

Capítulo 4

Curvas de dispersión

4.1. Introducción

La propagación de ondas en un medio dispersivo se caracteriza porque la velocidad de fase (también la velocidad de grupo y el número de onda) depende de la frecuencia. Por citar un ejemplo, el vidrio constituye un medio dispersivo frente a la propagación de la luz, puesto que la velocidad de la luz en el vidrio es inversamente proporcional a la frecuencia en el rango de luz visible¹. La representación gráfica de esta variación se denomina curva de dispersión, cuya forma más habitual consiste en una representación bidimensional de la velocidad de fase frente a la frecuencia, aunque también es frecuente representar la velocidad de grupo frente a la frecuencia, y la frecuencia frente al número de onda.

Las guías de ondas elásticas son medios dispersivos, salvo algunas excepciones como la superficie de un semiespacio homogéneo (ondas superficiales de Rayleigh) o la interfase entre dos semiespacios (ondas de Stoneley y de Scholte). Dado que la propagación de energía elástica en estos medios tiene lugar en forma de multitud de modos distintos, todos ellos dispersivos, la guía de onda se caracteriza por una curva de dispersión que contiene una rama asociada a cada modo. La representación de estas ramas en el espacio tridimensional, $\Re(\xi) - \Im(\xi) - \Omega$, se denomina *espectro de frecuencia*, el cual puede considerarse como la “huella dactilar” de la guía de onda, puesto que determina su respuesta dinámica y contiene información acerca de la geometría y de las propiedades del material que la compone.

¹Por esta causa, un rayo de luz blanca se separa en los diversos colores espectrales (ondas electromagnéticas de distinta frecuencia que lo componen) al atravesar un prisma de vidrio, sufriendo el color violeta una refracción mayor que el color rojo de acuerdo con la ley de Snell.

Desde el punto de vista de las técnicas de ensayo no destructivo, el espectro de frecuencia y las curvas de dispersión son de vital importancia para seleccionar modos y rangos de frecuencia apropiados (p. ej., usando un criterio de mínima atenuación con objeto de maximizar el alcance, o eligiendo un rango donde la dispersión modal sea mínima para reducir la distorsión de la forma del pulso). También contienen datos necesarios para la generación de modos aislados (p. ej., mediante la ley de Snell), para la identificación de modos, así como para la interpretación de resultados (p. ej., el cálculo de distancias a partir de medidas de tiempos de vuelo).

El procedimiento matemático para obtener las curvas de dispersión de una guía de onda consiste en calcular las raíces de su ecuación característica. Estas ecuaciones solo pueden plantearse de forma analítica para algunas geometrías simples (placas, tubos de sección circular). Además sólo en algunos de esos es posible obtener las raíces de dichas ecuaciones con técnicas analíticas; por consiguiente, será necesario recurrir a algoritmos numéricos tanto para plantear las ecuaciones de dispersión como para resolverlas en el caso de barras de sección cualquiera. Por medio de éstos métodos se han analizado todas las secciones de barras.

En este capítulo se aborda el cálculo de curvas de dispersión mediante la aplicación de la formulación de EF presentada anteriormente, en el Capítulo 3. La discretización de la barra transforma la ecuación característica inicial en un problema de autovalores cuadrático, fácilmente expresable como uno lineal para el cual existen algoritmos de resolución muy robustos. La solución de dicho sistema representa una aproximación del espectro de frecuencia y de las curvas de dispersión, así como de la estructura de los desplazamientos de cada modo en la sección transversal.

4.2. Cálculo de curvas de dispersión

La formulación semi-analítica de EF permite calcular de forma aproximada espectros de frecuencia y curvas de dispersión de ondas guiadas en barras de una manera sencilla y general resolviendo el problema de autovalores formulado en la ec. (3.36). Hay dos maneras principales de obtener curvas de dispersión:

- *Barrido en frecuencia:* se resuelve el problema de autovalores para una frecuencia fija, ec. (3.39), lo que equivale a obtener la intersección de las curvas de dispersión con un plano $\omega = \text{const} \in \mathbb{R}$. El resultado, en ausencia de amortiguamiento, son autovalores reales, puramente imaginarios y complejos, los cuales corresponden a los números de onda de los diferentes modos guiados (reales y evanescentes, respectivamente). En el caso de materiales viscoelásticos, todos los autovalores obtenidos son

complejos, indicando que todos los modos sufren atenuación. Las curvas de dispersión se obtienen repitiendo este proceso para muchas frecuencias.

- *Barrido en número de onda*: se resuelve el problema de autovalores para un valor fijo del número de onda, ec. (3.38), lo cual equivale a obtener la intersección de las curvas de dispersión con una línea $k = \text{const} \in \mathbb{C}$. El resultado son autovalores reales, puramente imaginarios y complejos, de los cuales sólo tienen sentido físico los reales puesto que corresponden a valores de la frecuencia. Un autovalor complejo o imaginario revela que el modo correspondiente no puede presentar el número de onda considerado para ninguna frecuencia. Las curvas de dispersión se obtienen repitiendo este proceso para muchos números de onda. Este procedimiento sólo es útil para calcular autovalores reales o imaginarios puros, lo cual limita su uso a placas sin amortiguamiento.

Ambas estrategias se han aplicado en este proyecto. Para la resolución de los problemas de autovalores se han empleado subrutinas de la librería de Matlab: `eig()`, `eigs()` para el barrido en número de onda y `polyeig()` para el barrido en frecuencia [9].

4.2.1. Frecuencias de corte

Las frecuencias de corte se pueden obtener fácilmente teniendo en cuenta que, por definición, son aquellas frecuencias para las cuales los modos no se propagan ($k=0$). Sustituyendo este valor del número de onda en la ec. (3.38), se obtiene un sistema de autovalores en ω :

$$(\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Los autovalores de este problema son las frecuencias de corte de cada modo, y los autovectores la estructura de dichos modos. Ambas matrices son simétricas y, en ausencia de amortiguamiento, también reales, por lo que todos los autovalores ω^2 son reales. En presencia de amortiguamiento la única solución real es la trivial, indicando que sólo los modos fundamentales pueden presentar número de onda nulo.

4.2.2. Velocidades de fase y de grupo

La velocidad de fase de un modo real cualquiera m a una frecuencia dada ω se obtiene a partir del número de onda $k^{(m)}$ como

$$c^{(m)} = \frac{\omega}{k^{(m)}} \quad (4.2)$$

La definición de la velocidad de grupo para los modos reales es la siguiente

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.3)$$

El cálculo de la derivada del número de onda respecto de la frecuencia se obtiene derivando de forma implícita la ecuación del problema de autovalores de EF, respecto a la frecuencia

$$\left(2k \frac{dk}{d\omega} \mathbf{K}_2 + i \frac{dk}{d\omega} \mathbf{K}_1 - 2\omega \mathbf{M} \right) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Despejando

$$\frac{1}{c_{gr}} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{2\omega \mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^T (2k \mathbf{K}_2 + i \mathbf{K}_1) \mathbf{d}} \quad (4.5)$$

Particularizando la expresión anterior para el modo m , se tiene

$$c_{gr}^{(m)} = \frac{\phi^{(m)T} (2k^{(m)} \mathbf{K}_2 + i \mathbf{K}_1) \phi^{(m)}}{2\omega \phi^{(m)T} \mathbf{M} \phi^{(m)}} \quad (4.6)$$

4.3. Sección cuadrada

En este apartado se estudia numéricamente la propagación de ondas guiadas en barras de sección cuadrada de lado $2a$, de material lineal elástico e isótropo con coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Para realizar los cálculos numéricos es necesario fijar completamente la geometría ($a = 1mm$) y las propiedades del material ($\rho=1g/cm^3$, $c_T=1$ km/s), aunque sabemos que las curvas de dispersión en variables adimensionales sólo dependen de ν . Las variables adimensionales utilizadas para expresar los resultados son las siguientes:

$$\xi = ka \quad (4.7)$$

$$\Omega = \frac{\omega a}{c_T} \quad (4.8)$$

$$\bar{c} = \frac{c}{c_T} \quad (4.9)$$

$$\bar{c}_{gr} = \frac{c_{gr}}{c_T} \quad (4.10)$$

El modelo de Elementos Finitos empleado en esta sección es una malla de 20 elementos en el eje x y 20 elementos en el eje y , cada elemento esta formado por cuatro nudos, y en cada nudo tenemos 3 grados de libertad, que son los desplazamientos en las direcciones x , y y z ; por lo que tenemos una malla de 400 elementos de 4 nudos, 441 nudos y 1323 grados de libertad, ver figura 4.1.

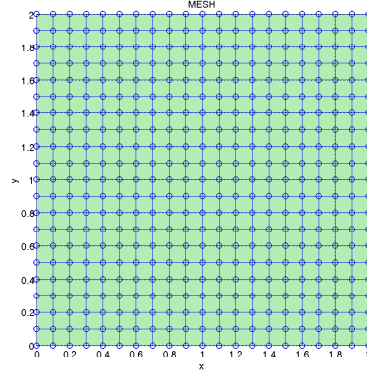


Figura 4.1. Malla de la sección cuadrada con 20 elementos en cada dirección

Se ha utilizado el criterio de mallado propuesto por Galán y Abascal [3, 5] para ondas guiadas en placas

$$\frac{\lambda_T}{l} > \beta \quad (4.11)$$

donde l es el tamaño de elemento, $\lambda_T = 2\pi c_T/\omega$ es la longitud de onda de las ondas transversales a la frecuencia ω y $\beta = 10$.

Desde el punto de vista de aplicación práctica, el criterio de mallado permite resolver dos cuestiones:

- Determinar el tamaño de elemento l que produce resultados precisos para frecuencias inferiores a una dada $\omega_{\text{máx}}$: $l < \frac{2\pi c_T}{\beta \omega_{\text{máx}}}$
- Determinar la máxima frecuencia para la cual una malla dada, con tamaño de elemento l , produce resultados precisos: $\omega < \frac{2\pi c_T}{\beta l}$

Para la malla utilizada la longitud de cada elemento es $(l/a) = 0,1$, con lo que según el criterio de mallado, los resultados obtenidos serán precisos para $\Omega < 6,28$. Como la máxima frecuencia analizada ha sido $\Omega = 6$, la malla empleada es suficientemente fina para dar resultados correctos en todo el rango de frecuencias.

