

#### 4. Comportamiento del PLL cuando se encuentra Sincronizado

Si suponemos que el PLL se encuentra en sincronía con el sistema al que sigue, y que permanece así durante algún tiempo, se podrá llevar a cabo el desarrollo de un modelo matemático lineal para determinar el comportamiento del sistema. Debido a la funcionalidad de nuestro sistema es lógico pensar en la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{\Theta_2(s)}{\Theta_1(s)}$$

Siendo  $\Theta_2(s)$  y  $\Theta_1(s)$  las correspondientes transformadas de Laplace de las fases de las señales de salida y entrada respectivamente.

Para poder asignar una expresión a esta función, denominada Función de Transferencia de Fase, se va a ir estudiando de nuevo cada uno de los bloques que conforman el PLL.

En primer lugar y como ya se ha visto, cuando existe sincronismo, la señal de salida del detector de fases viene dada por

$$U_d \approx K_d q_e$$

Así el modelo matemático del detector de fases es un bloque de orden cero cuya ganancia nos proporciona la función de transferencia de fase de éste

$$K_d = \frac{U_d(s)}{\Theta_e(s)}$$

Para el caso del filtro su función de transferencia es conocida, y será diferente para cada uno de los tres casos comentados en el apartado anterior, para trabajar de manera genérica se denota como  $F(s)$ .

A continuación se analiza que sucede con el Oscilador, como ya sabemos, la frecuencia de la señal de salida generada por éste viene dada por

$$w_2(t) = w_o + \Delta w_2(t) = w_o + K_o U_f(t)$$

Si se supone que nuestra señal de entrada inicialmente posee una frecuencia  $\omega_o$ , y que para un instante determinado  $t$ , está varía bruscamente

$$U_1(t) = U \sin(w_o t + \Delta w \cdot t) = U \sin(w_o t + q_1) \quad \text{siendo } q_1(t) = \Delta w \cdot t$$

Extrapolando esta definición de fase para la señal de salida se tendrá entonces que

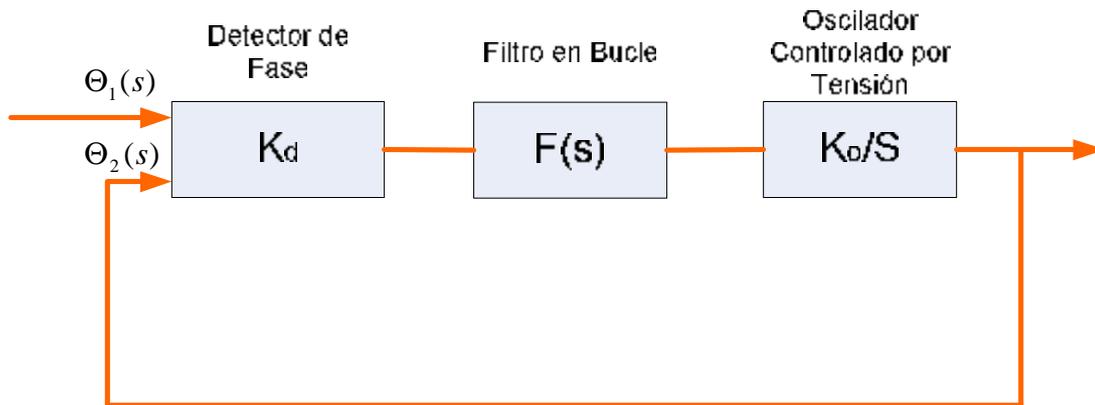
$$q_2(t) = \int \Delta w_2(t) dt = K_o \int U_f(t) dt$$

Pasando esto al dominio de Laplace se obtiene la función de transferencia del oscilador

$$\frac{\Theta_2(s)}{U_f(s)} = \frac{K_o}{s}$$

Como se ve el oscilador representa a un integrador.

