estudiada de forma analítica en el Capítulo 2.
- la solución particular de la ecuación completa para una acción \mathbf{f} no nula. La inclusión de este término permite obtener la *vibración forzada* de la barra bajo la acción de solicitaciones externas.

En los apartados siguientes se va a estudiar el problema de MEF homogéneo ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), cuya solución proporciona una aproximación del espectro de frecuencia y de los modos de propagación de las ondas guiadas en barras.

Si se fija el número de onda, la ec. (3.36) se convierte en un sistema de autovalores lineal en ω^2

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

donde $\mathbf{K} = k^2 \mathbf{K}_2 + ik \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0$ es una matriz conocida.

Como \mathbf{M} es simétrica y \mathbf{K} es hermítica, todos los autovalores son reales. Además como \mathbf{K} es semidefinida positiva y \mathbf{M} es definida positiva todos los autovalores ω^2 serán positivos o cero. Por tanto siempre se obtendrán valores de frecuencia ω reales.

3.5. Deformación en barras

Al estudiar una frecuencia fija, la ec. (3.36) se transforma en un sistema de autovalores cuadrático en k

$$(k^2 \mathbf{K}_2 + ik \mathbf{K}_1 + \mathbf{C}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}$ es una matriz conocida. Como las matrices \mathbf{K}_2 , $i\mathbf{K}_1$ y \mathbf{K}_0 son hermíticas¹, se cumple que [13]:

- los autovalores son reales o vienen en pares (k, k^*) de complejos conjugados.
- si d es el autovector por la derecha correspondiente a k , d^* es el autovector por la izquierda correspondiente a k^* :

$$\mathbf{d}^{*T} (k^{*2} \mathbf{K}_2 + ik^* \mathbf{K}_1 + \mathbf{C}) = 0 \quad (3.40)$$

Teniendo en cuenta además que la matriz \mathbf{K}_2 es regular, existirán $2G$ autovalores finitos.

Cualquier problema de autovalores cuadrático puede reescribirse como un problema de autovalores lineal con matrices no simétricas duplicando el número de incógnitas. Si definimos el vector $\mathbf{y} = [\mathbf{d}^T, k\mathbf{d}^T]^T$ de dimensión $(2G \times 1)$, podemos reescribir la ecuación (3.39) como:

¹Una matriz hermítica es aquella que cumple $\mathbf{K}^H = \mathbf{K}$, donde $\mathbf{K}^H = [\mathbf{K}^*]^T$ y $*$ indica complejo conjugado. En el caso de ondas guiadas en barras con número de onda real, teniendo en cuenta que $k = k^*$, $i^* = -i$ y $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$ podemos expresar $\mathbf{K}^H = k^{*2} \mathbf{K}_2^T + ik^* \mathbf{K}_1^T + \mathbf{K}_0 = k^2 \mathbf{K}_2 + ik \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}$

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} i\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ k\mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

que es un problema de autovalores generalizado en k , de dimensión $(2G \times 2G)$:

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{B})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden G y \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -i\mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

En materiales sin amortiguamiento, todas las matrices son reales y se obtienen autovalores reales, imaginarios puros y complejos, los cuales corresponden a los números de onda de los distintos modos de propagación (reales y evanescentes, respectivamente). En el caso de que alguno de los materiales sea viscoelástico, todos los números de onda obtenidos serán en general complejos, lo cual implica que todos los modos serán evanescentes.

3.6. Comentarios sobre los autovalores y auto-vectores

El problema cuadrático de autovalores con matrices complejas de la ecuación (3.39) puede transformarse en un problema de cuadrático de autovalores con matrices reales con un simple cambio de variable:

$$\lambda = ik, \lambda^2 = -k^2 \quad (3.44)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.39) y definiendo la matriz $\mathbf{G} = -\mathbf{K}_2$, se obtiene:

$$(\lambda^2\mathbf{G} + \lambda\mathbf{K}_1 + \mathbf{C})\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

Dado que \mathbf{G} y \mathbf{C} son matrices reales y simétricas, y que \mathbf{K}_1 es una matriz real y antisimétrica, este problema de autovalores tiene las siguientes propiedades [13]:

1. Los autovalores λ están dispuestos simétricamente en el plano complejo con respecto a los ejes real e imaginario, y pueden existir autovalores reales, imaginarios puros y complejos. Dado que $k = -i\lambda$, esta misma propiedad también es aplicable a los números de onda k , lo que permite extraer las siguientes conclusiones:

- Los números de onda reales, $k \in \mathbb{R}$, vienen en pares $(k, -k)$ que corresponden a un mismo modo pero propagándose en sentidos opuestos. Teniendo en cuenta que la dependencia funcional con x y t tiene la forma $e^{i(kx+\omega t)}$, el número de onda positivo representa una onda cuya fase se propaga hacia $x = -\infty$, y el número de onda negativo una onda propagándose hacia $x = +\infty$. El flujo de energía viaja en el mismo sentido que la fase, salvo en el caso de ondas “backward” que viaja en sentido contrario.
 - Los números de onda imaginarios puros, $(k/i) \in \mathbb{R}$, vienen en pares (k, \bar{k}) que corresponden a un mismo modo de vibración pero atenuándose en sentidos opuestos. Si suponemos que $k = ib$, la variación con x y t correspondiente es $e^{i\omega t}e^{-bx}$, donde el factor e^{-bx} es el causante del decrecimiento de la amplitud con la distancia. Si $b > 0$, la amplitud decae hacia $x = +\infty$ y si $b < 0$, el decrecimiento se produce hacia $x = -\infty$. Por tanto, si $b > 0$, k correspondería al modo que se atenúa hacia $x = +\infty$, mientras que \bar{k} corresponderían al modo que se atenúan hacia $x = -\infty$.
 - Los números de onda complejos, $k \in \mathbb{C}$, vienen en cuádruplas $(k, \bar{k}, -k, -\bar{k})$ todas asociadas a un mismo modo evanescente. Si suponemos que $k^{(m)} = a+ib$, la variación con x y t correspondiente es $e^{i(ax+\omega t)}e^{-bx}$. Si $b > 0$, k y $-\bar{k}$ corresponderían a modos que se atenúan hacia $x = +\infty$, mientras que $-k$ y \bar{k} corresponderían a modos que se atenúan hacia $x = -\infty$.
2. Si \mathbf{d} es un autovector por la derecha de λ , $\bar{\mathbf{d}}$ es un autovector por la derecha de $\bar{\lambda}$ ². Esta propiedad permite relacionar los autovectores correspondientes a un mismo modo, pero con diferentes direcciones de propagación o atenuación:
- A un modo real, que como se indicó en la propiedad anterior tiene asociados un par de números de onda reales, $k > 0$ y $-k$, con sus correspondientes autovectores por la derecha, $\mathbf{d}^{(-\infty)}$ y $\mathbf{d}^{(+\infty)}$, respectivamente, le corresponden un par de autovalores imaginarios puros, $\lambda = ik$ y $\bar{\lambda} = -ik$. Teniendo en cuenta la propiedad indicada arriba, se tiene la siguiente relación:

$$\mathbf{d}^{(-\infty)} = \bar{\mathbf{d}}^{(-\infty)} \quad (3.46)$$

²Si \mathbf{d} es el autovector por la derecha de λ , entonces: $(\lambda^2\mathbf{G} + \lambda\mathbf{K}_1 + \mathbf{C})\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Tomando el complejo conjugado de la expresión, se tiene $(\bar{\lambda}^2\mathbf{G} + \bar{\lambda}\mathbf{K}_1 + \mathbf{C})\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$, lo que demuestra que $\bar{\mathbf{d}}$ es el autovector por la derecha correspondiente a $\bar{\lambda}$.

- A un modo imaginario puro, que tiene asociados un par de números de onda, $k = -ib$ y \bar{k} , donde $b > 0$, con sus correspondientes autovectores por la derecha, $\mathbf{d}^{(-\infty)}$ y $\mathbf{d}^{(+\infty)}$, respectivamente, le corresponden un par de autovalores reales puros, $\lambda = ik = b$ y $-\lambda = i\hat{k} = -b$. Dado que $\mathbf{d}^{(-\infty)}$ es el autovector por la derecha de $\lambda = ik = b$, se tiene:

$$(\lambda^2 \mathbf{G} + \lambda \mathbf{K}_1 + \mathbf{C}) \mathbf{d}^{(-\infty)} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Tomando la traspuesta de la expresión anterior, y teniendo en cuenta la antisimetría de la matriz \mathbf{K}_1 , se llega a:

$$(\mathbf{d}^{(-\infty)})^T (\lambda^2 \mathbf{G} - \lambda \mathbf{K}_1 + \mathbf{C}) = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

lo que demuestra que $\mathbf{d}^{(-\infty)}$ es el autovector por la izquierda de $-\lambda$, y por lo tanto, de \bar{k} . Análogamente, se demuestra que $\mathbf{d}^{(+\infty)}$ es el autovector por la izquierda de λ , y por consiguiente, de k .

- Para un modo complejo, se demuestra que si \mathbf{d} es el autovector por la derecha de λ , entonces $\bar{\mathbf{d}}$ es el autovector por la izquierda de $-\bar{\lambda}$.

Para una malla de N nodos, la solución del sistema de autovalores cuadrático proporciona $2G$ autovalores $k^{(m)}$ y sus correspondientes autovectores por la derecha $\mathbf{d} = \boldsymbol{\phi}^{(m)}$. Por convención, se designan con $k^{(m,-\infty)}$ a los G números de onda asociados con modos reales que transportan energía hacia $x = -\infty$ y con modos evanescentes con amplitud decreciente hacia $x = -\infty$. En consecuencia, los números de onda $k^{(m,+\infty)} = -k^{(m,-\infty)}$ representan modos reales que transportan energía hacia $x = +\infty$ o modos evanescentes cuya amplitud decae hacia $x = +\infty$.

Los vectores $\boldsymbol{\phi}^{(m,+\infty)}$ y $\boldsymbol{\phi}^{(m,-\infty)}$, asociados respectivamente a los números de onda $k^{(m,+\infty)}$ y $k^{(m,-\infty)}$, representan la estructura de los desplazamientos en la sección transversal de la barra para el modo m según los dos posibles sentidos de propagación, si el número de onda es real, o decrecimiento, si el número de onda es imaginario o complejo. Ambos vectores están relacionados entre sí, debido a las propiedades del problema de autovalores del cual se han obtenido. Para los modos reales la relación es tan simple como:

$$\boldsymbol{\phi}^{(m,+\infty)} = \bar{\boldsymbol{\phi}}^{(m,-\infty)} \quad (3.49)$$