Para demostrar la validez de este criterio de mallado en barras se han representado los espectros de frecuencia de los modos longitudinales y de torsión para distintas mallas, representadas en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3, y se corresponden, respectivamente, con mallas de 20, 10 y 5 elementos en cada dirección. A las mallas de 5 y 10 elementos, cuyos tamaños de elementos son $(l/a) = 0,4$ y $(l/a) = 0,2$, respectivamente, le corresponden según el criterio de mallado unos límites máximos de frecuencia de $\omega_{\text{max}} = 1,5$ y $\omega_{\text{max}} = 3$. Todos los espectros de frecuencia se han obtenido en el mismo rango de frecuencias, hasta $\Omega = 6$,

para poder comparar los resultados obtenidos con cada una de las mallas; estos resultados se pueden ver en la figura 4.4, donde aparece el modo longitudinal y en la figura 4.5, donde aparece el modo de torsión. En ambos casos se ha representado con línea continua el espectro de la malla de 20 elementos, con cruces el espectro para la malla de 10 elementos y con círculos para el caso de 5 elementos. Se puede comprobar que para $\Omega > 1,5$ en el caso de la malla de 5 elementos y para $\Omega > 3$ en el caso de la malla de 10 elementos, los resultados difieren de los obtenidos para la malla de 20 elementos en cada dirección.

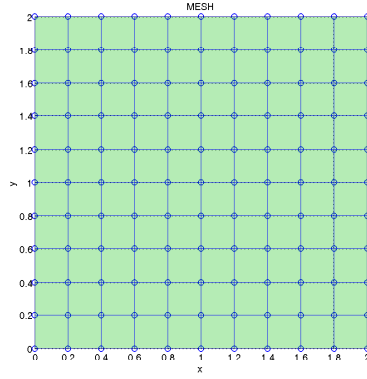


Figura 4.2. Malla de la sección cuadrada de 10 elementos en cada dirección

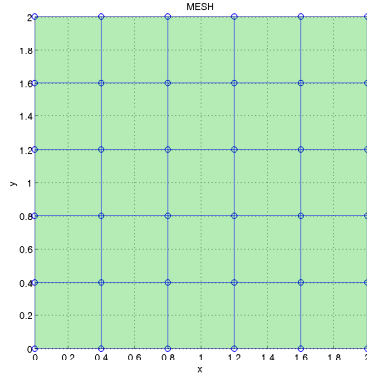


Figura 4.3. Malla de la sección cuadrada de 5 elementos en cada dirección

En las barras de sección cuadrada existen cinco tipos de modo de propagación diferentes, que se diferencian por la simetría o la antisimetría de su deformada con respecto a los cuatro ejes de simetría de la sección (eje x , eje y , diagonales) [4]. Las características de los distintos tipos de modos de propagación aparecen en la siguiente tabla:

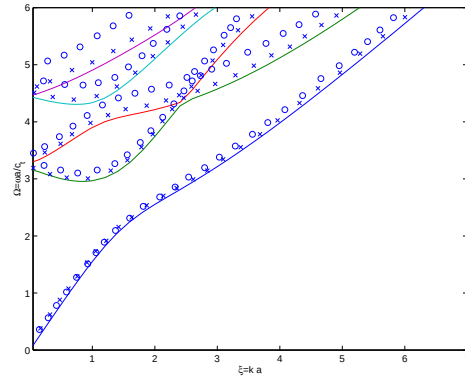


Figura 4.4. Comparación de los espectros de frecuencia de modos longitudinales obtenidos con mallas de 20 (línea continua), 10 (cruces) y 5 (círculos) elementos en cada dirección

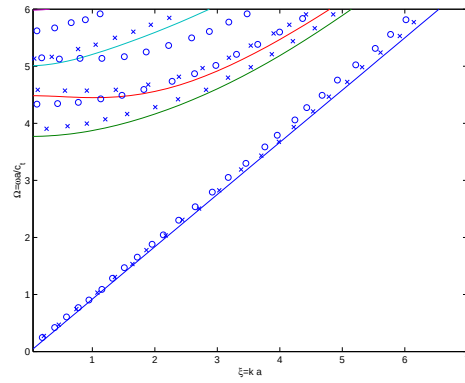


Figura 4.5. Comparación de los espectros de frecuencia de modos de torsión obtenidos con mallas de 20 (línea continua), de 10 (cruces) y de 5 (círculos) elementos en cada dirección

Modo	Etiqueta	Eje x	Eje y	Diagonal
Longitudinal	L	S	S	S
Flexión alrededor eje x	Fx	A	S	-
Flexión alrededor eje y	Fy	S	A	-
Torsión	T	A	A	A
Tornillo I	TS	S	S	A
Tornillo II	TA	A	A	S

Cuadro 4.1. Tipos de modos de propagación en una sección cuadrada.

Podemos ver la forma de los cinco tipos de modos de propagación que aparecen en una sección cuadrada, mostrando la malla deformada junto a la indeformada, de manera que se puede apreciar fácilmente el efecto provocado por la propagación en cada caso. Se ha representado un ejemplo para cada modo: modo longitudinal 4.6, de torsión 4.7, de flexión 4.8 y los modos de tornillo (4.9 y 4.10).

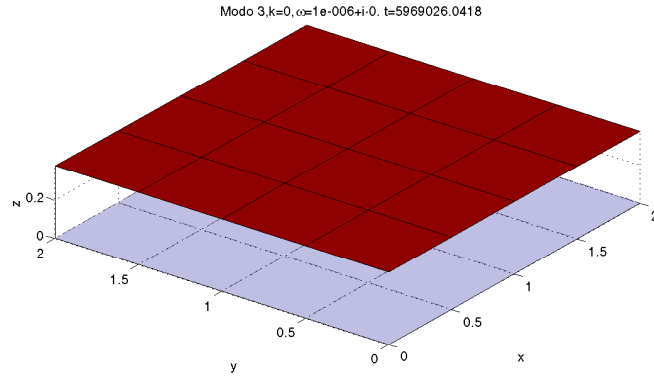


Figura 4.6. Malla deformada para un modos longitudinal para una barra de sección cuadrada (modo L0, $\Omega = 0$, $\xi = 0$)

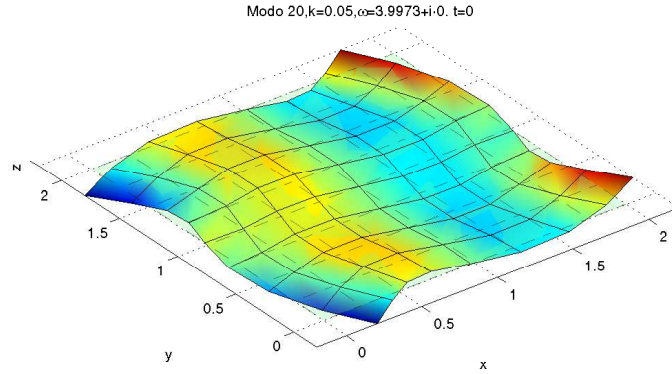


Figura 4.7. Malla deformada para un modo de torsión para una barra de sección cuadrada (modo T1, $\Omega = 3,9973$, $\xi = 0,05$)

A continuación aparecen las espectros de frecuencia de los cinco tipos que aparecen en una sección cuadrada: longitudinales 4.11, de torsión 4.12, de flexión 4.13, de tornillo tipo I 4.14 y de tornillo tipo II 4.15.

Las curvas de dispersión representan tanto la velocidad de fase c/c_T frente al número de onda ξ como la velocidad de grupo c_{gr}/c_T frente al número de

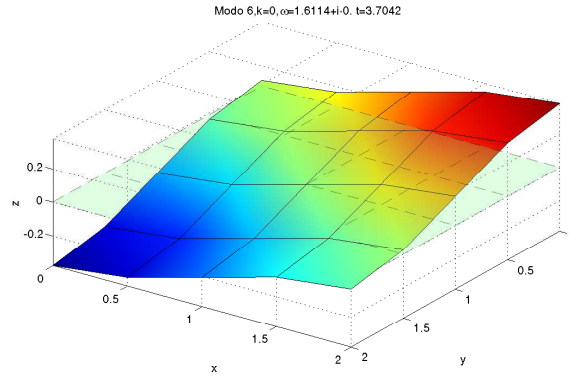


Figura 4.8. Malla deformada para un modo de flexión para una barra de sección cuadrada (modo F1, $\Omega = 1,6114$, $\xi = 0$)

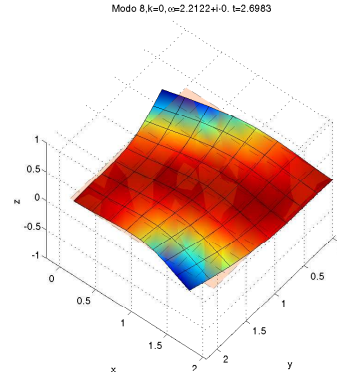


Figura 4.9. Malla deformada para un modo de tornillo tipo I para una barra de sección cuadrada (modo TS0, $\Omega = 2,2122$, $\xi = 0$)

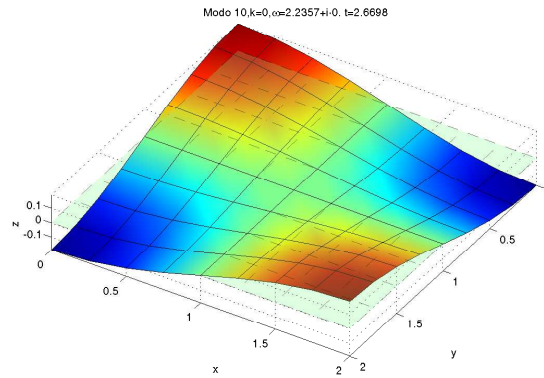


Figura 4.10. Malla deformada para un modo de tornillo tipo II para una barra de sección cuadrada (modo TA1, $\Omega = 2,2357$, $\xi = 0$)

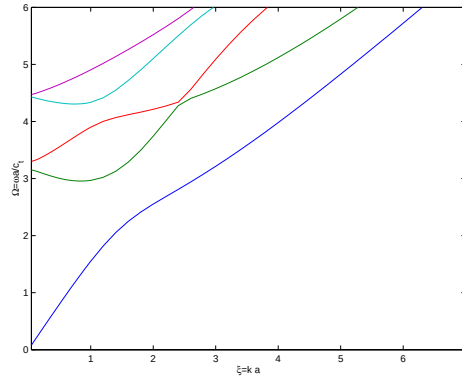


Figura 4.11. Espectro de frecuencia para modos longitudinales en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