Una vez vista la función de transferencia de cada uno de los bloques que conforman el PLL, se está en disposición de obtener la función el mismo. Se recuerda que no se está teniendo en cuenta el bloque correspondiente al divisor de frecuencias. De esta manera el diagrama de bloques del sistema tratado queda como se ve en la Figura 24.



**Figura 1. Diagrama de bloques de un PLL**

A la vista del esquema anterior se puede deducir que

$$H(s) = \frac{\Theta_2(s)}{\Theta_1(s)} = \frac{K_o K_d F(s)}{s + K_o K_d F(s)}$$

En ocasiones es útil definir la función de transferencia del error la cual viene dada por  $H_e(s) = 1 - H(s)$ , Figura 26. Como ya se ha dicho,  $F(s)$  dependerá del filtro escogido.

Una vez introducida dicha función en la expresión de  $H(s)$ , ésta última aparecerá como una función de segundo orden, en la cual asemejando su denominador al de la estándar nos permitirá obtener valores característicos del sistema como  $\omega_n$ , frecuencia natural y  $\zeta$ , factor de amortiguamiento, en función de la ganancia de cada bloque y del polo y el cero del filtro.

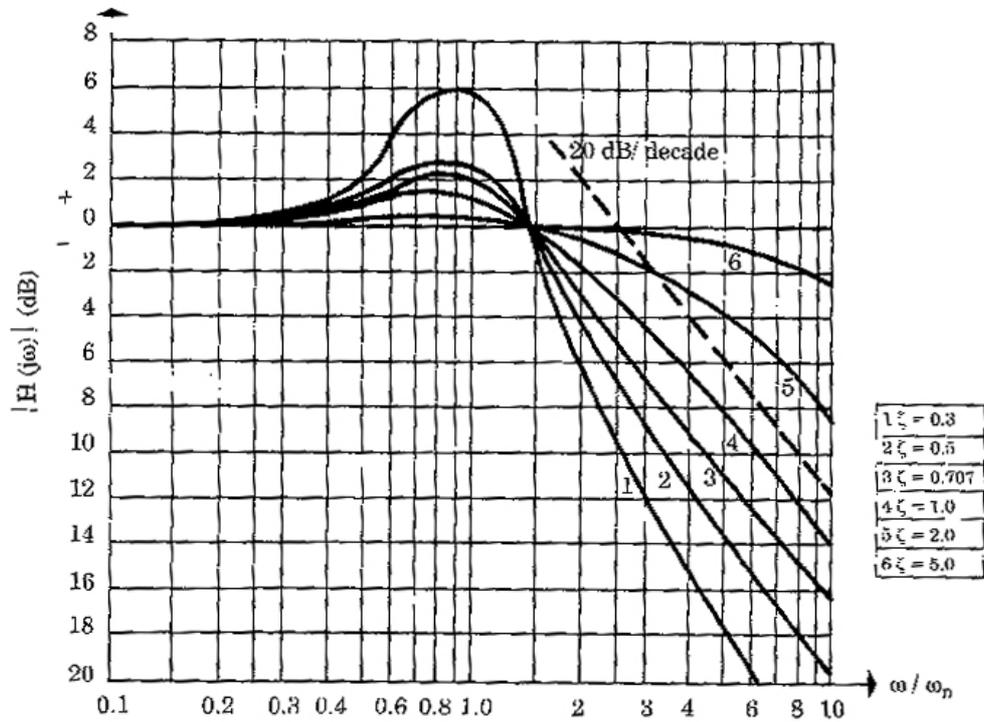


Figura 2. Diagrama de Bode de la función de transferencia de la fase  $H(\omega)$

Viendo el diagrama de Bode de  $H(s)$ , respecto de la frecuencia de la señal de entrada normalizada respecto de la natural, para distintos valores de factor de amortiguamiento, Figura 25, se observa que efectivamente existe un comportamiento de filtro de segundo orden para la fase de la señal de entrada  $q_1(t)$ , cuyo espectro de frecuencia es plano desde cero hasta aproximadamente la frecuencia natural  $\omega_n$ . Lo que implica que un PLL de segundo orden es capaz de seguir en fase y frecuencia variaciones en la señal de entrada, más o menos desde cero hasta la frecuencia natural.

