

5. Comportamiento del PLL cuando no se encuentra Sincronizado

Ya ha sido tratado el tema del modelo matemático lineal cuando el PLL se encuentra sincronizado. Cuando no se encuentra en dicho estado, el modelo es más complejo y pierde dicha linealidad. Desarrollemos por tanto un nuevo modelo matemático que sea funcional en este caso. Para llevarlo a cabo y para una mejor comprensión de lo que sucede en el sistema se va a realizar una analogía mecánica, la cual, deberá ayudarnos a contestar las siguientes cuestiones:

- ¿Bajo qué condiciones el PLL será capaz de alcanzar el sincronismo?
- ¿Cuánto tiempo necesita para llevar a cabo tal proceso?
- ¿Bajo qué condiciones el PLL deja de estar sincronizado?

5.1 Modelo matemático para el caso en el que no exista sincronismo

El modelo matemático del PLL, depende mucho del tipo de filtro y del detector de fases que se emplee. Para llevar a cabo la analogía anteriormente citada, nos conviene tomar un multiplicador de fases como detector de la misma y un filtro pasivo retardo-adelanto como Loop Filter. Configurando ambos bloques de esa manera, la ecuación no lineal que se obtiene es análoga a la del siguiente sistema mecánico

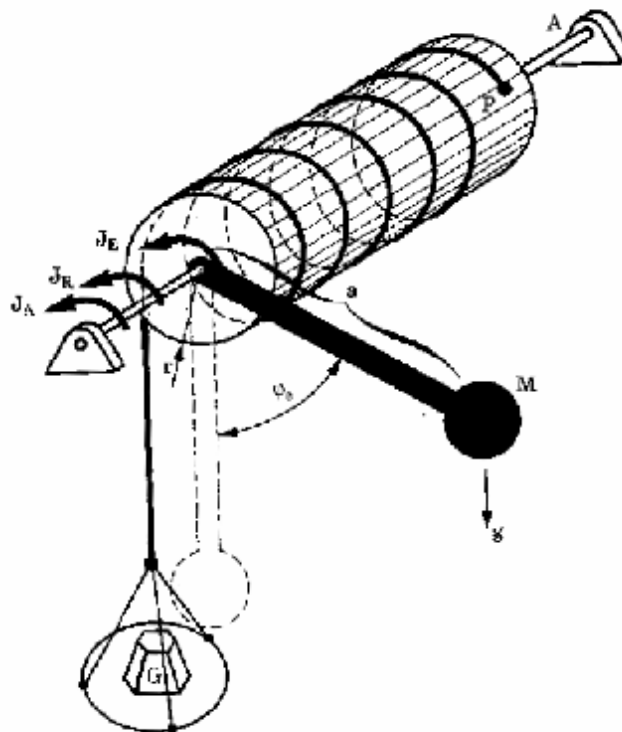


Figura 1. Analogía mecánica para la comprensión del comportamiento del PLL

Como se puede ver en la Figura 27, una barra de masa M está rígidamente unida al eje de un cilindro que puede rotar libremente alrededor de éste. En el sistema posee una

cuerda atada a un determinado punto P de la superficie del cilindro y que se enrolla varias veces sobre el mismo. Al final de ésta, la cual cae libremente, se encuentra una plataforma donde se puede colocar peso. Si sobre ella no se coloca ninguna masa se asume que la barra está en posición vertical siendo $j_e = 0$. Al colocar cierto peso G sobre la plataforma, el péndulo comenzará a girar y se irá hacia una nueva posición dada por el ángulo j_e .

La respuesta dinámica del sistema anteriormente definido puede ser obtenida mediante la tercera ley de Newton:

$$Tj_e = \sum_i J_i$$

Siendo T el momento de inercia de la barra y el cilindro, j_e el ángulo de giro del péndulo y J_i el conjunto de pares que actúan sobre el sistema, estos serán, el generado por la gravedad tanto en sobre la barra como sobre el peso G colocado en la plataforma y el de fricción.