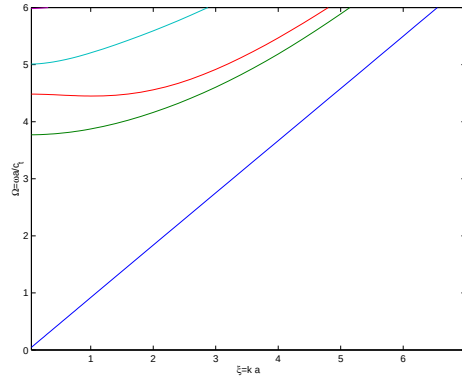


Figura 4.12. Espectro de frecuencia para modos de torsión en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

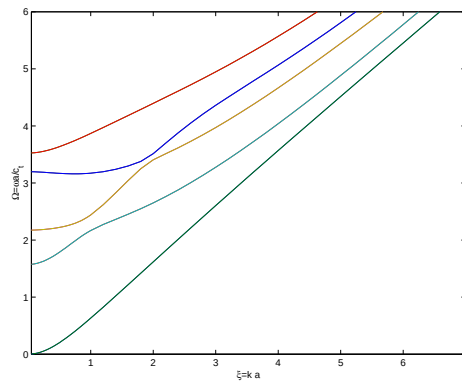


Figura 4.13. Espectro de frecuencia para modos de flexión en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

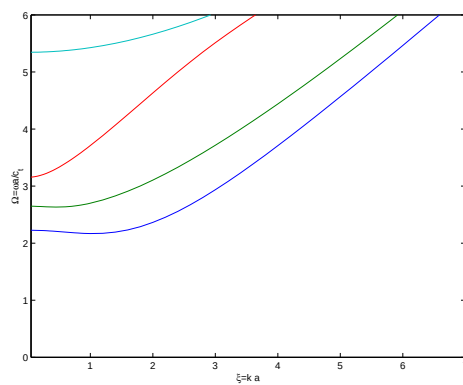


Figura 4.14. Espectro de frecuencia para modos de tornillo tipo I en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

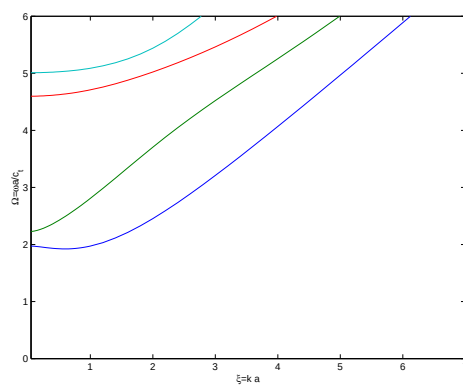


Figura 4.15. Espectro de frecuencia para modos de tornillo tipo II en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

onda ξ , todo ello para los 5 tipos de modos que existen en la sección cuadrada. Se pueden observar las distintas curvas de velocidad de fase frente a número de onda (ver figuras 4.16 a 4.20) o velocidad de grupo frente al número de onda (ver figuras 4.21 a 4.25)

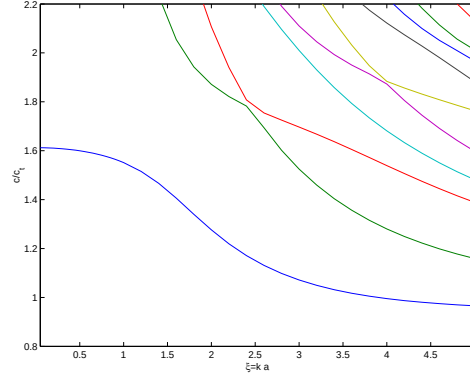


Figura 4.16. Curvas de dispersión c/c_t frente a ξ para modos longitudinales en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

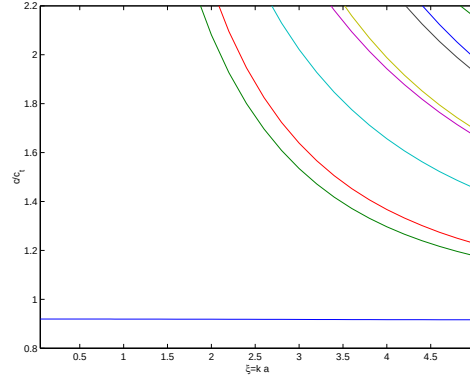


Figura 4.17. Curvas de dispersión c/c_t frente a ξ para modos de torsión en secciones Cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

Para comprobar la formulación y el programa realizado en este proyecto se van a comparar los resultados obtenidos en los espectros de frecuencias $\Omega - \xi$ para modos reales con los que Hirose [7] obtuvo con el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Para ello, en las gráficas 4.26, 4.27 y 4.28, que se corresponden respectivamente con los modos longitudinales, de torsión y de tornillo tipo I, se superponen los resultados obtenidos por Hirose, que aparecen reflejados por cruces, con los que se han obtenido con nuestro programa que se

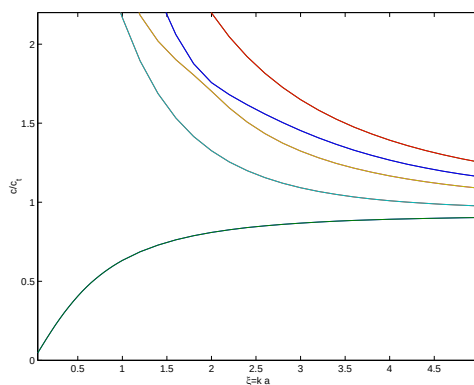


Figura 4.18. Curvas de dispersión c/c_t frente a ξ para modos de flexión en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

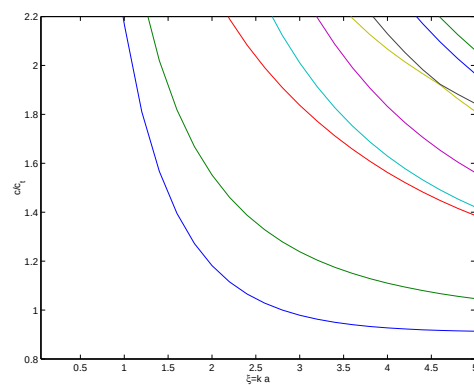


Figura 4.19. Curvas de dispersión c/c_t frente a ξ para modos de tornillo tipo I en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

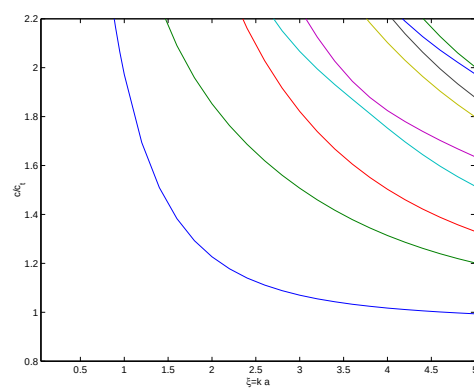


Figura 4.20. Curvas de dispersión c/c_t frente a ξ para modos de tornillo tipo II en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

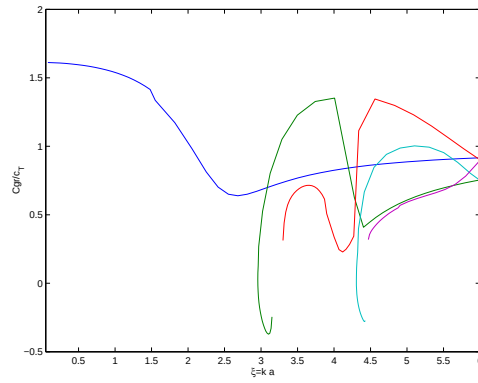


Figura 4.21. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos longitudinales en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

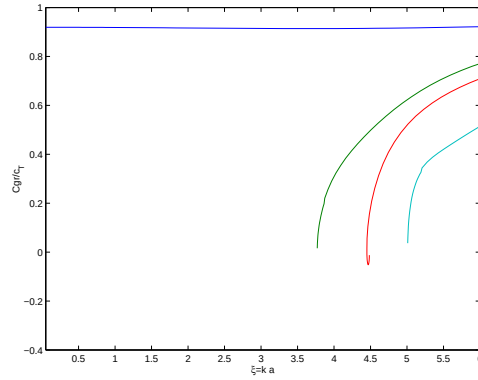


Figura 4.22. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de torsión en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

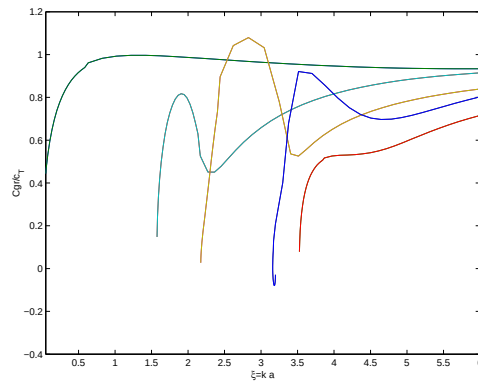


Figura 4.23. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de flexión en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

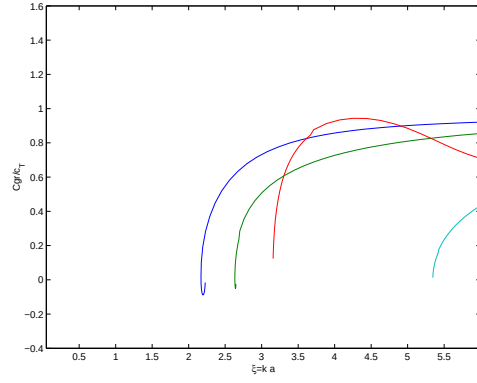


Figura 4.24. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de tornillo tipo I en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

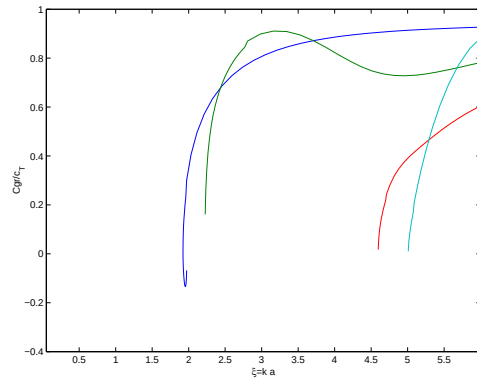


Figura 4.25. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de tornillo tipo II en secciones cuadradas obtenidos con 20 elementos en cada dirección

representan con línea continua. Se puede observar en dichas gráficas que coinciden ambos resultados, lo cual nos garantiza que la formulación del programa utilizado en el proyecto es correcta.