Por otro lado el factor de amortiguamiento nos marcará el comportamiento dinámico del PLL. Se puede observar que la función es lo más plana posible cuando  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  que corresponde a un filtro paso-bajo de segundo orden de Butterworth.

Si se representa  $H_c(s)$  para un factor de amortiguamiento aproximadamente igual a 0.707, se ve que para frecuencias menores que la natural el error en fase es relativamente pequeño, mientras que para grandes frecuencias el error entre fases llega a ser tan grande como  $q_1$ , y por tanto incapaz de llevar acabo el seguimiento en fase.

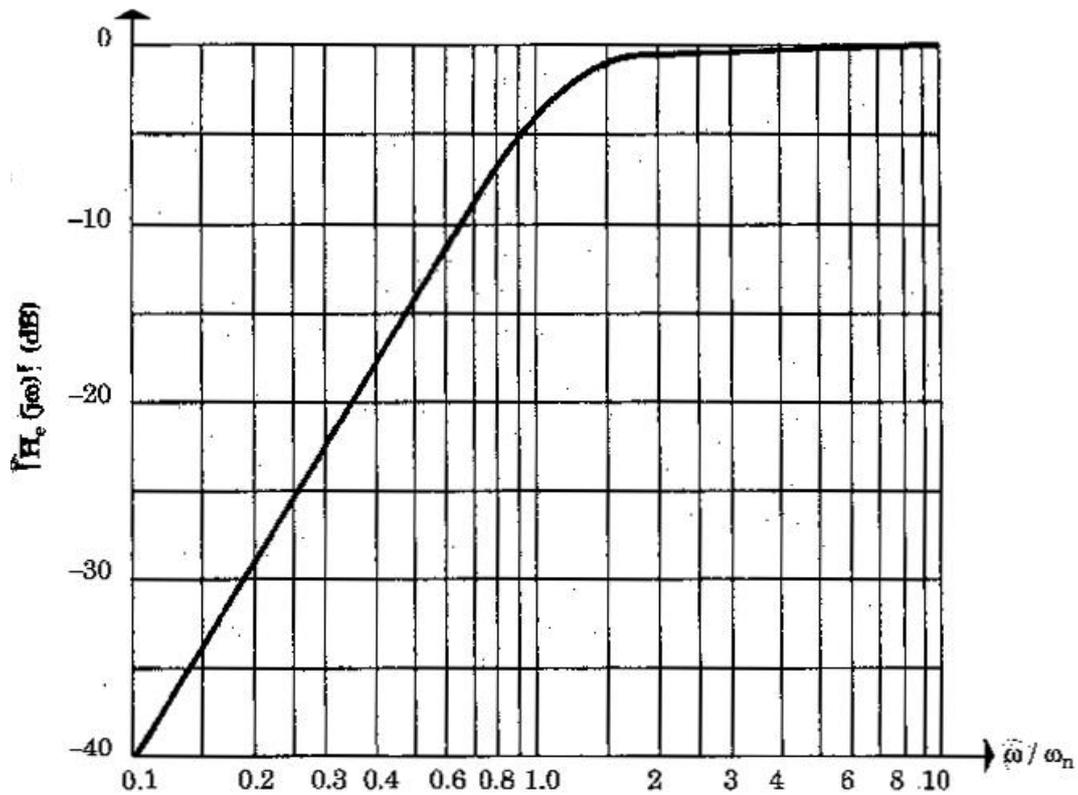


Figura 3. Diagrama de Bode de la función de transferencia del error  $H_e(\omega)$

Se define el ancho de banda del PLL como aquella frecuencia para la que existe una atenuación de 3dB, lo que para el factor de amortiguamiento anteriormente comentado, el valor aproximado de ésta es dos veces la frecuencia natural.