Trabajando sobre ambos sistemas, el eléctrico y el mecánico se llega a dos ecuaciones que normalizadas para un sistema de segundo orden quedan de la forma

$$\ddot{q}_e + 2zw_n\dot{q}_e \cos q_e + w_n^2 \sin q_e = \ddot{q}_1 + \dot{q}_1 \frac{w_n^2}{K_o K_d} \Rightarrow \text{Para el PLL}$$

$$j_e + 2zw_n\dot{j}_e + w_n^2 \sin j_e \approx G(t) \Rightarrow \text{Para el Péndulo}$$

A la vista de esto, se puede decir que entre ambas ecuaciones existe una sutil diferencia que no es otra que el segundo término de ambas expresiones. Mientras que para el Péndulo el coeficiente de este término es constante en el PLL varía con el $\cos q_e$. Para llevar a cabo la analogía, este segundo sumando, debería comportarse de igual manera en ambos casos, es decir, el factor de amortiguamiento, ζ , en la segunda ecuación debería de variar con el $\cos j_e$.

Esto realmente es difícil de asumir, ya que si se piensa en la expresión dada para el péndulo, el segundo término representa la fricción del sistema, y admitir un comportamiento parecido al del $\cos j_e$ implicaría tolerar la existencia de fricciones negativas.

Se supondrá que sobre la plataforma se coloca un peso G lo suficientemente grande como para que en el caso en el que la cuerda fuese infinita el péndulo girase para siempre alrededor de su eje. Además, el par ejercido por la barra sobre el péndulo no es constante. Cuando la barra recorre la mitad inferior de su circunferencia $\left(-\frac{p}{2} \leq j_e \leq \frac{p}{2}\right)$, su velocidad angular media es mayor que cuando recorre su mitad superior, $\left(\frac{p}{2} \leq j_e \leq \frac{3p}{2}\right)$. El par de fricción medio sobre la semicircunferencia inferior, positivo, es mayor, en magnitud, que el par de fricción “negativo” sobre la superior. De este modo se tiene que el par en un ciclo completo es positivo y por tanto se puede asumir la variación de ζ como el $\cos j_e$.

Por tanto se puede establecer la analogía:

- El error de fases q_e del PLL se corresponde con el ángulo de desviación del péndulo.
- La frecuencia natural w_n del PLL se corresponde la frecuencia natural del péndulo.
- El factor de amortiguamiento del PLL se corresponde con el proveniente del término de la viscosidad en el sistema mecánico.
- El peso G que se coloca sobre la plataforma se corresponde a una perturbación sobre la fase en la señal de referencia. De acuerdo con la relación

$$\ddot{\phi}_1 + \dot{\phi}_1 \frac{w_n^2}{K_o K_d} \approx G(t)$$

De la definición de fase se tiene que $q = \Delta\omega \cdot t$ por tanto

$$\Delta\ddot{\phi} + \Delta\omega \frac{w_n^2}{K_o K_d} \approx G(t)$$

Es decir, el peso ubicado sobre la plataforma es equivalente a la suma del offset de frecuencia y a su variación.

A continuación se verá como evoluciona el sistema para distintos pesos G , es decir, para distintas perturbaciones en la frecuencia.

El caso trivial sería la no existencia de peso. En esta situación, el péndulo permanece en posición vertical, $j_e = 0$. Esto corresponde al PLL funcionando en su frecuencia central ω_o

offset de frecuencia y con un error de fase nulo.

¿Qué sucede si a la señal de referencia le cambia lentamente su frecuencia?, si esto es así entonces $\Delta\ddot{\phi}$ es despreciable. En nuestro sistema mecánico esto equivale a ir incorporando peso a la plataforma de manera muy lenta

$$G(t) \approx \frac{w_n^2}{K_o K_d} \Delta\omega$$

El péndulo comenzará a moverse, dejando la posición vertical inicial siendo por tanto $j_e \neq 0$, lo que implica que para el PLL aparecerá un error finito entre fases.