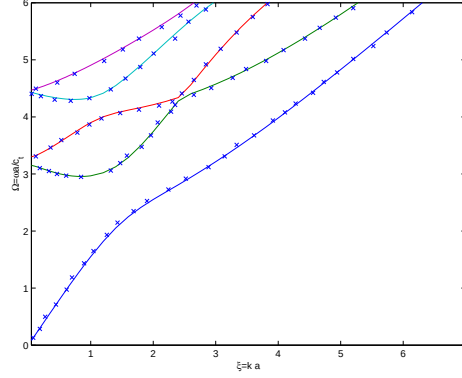


Figura 4.26. Comparación de espectro de frecuencia para modos longitudinales en secciones cuadradas

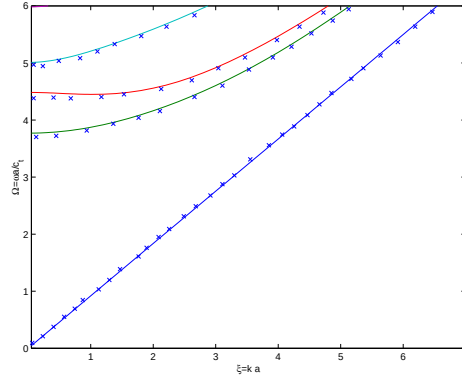


Figura 4.27. Comparación de espectro de frecuencia para modos de torsión en secciones cuadradas

Se va a realizar otra comprobación de la formulación y el programa utilizado comparando los resultados obtenidos en las curvas de dispersión $c/c_T - \xi$ para modos reales con los que obtuvo Fraser [4]. Para ello en las gráficas, 4.29, 4.30 y 4.31, que se corresponden respectivamente con los modos longitudinales, de torsión y de tornillo tipo I, se superponen los resultados obtenidos por Fraser, que aparecen reflejados por cruces, con los que se han obtenido con nuestro programa que se representan con línea continua. De nuevo se puede observar los resultados para ambos casos coinciden, de manera que podemos decir que el programa realizado es válido.

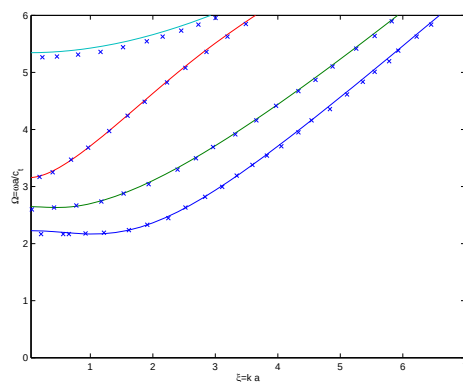


Figura 4.28. Comparación de espectro de frecuencia para modos de tornillo tipo I en secciones cuadradas

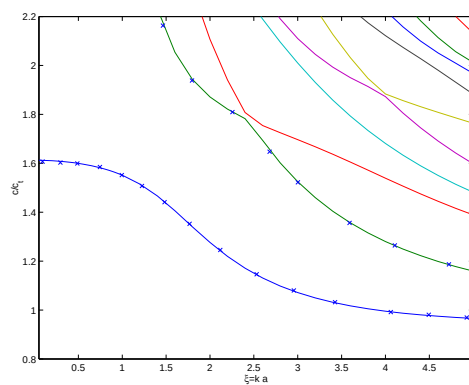


Figura 4.29. Comparación de curvas de dispersión $c/c_T - \xi$ para modos longitudinales en secciones cuadradas

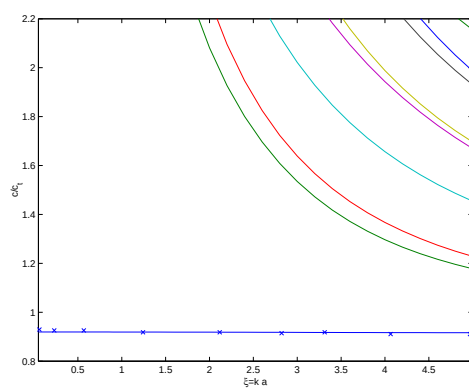


Figura 4.30. Comparación de curvas de dispersión $c/c_T - \xi$ para modos de torsión en secciones cuadradas

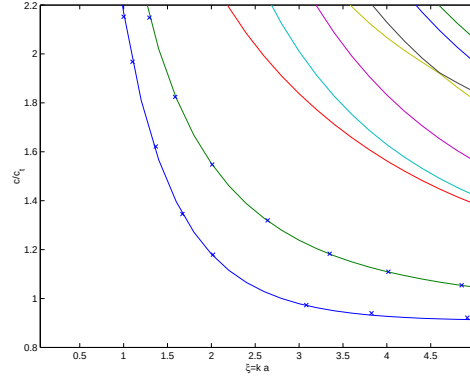


Figura 4.31. Comparación de curvas de dispersión $c/c_T - \xi$ para modos de tornillo tipo I en secciones cuadradas

Se va a realizar una última comprobación comparando los resultados obtenidos en las curvas de dispersión $c_{gr}/c_T - \xi$ para modos reales con los que obtuvo Hirose [7]. Para ello en las gráficas, 4.32, 4.33 4.34, que se corresponden respectivamente con los modos longitudinales, de torsión y de tornillo tipo II, se superponen los resultados obtenidos por Hirose, que aparecen reflejados por cruces, con los que se han obtenido con nuestro programa que se representan con línea continua. Al coincidir ambos resultados queda demostrada la validez de nuestro programa para secciones cuadradas.

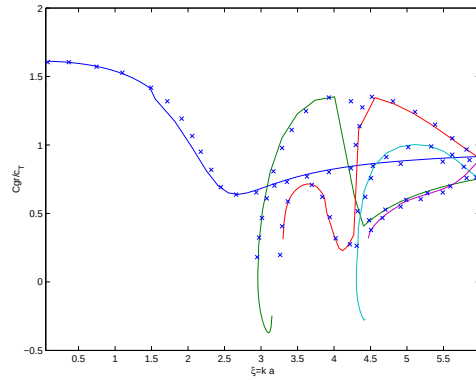


Figura 4.32. Comparación de curvas de dispersión $c_{gr}/c_T - \xi$ para modos longitudinales en secciones cuadradas

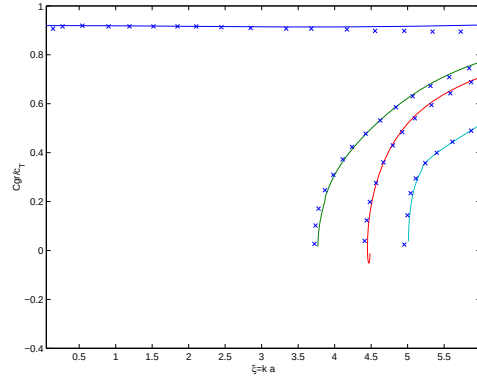


Figura 4.33. Comparación de curvas de dispersión $c_{gr}/c_T - \xi$ para modos de torsión en secciones cuadradas

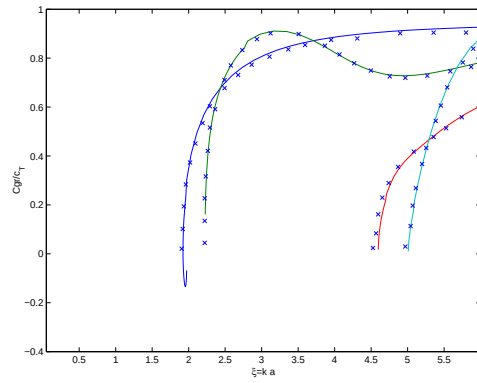


Figura 4.34. Comparación de curvas de dispersión $c_{gr}/c_T - \xi$ para modos de tornillo tipo II en secciones cuadradas

4.4. Sección rectangular

En este apartado se estudia numéricamente la propagación de ondas guiadas en barras de sección rectangular de lados $2a$ y $2b$, ver figura 4.35, de material lineal elástico e isótropo con coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Para realizar los cálculos numéricos es necesario fijar completamente la geometría ($a = 1mm$ y $b = 0,5mm$) y las propiedades del material ($\rho=1g/cm^3$, $c_T=1$ km/s), aunque sabemos que las curvas de dispersión adimensionales sólo dependen de ν y de a/b . Las variables adimensionales en este caso son las siguientes:

$$\xi = ka \quad (4.12)$$

$$\Omega = \frac{\omega a}{c_T} \quad (4.13)$$

$$\bar{c} = \frac{c}{c_T} \quad (4.14)$$

$$\bar{c}_{gr} = \frac{c_{gr}}{c_T} \quad (4.15)$$

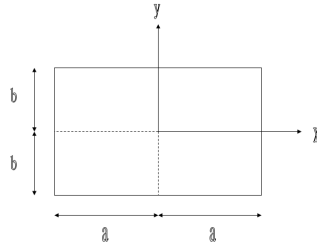


Figura 4.35. Geometría de la sección rectangular

El modelo de Elementos Finitos empleado en esta sección es una malla de 20 elementos en el eje x y 20 elementos en el eje y , por lo que tenemos una malla de 400 elementos de 4 nudos, 441 nudos y 1323 grados de libertad 4.36.

Para la malla utilizada la longitud de cada elemento es $(l/a) = 0,1$, con lo que según el criterio de mallado, los resultados obtenidos serán precisos para $\Omega < 6,28$. Como la máxima frecuencia analizada ha sido $\Omega = 6$, la malla empleada es suficientemente fina para dar resultados correctos en todo el rango de frecuencias.

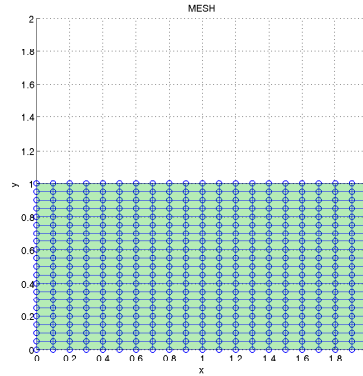


Figura 4.36. Malla de la sección rectangular

En las barras de sección rectangular existen cuatro tipos de modo de propagación diferentes, según la simetría o la antisimetría de su deformada con respecto a los dos ejes de simetría de la sección (eje x , eje y) [4]. Las características de los distintos tipos de modos de propagación aparecen en la siguiente tabla:

Modo	Etiqueta	Eje x	Eje y
Longitudinal	L	S	S
Flexión alrededor eje x	Fx	A	S
Flexión alrededor eje y	Fy	S	A
Torsión	T	A	A

Cuadro 4.2. Tipos de modos de propagación en una sección rectangular.