Por último recordar, que todo este análisis ha sido llevado a cabo a partir de la suposición de que el PLL se encontraba “locked” y por tanto empleando un modelo lineal. Sin embargo si se parte de un estado de no sincronismo el error entre fases puede ser muy elevado invalidando el modelo anterior, pues entonces el detector de fases no tendrá una función lineal.

#### 4.1 Transitorios del PLL en estado de sincronismo

Las excitaciones más comunes, a la hora de estudiar la respuesta transitoria del PLL pueden ser:

- Un escalón en la fase
- Un escalón en la frecuencia
- Una rampa en la frecuencia

aplicadas en la señal de referencia.

##### 4.1.1 Escalón en la fase de la señal de referencia

Supongamos que para un determinado instante  $t$ , la fase de la señal de referencia sufre un escalón, en este caso ésta vendrá dada por

$$q_1(t) = U(t)\Delta\Phi$$

Donde  $U(t)$  es el escalón unidad e  $\Delta\Phi$  es el tamaño del mismo. Si se realiza la transformada de Laplace de la expresión anterior

$$\Theta_1(s) = \frac{\Delta\Phi}{s}$$

Y puesto que el error entre fases en el dominio de la frecuencia se puede obtenerlo del producto entre  $H_e(S)$  y  $\Theta_1(S)$ , se tendrá entonces que

$$\Theta_e(s) = H_e(s)\Theta_1(s) = H_e(s)\frac{\Delta\Phi}{s} = \frac{\Delta\Phi}{s} \frac{s^2}{s^2 + 2sZW_n + W_n^2}$$

Aplicando el teorema del valor final se ve que el error tiende a cero

$$\Theta_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_e(s) = 0$$

#### 4.1.2 Escalón en la frecuencia de la señal de referencia

Si se produce un escalón en la frecuencia de la señal de referencia, la frecuencia angular de dicha señal quedará como

$$w_1(t) = w_o + \Delta w \cdot U(t)$$

Como  $q_1(t)$  es la integral de la variación de frecuencia, se tiene que

$$q_1(t) = \Delta w \cdot t$$

Es decir la fase varía ahora como una rampa, lo que según su transformada de Laplace, en el dominio de la frecuencia se tiene

$$\Theta_1(s) = \frac{\Delta w}{s^2}$$

Con lo que de nuevo se puede definir el valor del error en función de  $s$

$$\Theta_e(s) = \frac{\Delta w}{s^2} \frac{s^2}{s^2 + 2sZW_n + W_n^2}$$

Si ahora se aplica el teorema del valor final se ve que el error tiende a cero.

#### 4.1.3 Rampa en la frecuencia de la señal de referencia

Siguiendo el mismo procedimiento que en los dos apartados anteriores, se llega a una expresión para el error cuando aplicamos el teorema del valor final tal que

$$q_e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_e(s)\Theta_1(s) = \frac{\Delta\omega}{\omega_n^2}$$

Hay que recordar que el modelo lineal no es válido para grandes errores en fase, sin embargo la señal del detector de fases es siempre proporcional al seno del error, de esta manera

$$\sin q_e(\infty) = \frac{\Delta\omega}{\omega_n^2}$$

Como el seno no excede el valor unidad, se tiene que

$$\Delta\omega_{\max} = \omega_n^2$$

Lo cual nos lleva a:

- Si la frecuencia de referencia sufre rápidamente una variación mayor que  $\omega_n^2$  el sistema perderá la sincronización.
- Si el PLL está inicialmente fuera de sincronía, éste no será capaz de sincronizarse si la frecuencia de referencia sufre rápidamente una variación mayor que  $\omega_n^2$  el sistema perderá la sincronización.

En la práctica, el valor límite mencionado para  $\Delta\omega_{\max}$  no llega a alcanzarse por lo general. Por ejemplo, si la frecuencia de referencia es barrida en presencia de ruido, el valor que inicialmente provoca una pérdida de sincronismo del PLL es mucho menor que  $\omega_n^2$ . En la mayoría de los casos  $\Delta\omega_{\max} = \frac{\omega_n^2}{2}$ .