Para pequeñas variaciones en la frecuencia de referencia el error entre fases será proporcional a $\Delta\omega$. Cuando el desplazamiento de la frecuencia alcanza cierto valor denominado “rango de agarre” (Hold Range), la desviación del péndulo es de $\frac{p}{2}$. Esta

posición es el límite de estabilidad estática. Con la más mínima perturbación el péndulo volcaría y suponiendo que fuese posible giraría para siempre alrededor de su eje, incrementando en $2p$ el valor de j_e en cada vuelta, tendiendo por tanto el error entre fases a infinito. Este caso sería aquel en el que el PLL no es capaz de llevar a cabo el seguimiento de fase y se perdería la sincronización

Se estudia ahora el caso en el que se produce un escalón en la frecuencia de la señal de referencia. Si un escalón de tamaño $\Delta\omega$ se efectuara en un instante $t = 0$, se tendría entonces que

$$w_1(t) = w_o + \Delta w \cdot u(t)$$

La derivada primera de el incremento de frecuencia viene dada por $\Delta\omega(t) = \Delta w \cdot d(t)$.

A la vista de esto, el peso $G(t)$ a colocar en la plataforma debe simular un escalón y un impulso. Para llevar esto a cabo se deja caer cierta masa desde una distancia determinada, si el choque entre ésta y la plataforma se realiza de manera elástica, el péndulo mostrará una respuesta transitoria principalmente en forma de oscilación amortiguada. Si el peso lanzado es relativamente pequeño, la desviación final del péndulo será la misma que si la deposición se hubiera llevado a cabo de manera paulatina. A pesar de que el péndulo no sufra una fuerte sobreamortiguación, la variación máxima del ángulo j_e es mucho mayor que el valor final del mismo. Cuando la masa lanzada es lo suficientemente grande como para que la desviación máxima exceda los 90° pero no los 180° , la posición final del péndulo estará por debajo de $\frac{p}{2}$.

Esto no lleva a la conclusión de que un PLL lineal, hay que recordar que se está empleando como detector de fases el multiplicador, puede funcionar correctamente cuando de forma eventual el error de fases excede los 90° .

Si por el contrario el pico de desviación excede los 180° el péndulo volcará y realizará un número de vueltas alrededor de su eje, tras éstas, es posible que permanezca inmóvil.

Si este análisis se hubiera llevado a cabo de manera cuantitativa se observaría que el peso que representa el límite del rango de agarre es mucho mayor que el que produce la pérdida de la sincronización. A la vista de esto se va a definir un nuevo valor límite para la variación de frecuencia, pull-out range. Aquel desvío de la frecuencia que produce la pérdida de sincronismo, cuando es aplicado como escalón recibe el nombre de pull-out range. Éste último es mucho menor que el hold range y puede ser considerado como un límite de estabilidad dinámica permaneciendo el PLL sincronizado siempre y cuando éste último no sea excedido.

Existe una última causa por la cual se puede perder la sincronización con nuestro sistema. Si la frecuencia de la señal de referencia incrementa de forma lineal con el tiempo,

$$\Delta\omega(t) = \Delta\omega \cdot t$$

Siendo $\Delta\omega$ el grado de variación de la frecuencia. Si se piensa en la analogía mecánica realizada esto último equivaldría a que el peso $G(t)$ fuese aumentando de forma lineal con el tiempo. Este caso ya había sido visto en secciones anteriores y se sabe que $\Delta\omega < \omega_n^2$.

Con estos tres ejemplos se puede sacar conclusiones sobre que condiciones son necesarias para que el PLL mantenga el seguimiento de fase

- La frecuencia de la señal de referencia debe permanecer dentro del hold range.
- El máximo valor del escalón de frecuencia tolerado es menor que pull-out range.
- El grado de variación de la frecuencia debe ser menor que el cuadrado de la ω_n .

Ahora cabe preguntarnos, una vez perdido el sincronismo, si reestablecen los valores dentro de los rangos adecuados ¿se conseguirá obtener un buen funcionamiento del PLL?. La respuesta es No. Si la frecuencia excede el hold range, de nada serviría eliminar peso de la plataforma para reubicar la frecuencia dentro de un rango aceptable,

pues la energía cinética del péndulo será tan elevada que no tendrá efecto dicha disminución. Incluso, en ausencia de fricción, si se eliminara todo el peso de la barra, ésta seguiría girando indefinidamente.