Podemos ver la forma de los tipos de modos de propagación que aparecen en una sección rectangular, mostrando la malla deformada junto a la indeformada, de manera que se puede apreciar fácilmente el efecto provocado por la propagación en cada caso. Se ha representado un ejemplo para cada tipo de modo: longitudinal 4.37, de torsión 4.38 y de flexión respecto al eje y 4.39.

A continuación se representan los espectros de frecuencia de los cuatro tipos de propagación que aparecen en una sección rectangular: longitudinal 4.40, de torsión 4.41, de flexión respecto al eje y 4.42 y de flexión respecto al eje x 4.43.

Además aparecen las curvas de dispersión para esta sección rectangular representando la velocidad de fase c/c_T frente al número de onda ξ (figuras 4.44 a 4.47) y la velocidad de grupo c_{gr}/c_T frente al número de onda (figuras 4.48 a 4.51).

Para comprobar la formulación y el programa realizado en este proyecto para secciones rectangulares se van a comparar los resultados obtenidos en los espectros de frecuencias $\Omega - \xi$ para modos reales con los que obtuvo Taweel

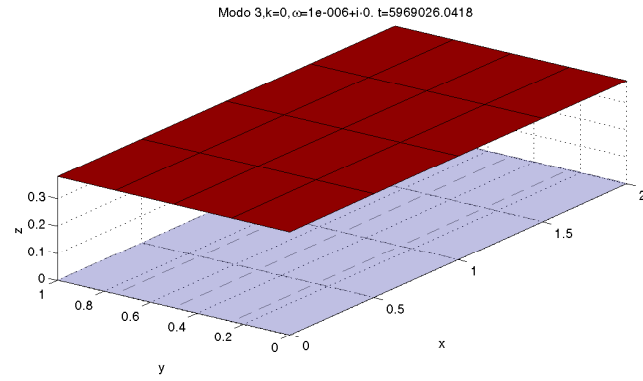


Figura 4.37. Malla deformada para un modo longitudinal en una barra de sección rectangular (modo L0, $\Omega = 0$, $\xi = 0$)

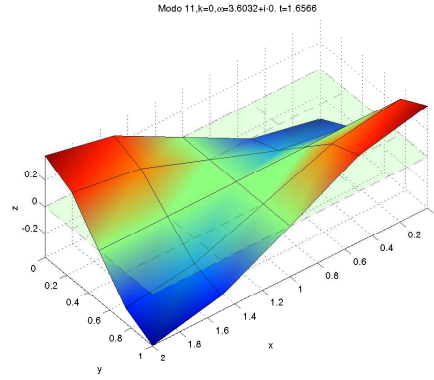


Figura 4.38. Malla deformada para un modo de torsión en una barra de sección rectangular (modo T2, $\Omega = 3,6032$, $\xi = 0$)

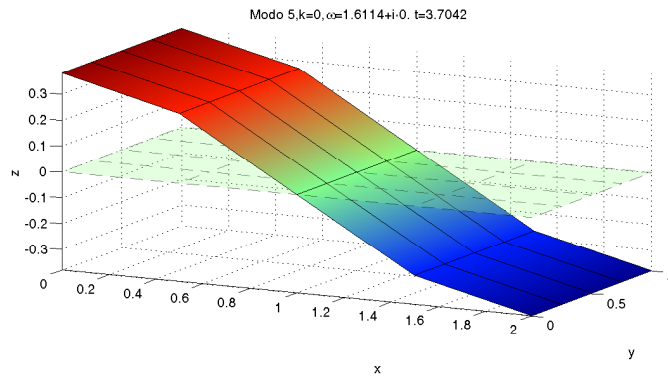


Figura 4.39. Malla deformada para un modo de flexión según el eje y en una barra de sección rectangular (modo Fy1, $\Omega = 1,6114$, $\xi = 0$)

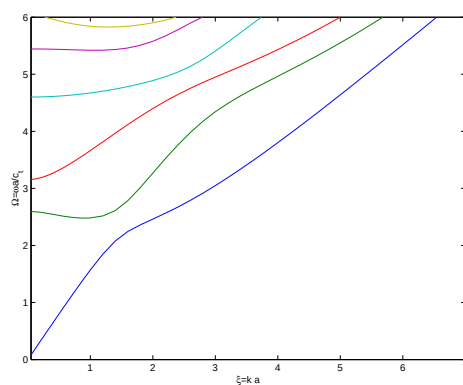


Figura 4.40. Espectro de frecuencia para modos longitudinales en secciones rectangulares

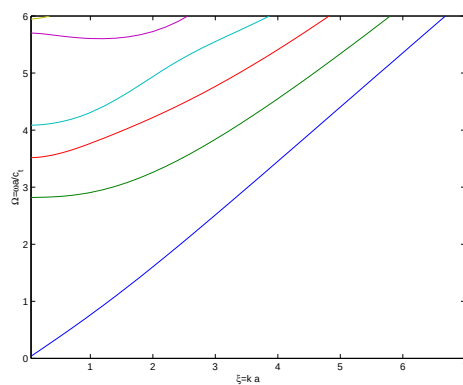


Figura 4.41. Espectro de frecuencia para modos de torsión en secciones rectangulares

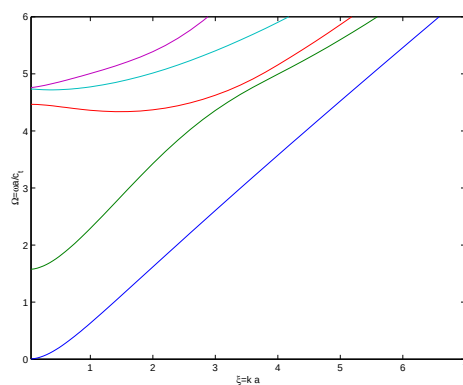


Figura 4.42. Espectro de frecuencia para modos de flexión según el eje y en secciones rectangulares

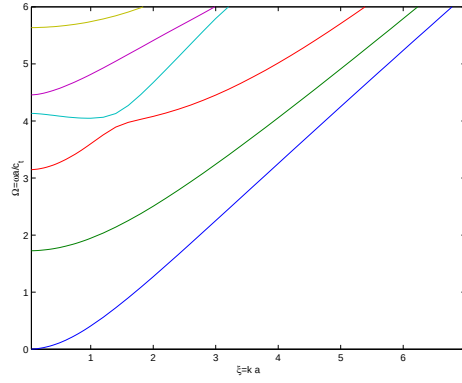


Figura 4.43. Espectro de frecuencia para modos de flexión según el eje x en secciones rectangulares

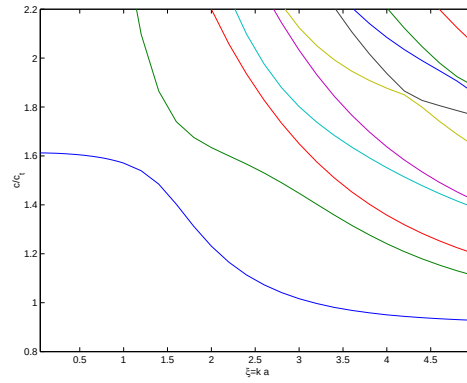


Figura 4.44. Velocidad de fase c/c_t frente a ξ para modos longitudinales en secciones rectangulares

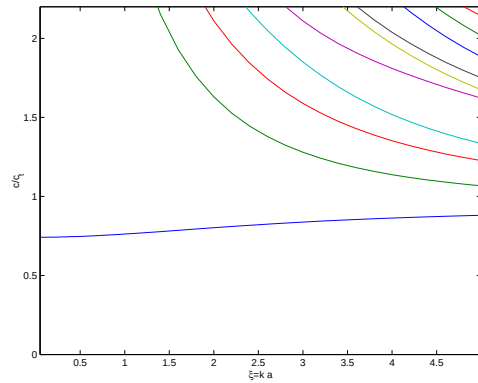


Figura 4.45. Velocidad de fase c/c_t frente a ξ para modos de torsión en secciones rectangulares

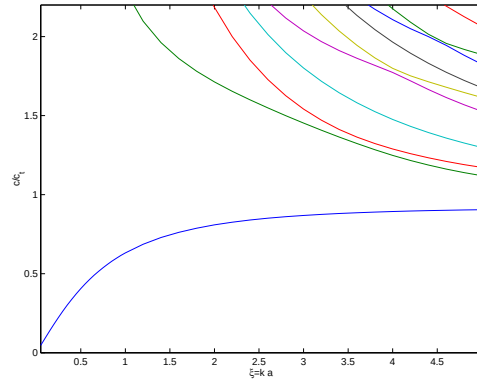


Figura 4.46. Velocidad de fase c/c_t frente a ξ para modos de flexión respecto al eje y en secciones rectangulares

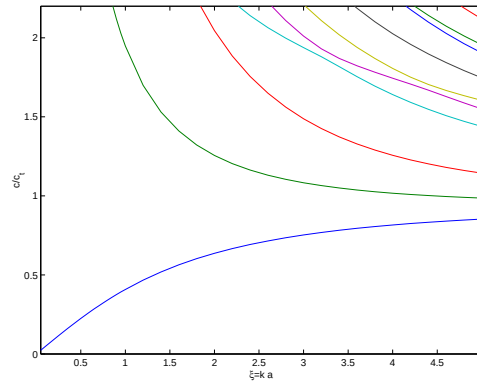


Figura 4.47. Velocidad de fase c/c_t frente a ξ para modos de flexión respecto al eje x en secciones rectangulares

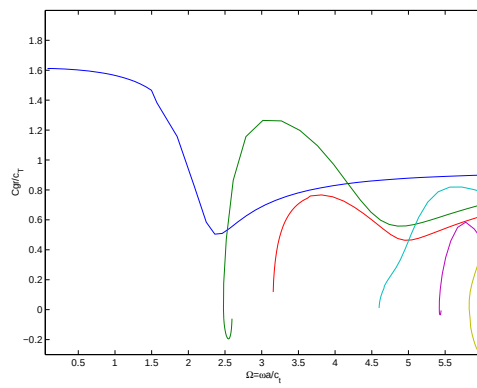


Figura 4.48. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos longitudinales en secciones rectangulares

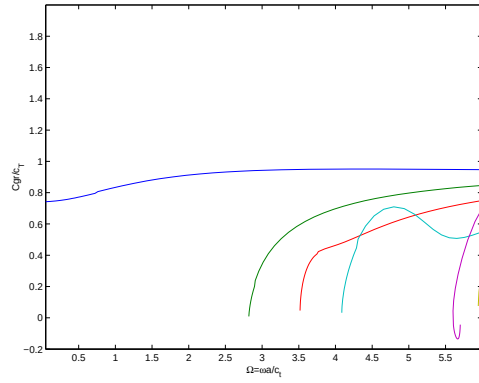


Figura 4.49. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de torsión en secciones rectangulares

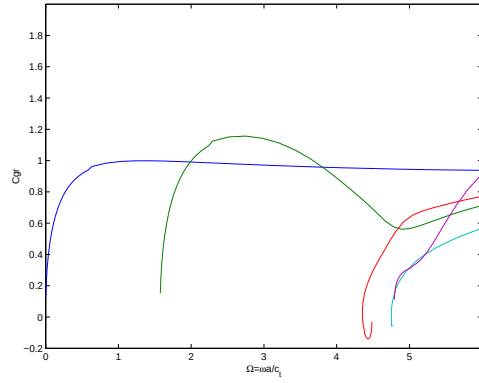


Figura 4.50. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de flexión respecto al eje y en secciones rectangulares

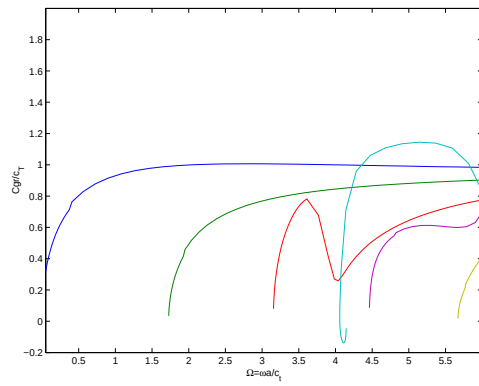


Figura 4.51. Velocidad de grupo c_{gr}/c_t frente a ξ para modos de flexión respecto al eje x en secciones rectangulares

[12]. Para ello, en las gráficas 4.52, 4.53, 4.54 y 4.55 que se corresponden respectivamente con los modos longitudinales, de torsión y de flexión según el eje y y según el eje x , se superponen los resultados obtenidos por Taweel, que aparecen reflejados por cruces, con los que se han obtenido con nuestro programa que se representan con línea continua. Se puede observar en dichas gráficas que coinciden ambos resultados, lo cual nos garantiza que la formulación del programa utilizado en el proyecto es correcta y válida para secciones rectangulares.

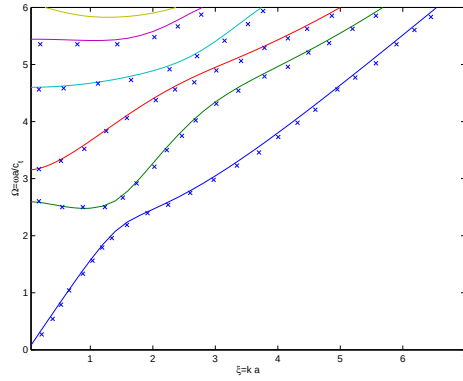


Figura 4.52. Comparación de espectro de frecuencia para modos longitudinales en secciones rectangulares

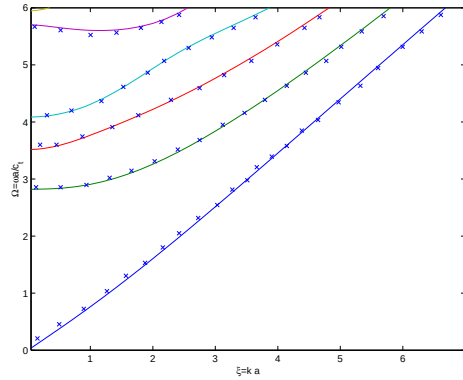


Figura 4.53. Comparación de espectro de frecuencia para modos de torsión en secciones rectangulares

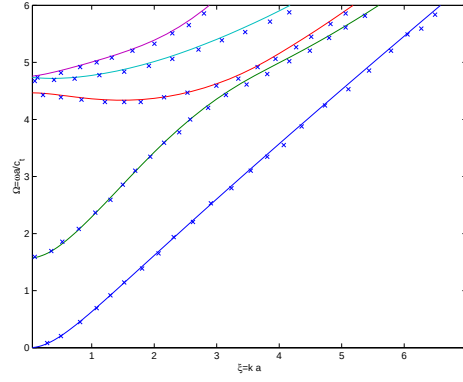


Figura 4.54. Comparación de espectro de frecuencia para modos de flexión según el eje y en secciones rectangulares

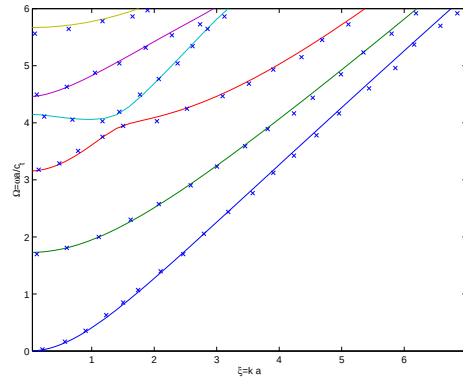


Figura 4.55. Comparación de espectro de frecuencia para modos de flexión según el eje x en secciones rectangulares

4.5. Sección en I

En este apartado se estudia numéricamente la propagación de ondas guiadas en barras de sección en I de ancho a y canto b , con un espesor h constante para las alas y el alma, como se muestra en la figura 4.56, de material lineal elástico e isótropo con coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Para realizar los cálculos numéricos es necesario fijar completamente la geometría ($a = 10mm$, $b = 11mm$ y $h = 1mm$) y las propiedades del material ($\rho=1g/cm^3$, $c_T=1$ km/s), aunque sabemos que las curvas de dispersión adimensionales sólo dependen de ν , a/h y b/h . Las variables adimensionales son en este caso las siguientes:

$$\xi = kh \quad (4.16)$$

$$\Omega = \frac{\omega h}{c_T} \quad (4.17)$$

$$(4.18)$$

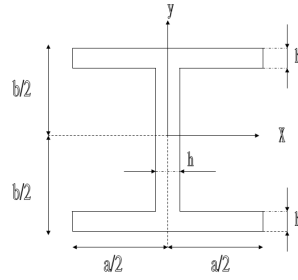


Figura 4.56. Geometría de la sección en I

El modelo de Elementos Finitos empleado en esta sección es una malla realizada en el programa de elementos finitos Patran e importada a Matlab, con un total de 228 elementos y 308 nudos. (ver figura 4.57).

Para la malla utilizada la longitud de cada elemento es $(l/h) = 0,25$, con lo que según el criterio de mallado, los resultados obtenidos serán precisos para $\Omega < 2,51$. Como la máxima frecuencia analizada es $\Omega = 1,5$, la malla empleada es suficientemente fina para dar resultados correctos en todo el rango de frecuencias.

En las barras con sección en I hay cuatro tipos de modos de propagación, que tienen las mismas características y se etiquetan de la misma forma que para secciones rectangulares, como se puede observar en la tabla (4.2).

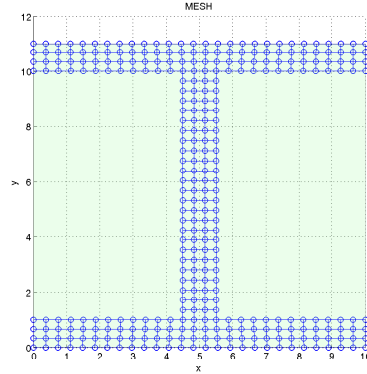
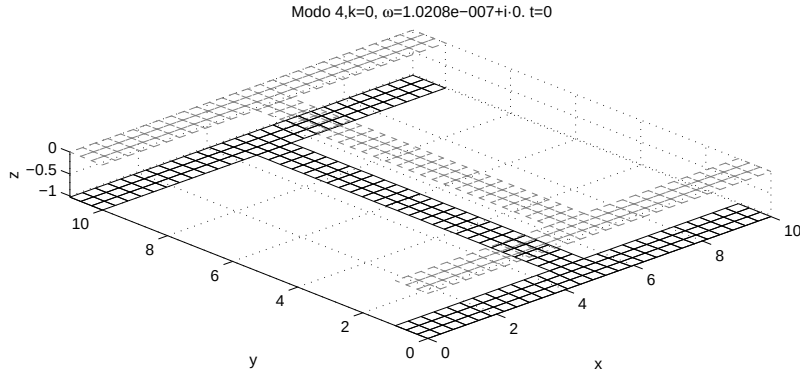


Figura 4.57. Malla de la sección en I

Podemos ver la forma de los tres tipos de modos de propagación que aparecen en una sección en I, mostrando la malla deformada junto a la indeformada, de manera que se puede apreciar fácilmente el efecto provocado por la propagación en cada caso. Se ha representado un ejemplo para cada tipo de modo: longitudinal 4.58, de torsión 4.59 y de flexión respecto al eje x 4.60 y respecto al eje y 4.61.