Pero la fricción existe, y esto se traduce a que en el PLL el error de fase crecerá más lentamente si se lleva la frecuencia de referencia hacia otro valor crítico, frecuencia pull-in. Si la pendiente de la media del error de fase disminuye, la frecuencia del oscilador ω_2 estará cada vez más cercana a la de referencia, produciéndose finalmente la sincronización.

De nuevo la frecuencia de pull-in, es mucho menor que el hold range. El proceso de pull-in es excesivamente lento.

Se puede demostrar que el péndulo puede ser dejado inmóvil en una vuelta si el peso es críticamente reducido hasta un determinado valor. Esto implica que el PLL puede recuperar su sincronismo de una manera mucho más rápida que la aportada por el pull-in. Para ello solo se tiene que reducir la frecuencia hasta un valor crítico denominado lock range. Este último proceso aunque es mucho más rápido es mucho más limitado, siendo más amplio el rango de recuperación del pull-in.

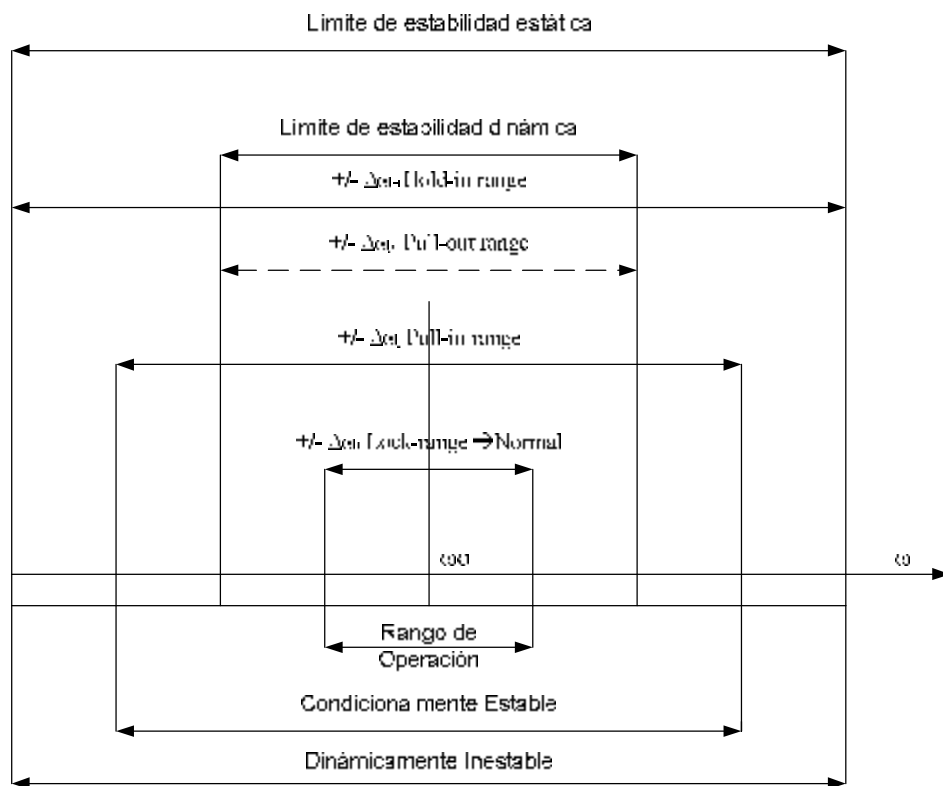


Figura 2. Límites estáticos y dinámicos de estabilidad de un PLL lineal de segundo orden

Por tanto para trabajar con un PLL se deben tener en cuenta cuatro parámetros clave,

- Hold range $\Delta\omega_H$. Rango de frecuencias en el que el PLL puede mantener estáticamente el seguimiento de la fase. Se puede considerar que el PLL es solidamente estable sólo dentro de este rango.
- Pull-out range $\Delta\omega_{po}$. Es el límite dinámico de estabilidad del PLL. Si el seguimiento se pierde dentro de este rango, el PLL podrá recuperar el sincronismo de nuevo, proceso que puede ser lento si se lleva a cabo mediante un proceso de pull-in.
- Lock range $\Delta\omega_L$. Rango de frecuencia para el que el bloqueo del PLL se realiza de una sola vez.