Figura 4.58. Malla deformada para un modo longitudinal para una barra de sección en I (modo L0, $\Omega = 0$, $\xi = 0$)

Para comprobar la formulación y el programa realizado en este proyecto para secciones en I se van a comparar los resultados obtenidos en los espectros de frecuencias $\Omega - \xi$ para modos reales con los que obtuvo Shah [11]. Para ello, en las gráficas 4.62, 4.63, 4.64 y 4.65, que se corresponden respectivamente con los modos longitudinales, de torsión y de flexión, se superponen los resultados obtenidos por Shah, que aparecen reflejados por cruces, con los que se han

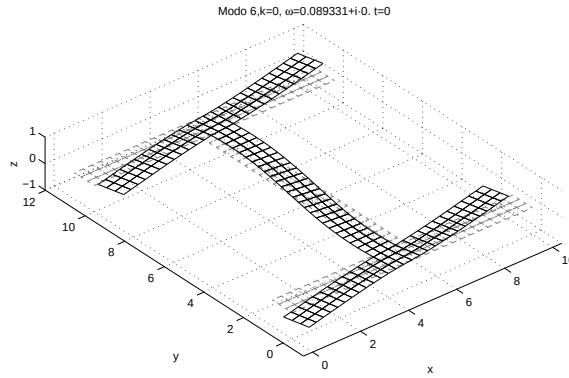


Figura 4.59. Malla deformada para un modo de torsión para una barra de sección en I (modo T1, $\Omega = 0,8933$, $\xi = 0$)

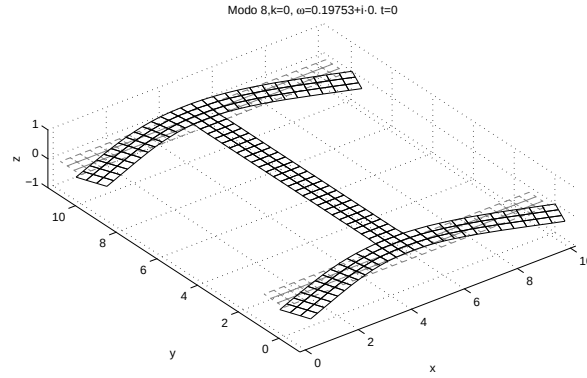


Figura 4.60. Malla deformada para un modo de flexión alrededor del eje x para una barra de sección en I (modo Fx1, $\Omega = 0,1975$, $\xi = 0$)

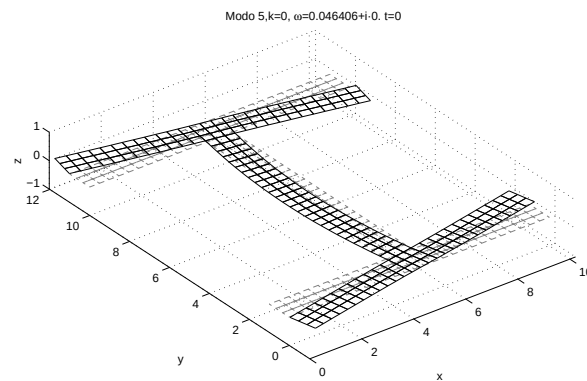


Figura 4.61. Malla deformada para un modo de flexión alrededor del eje y para una barra de sección en I (modo Fy1, $\Omega = 0,0464$, $\xi = 0$)

obtenido con nuestro programa que se representan con línea continua. Hay que destacar que para los modos de torsión y flexión sólo son comparables ambos resultados en un rango de frecuencias $\Omega < 0,5$. Se puede observar como en todas las gráficas ambos resultados son similares, lo cual nos garantiza que la formulación del programa utilizado es correcta y válida para secciones en I.

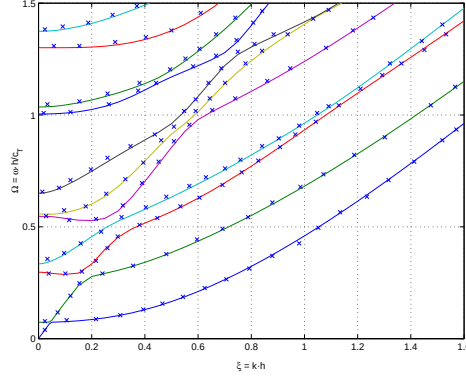


Figura 4.62. Espectro de frecuencia para modos longitudinales en secciones en I

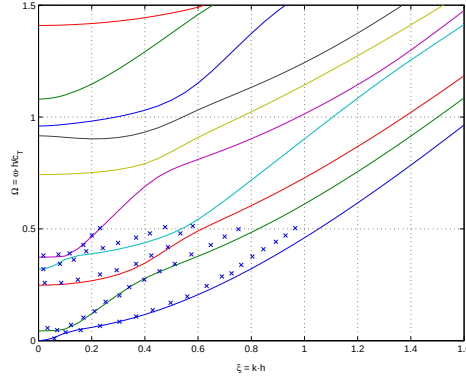


Figura 4.63. Espectro de frecuencia para modos de torsión en secciones en I

4.6. Sección Circular

En este apartado se estudia numéricamente la propagación de ondas guiadas en barras de sección circular macizas y huecas, con un radio exterior $r_{ext} = a$ y un radio interior r_{int} . Se ha estudiado un sector de 90° de dicha sección, y distintas variantes desde la sección llena hasta un tubo hueco de espesor pequeño.

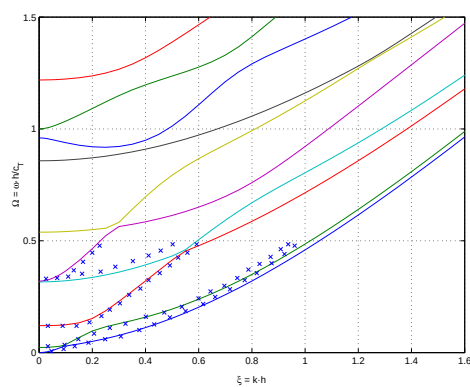


Figura 4.64. Espectro de frecuencia para modos de flexión respecto al eje y en secciones en I

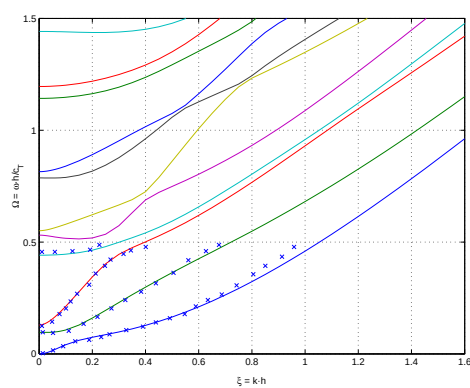


Figura 4.65. Espectro de frecuencia para modos de flexión respecto al eje x en secciones en I

El material tiene un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y a efectos de cálculo, $\rho=1\text{g/cm}^3$, $c_T=1\text{ km/s}$ y $a = 1\text{mm}$. El modelo de Elementos Finitos empleado en esta sección es una malla realizada con el programa de elementos finitos Ansys e importada a Matlab. Cada elemento está formado por cuatro nudos, y en cada nudo tenemos 3 grados de libertad, que son los desplazamientos en las direcciones x , y y z .

Como ya se indicó en la sección 2.5, existen tres tipos de modos de propagación en la sección circular: longitudinal, de torsión y de flexión, que se designan respectivamente como $L(0,j)$, $T(0,j)$ y $F(n,j)$, donde n es el índice de Fourier en dirección circunferencial. Aplicando condiciones de contorno de simetría ($u_n = 0, p_t = 0$) o de antisimetría ($p_n = 0, u_t = 0$) sobre las caras $x = 0$ e $y = 0$ de la malla, se pueden obtener los distintos tipos de modos de propagación en la sección. En la siguiente tabla aparecen todos los tipos de modos:

c.d.c.en $y = 0$	c.d.c.en $x = 0$	Modos
S	S	$L(0,j)$, $F(n,j)$ con n par $F(n,j)$ con n impar $T(0,j)$
S	A	
A	A	

Cuadro 4.3. Tipos de modos en una Sección Circular.

En la tabla 4.4 aparecen reflejados todos los parámetros necesarios para realizar las distintas mallas siguiendo el criterio de mallado [3, 5], donde $m = h/R$ es un parámetro adimensional que mide el grosor de la pared del tubo, $h = r_{ext} - r_{int}$ es el espesor y $R = (r_{ext} + r_{int})/2$ es el radio medio. Además l es la longitud de cada elemento en cada caso y $\Omega_{max,crit}$ es el valor máximo de frecuencia que es válido en cada malla.

m	l/a	$\Omega_{max,crit} = \omega a / c_T$	$\omega h / (c_T \pi)$
2	0.05	12.56	4
1	0.03	20.944	4.44
1/4	0.01	68.8319	4.44
1/30	0.01	68.8319	0.66

Cuadro 4.4. Parámetros de mallado para la sección circular.

Según el valor de m tenemos distintas geometrías, cada una de las cuales tendrá su propio mallado: para $m = 2$ la malla es de una sección circular llena y se puede ver en la figura 4.66, para $m = 1$ tenemos la malla de la figura 4.67, para $m = 1/4$ la malla de la figura 4.68 y por último la malla de espesor más fino corresponde con un valor de $m = 1/30$ y es la de la figura 4.69.

En primer lugar se analiza la sección llena de valor $m = 2$ para la que se han calculado los espectros de frecuencias. Para comprobar la formulación y el

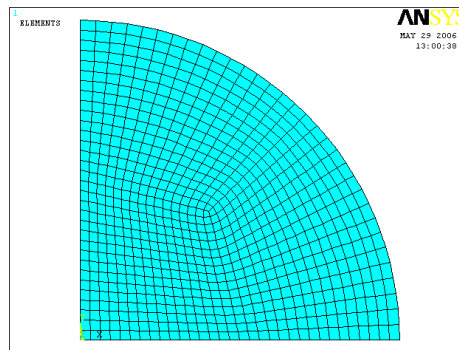


Figura 4.66. Malla de la sección circular con $m = 2$

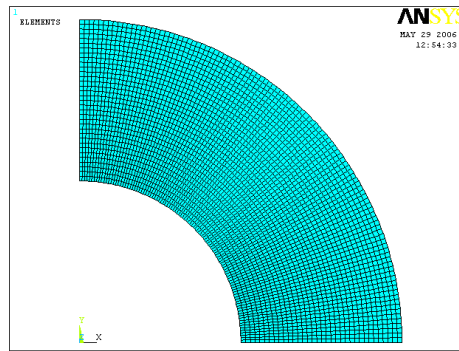


Figura 4.67. Malla de la sección circular con $m = 1$

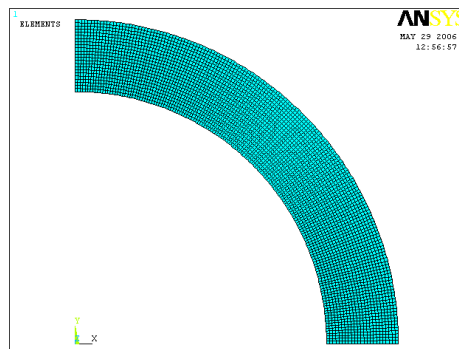


Figura 4.68. Malla de la sección circular con $m = 1/4$

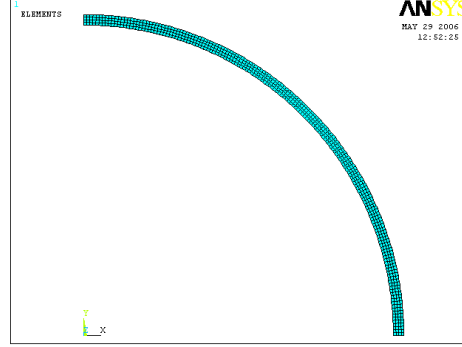


Figura 4.69. Malla de la sección circular con $m = 1/30$

programa realizado para secciones circulares se van a comparar los resultados obtenidos en los espectros de frecuencias para modos reales con los que obtuvo Achenbach [2]. Para ello, en las gráficas 4.70, 4.71 y 4.72, que se corresponden respectivamente con los modos longitudinales, de torsión y de flexión, se superponen los resultados obtenidos por Achenbach, que aparecen reflejados por círculos, con los que se han obtenido con nuestro programa que se representan con línea continua. Se puede observar en dichas gráficas que coinciden ambos resultados, lo cual nos garantiza que la formulación del programa utilizado en el proyecto es correcta y válida para secciones circulares. .