- $\Delta\omega_L < \Delta\omega_{po} < \Delta\omega_p < \Delta\omega_H$
- Se deben añadir dos nuevos elementos que derivan de los anteriores, estos son T_L y T_p . Tiempo que tarda el PLL en recuperar el sincronismo en el caso de un proceso Lock-in o un proceso pull-in, respectivamente.

El propósito del PLL que aquí se presenta no es otro que el de conseguir la sincronización con la red. Como al menos una de las entradas al detector de fases va a ser la medida de tensión de la red, y aunque ésta sea posteriormente muestreada, en principio es una señal analógica. Es por ello que se haya optado por la implementación de un LPLL sobre el SPLL. Hay que recordar de la sección en la que se vieron los diferentes tipos de detectores de fases, que el Multiplicador de fases, es tan sólo empleado por el LPLL a causa de que la señal de referencia del mismo es una onda sinusoidal, es por ello que se haya optado por la programación de este tipo de detector en el software del SPLL.

En este caso sólo nos queda una opción para el detector de fases, la cual no es otra que el empleo de un multiplicador de fases para la constitución de dicho bloque.

Con esta elección los valores de los parámetros anteriormente estudiados, en función de la ganancia de los distintos bloques y del polo y cero del filtro, vienen dados por

Parámetro	Loop Filter		
	Pasivo	Activo	PI
Frecuencia Natural ω_n	$\sqrt{\frac{K_o K_d}{t_1 + t_2}}$	$\sqrt{\frac{K_o K_d K_a}{t_1}}$	$\sqrt{\frac{K_o K_d}{t_1}}$
Factor de amortiguación ζ	$\frac{w_n}{2} (t_2 + \frac{1}{K_o K_d})$	$\frac{w_n}{2} (t_2 + \frac{1}{K_o K_d K_a})$	$\frac{w_n t_2}{2}$
Hold Range $\Delta\omega_H$	$K_o K_n$	$K_o K_n K_a$	∞
Lock Range $\Delta\omega_L$	-	$\approx 2z w_n$	-
Lock Time T_L	-	$\approx \frac{2p}{w_n}$	-
Pull-in Range $\Delta\omega_p$	$\frac{4\sqrt{2}}{p} \sqrt{z w_n K_o K_d}$	$\frac{4\sqrt{2}}{p} \sqrt{z w_n K_o K_d}$	-
Pull-in Time T_p	$\approx \frac{p^2}{16} \frac{\Delta w_o^2}{z w_n^3}$	$\approx \frac{p^2}{16} \frac{\Delta w_o^2 K_a}{z w_n^3}$	$\approx \frac{p^2}{16} \frac{\Delta w_o^2}{z w_n^3}$
Pull-out Range $\Delta\omega_{po}$	-	$\approx 1.8 w_n (z + 1)$	-

Tabla 1. Parámetros de diseño de un PLL de segundo orden

La magnitud **hold range** $\Delta\omega_H$, se obtiene calculando aquella frecuencia que hace que el error en frecuencia sea máximo. Para el caso que nos preocupa, esto es, multiplicador como detector de fases, se tendrá que ver para que valor de la frecuencia de la señal de entrada el error de fases es de $\frac{p}{2}$. El máximo valor que puede tomar ω_1 viene dado por

$$w_1 = w_o + \Delta w_H$$

Y por tanto la fase de la onda será $q_1(t) = \Delta w_H \cdot t$, siendo su transformada de Laplace $\Theta_1(s) = \frac{\Delta w_H}{s^2}$. Con esta última expresión y la función de transferencia del error se

puede determinar a que tiende el error y ver para qué valor de la frecuencia se hace máximo.

A continuación se determinará el valor del **lock range** $D\omega_L$ y su tiempo de bloqueo T_L . Para determinar el primero de ellos se asume que el sistema no está sincronizado, suponiendo la misma forma de onda que se supuso al comienzo de capítulo para las señales de entrada al multiplicador, esto es

$$U_1(t) = U_{10} \sin(\omega_o + \Delta\omega t)$$

$$U_2(t) = U_{20} \text{rect}(\omega_o t)$$

Al llevar a cabo el producto de las dos señales y su paso por el filtro nos encontramos con que

$$U_f(t) = K_d |F(\Delta\omega)| \sin(\Delta\omega t)$$

Señal ac que provoca la modulación de frecuencia del VCO. Siendo $F(\Delta\omega)$ la función de transferencia del filtro. El pico de la desviación de ésta será $K_o K_d |F(\Delta\omega)|$. Como se ve en la Figura 29, cuando $\Delta\omega$ sea $\Delta\omega_L$ se produce el bloqueo instantáneo.

Por otro lado $T_L = \frac{2p}{\omega_n}$.

Se va a estimar a continuación el valor del **pull-in range** $D\omega_p$ y del **pull-in time** T_p .

Supongamos que el PLL inicialmente no se encuentra sincronizado y que el VCO está operando a la frecuencia central ω_o . La señal media de salida del detector de fases será un seno de frecuencia $\Delta\omega$. Se asume también que ésta última es lo suficientemente grande como para que no pueda producirse un proceso de Lock-in. En el filtro la señal media de salida del detector de fases será atenuada. Si $u_f(t)$, emitida por el éste último, fuese un seno perfecto su media sería cero y por tanto el VCO permanecería indefinidamente trabajando en su frecuencia media ω_o , con lo que nunca se daría el pull-in.

Afortunadamente, se ha pasado por alto el hecho de que la diferencia entre la frecuencia de la señal de salida del oscilador y la de referencia no es constante. Si ω_2 es modulada en sentido positivo (pendiente positiva), la diferencia de frecuencias entre las dos ondas alcanza un valor mínimo $\Delta\omega_{\min}$ y viceversa, al hacerse en sentido negativo se llega a $\Delta\omega_{\max}$, siendo esta última mayor que la primera. $\Delta\omega(t)$ no es constante, siendo el semiciclo positivo de mayor duración que el negativo, como se observa en la Figura 30, esto hace que en media la frecuencia de salida tienda a la de la onda referente. La asimetría de ω_2 depende en gran medida del valor del desplazamiento de la frecuencia, $\Delta\omega$. La asimetría será mayor cuanto menor sea el valor del offset.

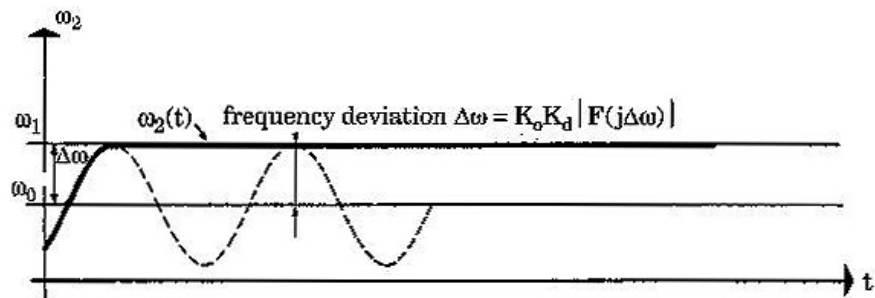
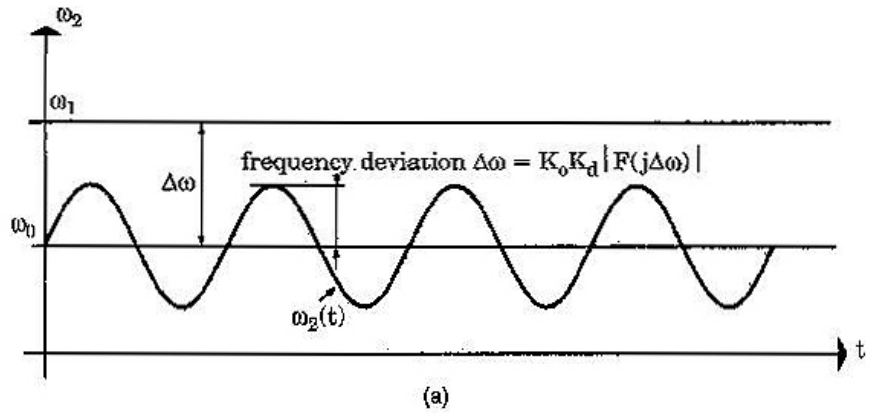