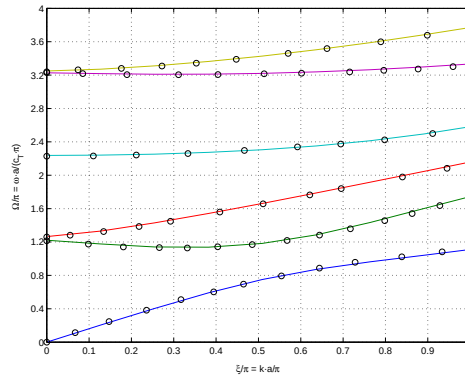


Figura 4.70. Comparación de espectro de frecuencia para modos longitudinales $L(0,j)$ en secciones circulares con $m = 2$

Las figuras 4.73 a 4.79 contienen los espectros de frecuencia en el intervalo $0 \leq \xi/\pi \leq 1,0$ y $0 \leq \Omega/\pi \leq 4,0$, para los casos $n = 1$ y $n = 2$ que corresponden a los modos de flexión $F(1,j)$ y $F(2,j)$, respectivamente. En dichas figuras se

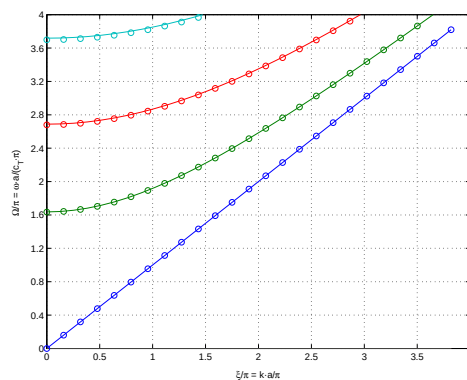


Figura 4.71. Comparación de espectro de frecuencia para modos de torsión $T(0,j)$ en secciones circulares con $m = 2$

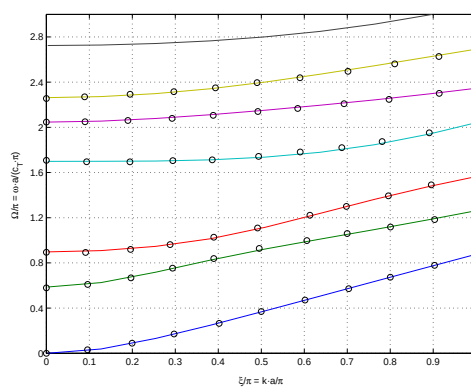


Figura 4.72. Comparación de espectro de frecuencia para modos de flexión $F(1,j)$ en secciones circulares con $m = 2$

ha realizado una comparación de los resultados de nuestro programa con los obtenidos por Denos C.Gazis [6], que aparecen reflejados mediante círculos frente a los líneas continuas de los resultados de nuestro programa. Se observa claramente como los resultados son idénticos en todos los casos, con lo cual el programa utilizado para calcular estas secciones es válido.

Podemos destacar que el espectro de frecuencia para $m = 1/30$ es prácticamente idéntico para los casos $n = 1$ y $n = 2$, excepto para los tres modos más bajos cerca del origen $\xi = \Omega = 0$, los cuales se pueden observar con detalle en la figura 4.76. En la figura 4.80 se representa la curva de dispersión de la velocidad de fase c/c_T frente $kt/(2\pi)$ y se puede observar que c/c_T tiende a cero para $n = 1$, cuyas curvas aparecen en azul, cuando $kt/(2\pi)$ tiende a cero; sin embargo c/c_T tiende a infinito para $n = 2$, cuyas curvas aparecen en verde, cuando $kt/(2\pi)$ tiende a cero. En ambas figuras aparecen en línea discontinua los resultados obtenidos para $n = 1$ y en línea continua los obtenidos para $n = 2$.

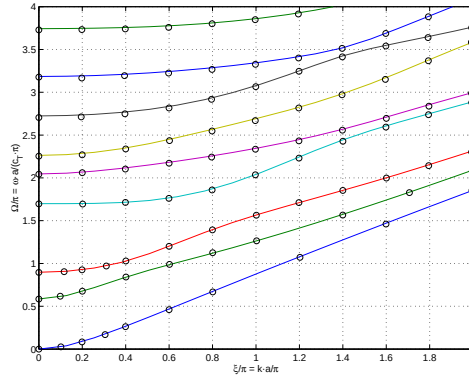


Figura 4.73. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 1$ modos $F(1,j)$ y $m = 2$

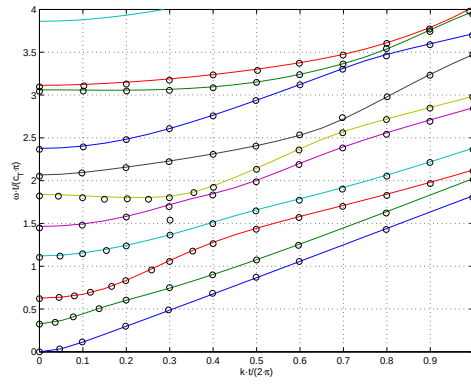


Figura 4.74. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 1$ modos $F(1,j)$ y $m = 1$

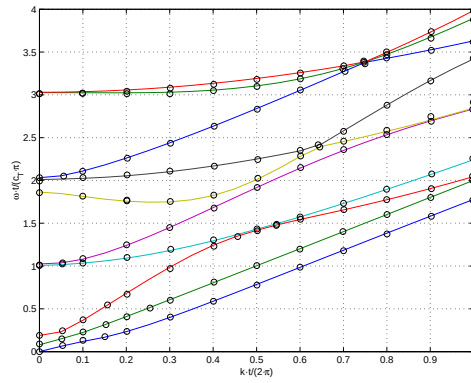


Figura 4.75. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 1$ modos $F(1,j)$ y $m = 1/4$

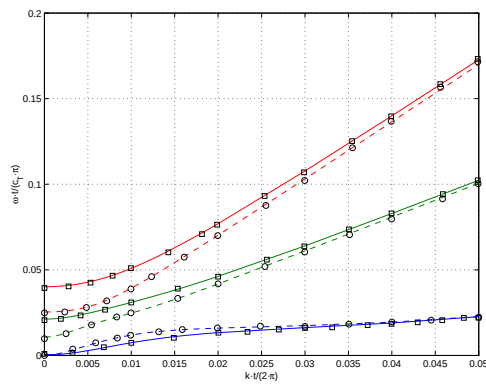


Figura 4.76. Detalle de las tres ramas inferiores del espectro de frecuencia cerca del origen para $n = 1$ y $n = 2$, modos $F(1,j)$ y $F(2,j)$, en el caso $m = 1/30$

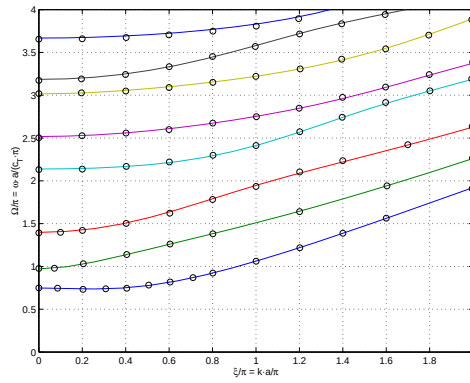


Figura 4.77. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 2$ modos $F(2,j)$ y $m = 2$

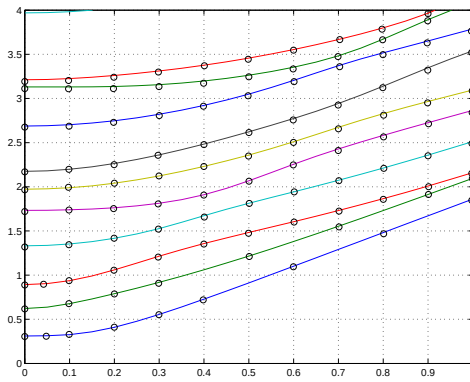


Figura 4.78. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 2$ modos $F(2,j)$ y $m = 1$

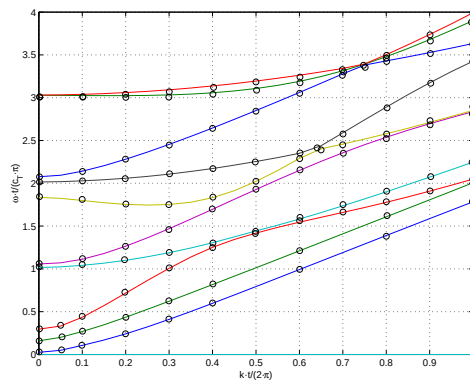


Figura 4.79. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 2$ modos $F(2,j)$ y $m = 1/4$

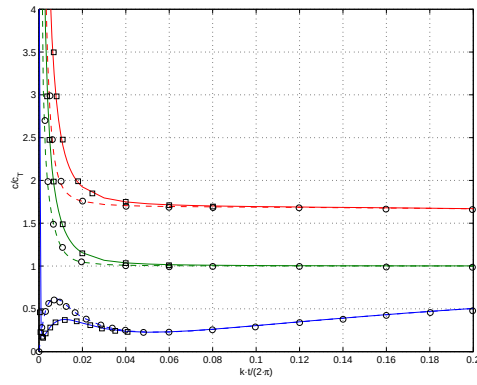


Figura 4.80. Comparación de espectro de frecuencia para $n = 1$ y $n = 2$, modos $F(1,j)$ y $F(2,j)$, en el caso $m = 1/30$