Figura 3. Proceso Lock-in

(a) El pico de la desviación de frecuencia es menor que el Offset $\Delta\omega$, por ello no se puede alcanzar un bloque rápido. (b) El pico de frecuencia es del tamaño del Offset por lo que se alcanza el bloque de manera rápida.

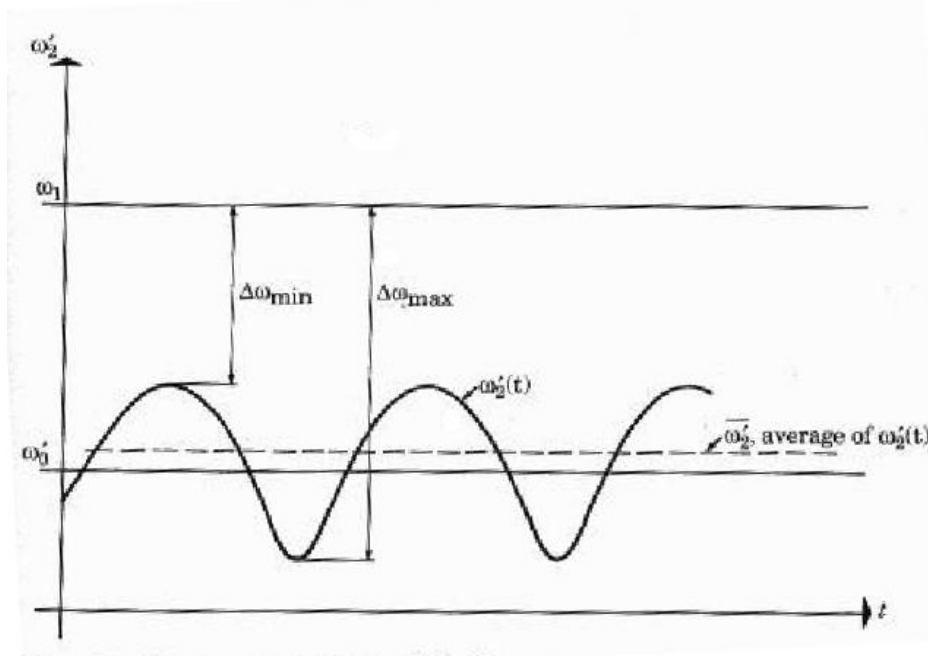


Figura 4. Onda del VCO cuando no existe sincronismo

En el estado de no sincronismo la frecuencia modulada por el VCO es una señal no armónica. Esto provoca que el valor medio de la frecuencia del VCO se dirija hacia la referencia.

Como se ve este proceso es regenerativo, cuanto más se acerque la señal a la de referencia, menor será $\Delta\omega$ y por tanto más asimétrica será la onda, tendiendo durante más tiempo al valor $\Delta\omega_{\min}$ y por tanto acercándose más al valor ω_1 lo que hace que de

nuevo $\Delta\omega$ disminuya...de esta manera se observa que la frecuencia de la señal de salida del VCO tiende a la de entrada. El tiempo T_p depende del filtro escogido.

Antes de finalizar este capítulo se estudiará el último de los parámetros vistos, **pull-out range**, $\Delta\omega_{po}$. Éste es por definición el valor del escalón de frecuencia que provoca la pérdida de sincronización con el sistema en el caso de ser aplicado a la señal de referencia. Para el caso del LPLL, no es posible calcular un valor exacto para este parámetro pero se puede obtener una aproximación de las simulaciones, esto es, $\Delta\omega_{po} \approx 1.8\omega_n(z+1)$. En la mayoría de los casos prácticos se tiene que $\Delta\omega_L < \Delta\omega_{po} < \Delta\omega_p$.