Capítulo 4

Modelo DEA Centralizado con Establecimiento de Objetivos Parciales a Alcanzar

1. INTRODUCCIÓN

Tal y como se ha visto en capítulos anteriores, los modelos tradicionales buscan la eficiencia de todas las unidades productivas de forma individual, no incluyendo restricciones de tipo colectivo. Sin embargo, a veces se presentan situaciones en las que sería deseable incorporar tal circunstancia.

Asimismo, en la realidad empresarial, en toda compañía se fijan objetivos a conseguir, siendo éstos alcanzables en algunos casos y no alcanzables a priori en otros. Por ello, sería conveniente desarrollar un modelo que incorporara todas estas particularidades.

Situémonos, por ejemplo, en el caso de una entidad bancaria, en la que cada sucursal correspondería a una unidad productiva, con unas entradas que serían los gastos, y unas salidas correspondientes a las ganancias. Cada una de estas sucursales tiene diferentes expectativas y objetivos para el futuro inmediato. Por ejemplo, mientras que una sucursal tiene un nivel de créditos insuficientes, y su objetivo es aumentar dicha salida, otras sucursales pueden estar más preocupadas por el nivel de gastos que se está experimentando. El conocimiento del negocio y de la situación de los competidores puede permitir el establecimiento de los niveles de mejora en aquellas variables preocupantes, como por ejemplo la reducción en un 20% del coste de personal en la sucursal en un futuro.

En tal circunstancia, el modelo tradicional trataría de aumentar al máximo las salidas y minimizar en lo posible las entradas, sin tener en cuenta que pueden existir unos objetivos a alcanzar para determinadas variables.

La situación descrita para las entidades bancarias es extensible a otras situaciones. Un caso similar al anterior se puede observar en la gestión de los hospitales por parte de la administración pública. En un hospital puede ser objetivo reducir el número de operaciones, manteniendo constantes las entradas (número de médicos, presupuesto asignado, etc.). Del conocimiento de la actividad desarrollada, un hospital puede establecer también objetivos parciales en sus entradas o salidas.

En estas situaciones, sería conveniente aplicar un modelo que sea capaz de añadir todas estas condiciones, con el objeto de reflejar la realidad lo más fielmente posible.

En este capítulo se presenta el modelo DEA Centralizado con Establecimiento de Objetivos Parciales a Alcanzar. Este modelo afronta situaciones en las que el funcionamiento de todas las unidades es restringido a un cierto nivel total de entradas fijado, denominadas variables transferibles, las cuales hacen que el problema sea centralizado. Además permite la consideración de objetivos para los valores de las entradas y salidas de cada unidad productiva ("targets"). Así como la articulación de preferencias para cada entrada y salida a modificar.

En definitiva, el modelo reparte dicho nivel total entre todas las unidades productivas intentando que todas ellas sean eficientes, teniendo en cuenta las condiciones impuestas.

Aunque podrían considerarse otros escenarios que no fueran centralizados y tuvieran igualmente "targets", se ha elegido esta condición por su generalidad. Una modificación esencial de los modelos que se planteara, puede resolver igualmente problemas no centralizados.

En primer lugar se mostrará el modelo en su forma más básica, el cuál no admite la posibilidad de introducir valores de "targets" inadmisibles. Se trata de un modelo más conservador, para escenarios en los cuales las empresas tienen un conocimiento exhaustivo de su tecnología, con lo cuál, no introducen "targets" inadmisibles. Esto es, un modelo para variables ineficientes, donde no se pretende mejorar la tecnología, sino aumentar la eficiencia de la producción dentro de unas limitaciones, que son perfectamente conocidas.

A continuación se desarrollará un modelo mejorado donde sí cabe la posibilidad de introducir "targets" inadmisibles. Este modelo va encaminado a realidades empresariales en las que ciertas DMU´s son ambiciosas, o bien conocen su negocio y saben que pueden alcanzar esos objetivos. Incluso podría aplicarse al caso contrario, en empresas que no conocen las posibilidades de producción de su negocio porque no lo han visto en sus competidores, pero ven probable que en un futuro puedan alcanzarse dichos objetivos.

En último lugar, se introducirá un modelo que se aproxima más aún a la realidad empresarial, en la que, además de tener determinados objetivos a alcanzar, puedan existir variables que se consideran más prioritarias en la unidad productiva.

Se comprueba de esta forma la versatilidad del modelo, que sin hacer grandes modificaciones, es capaz de adaptarse a tales situaciones.

2. MODELO DEA CENTRALIZADO CON OBJETIVOS TECNOLÓGICAMENTE ALCANZABLES.

En primer lugar se presenta el modelo en su forma más básica, es decir, sin la posibilidad de introducir “targets” inadmisibles.

Un target, como ya se indicó en el párrafo anterior, es un objetivo a alcanzar para una determinada variable. Este modelo, estudiará aquellos casos en los que no existan objetivos inalcanzables tecnológicamente.

Previamente se da a conocer la notación utilizada:

j	índice para las DMUs
i	índice para las entradas
k	índice para las salidas
r	índice para variables con targets.
I^{Transf}	conjunto de entradas cuya suma debe permanecer constante (inputs transferibles)
$I(r)$	conjunto de entradas con targets.
$O(r)$	conjunto de salidas con targets.
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por DMU_j
y_{kj}	cantidad de salida k producida por DMU_j
$\hat{x}_{ij}$	solución de la fase I para la entrada i consumida por la DMU_j
$\hat{y}_{kj}$	solución de la fase I para la salida k producida por la DMU_j
$\hat{\hat{x}}_{ij}$	solución óptima (fase II) para la entrada i consumida por la DMU_j
$\hat{\hat{y}}_{kj}$	solución óptima (fase II) para la salida k producida por la DMU_j

x_{ir}^{target} entrada i con target para la DMU_{jr}

y_{kr}^{target} salida k con target para la DMU_{jr}

$(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, ..., \lambda_{nr})$ vector de variables para proyectar DMUr

El modelo consta de dos fases, una primera fase en la cuál se analizarán solo las variables que tengan "targets", y una segunda en la cuál se estudiará el resto de variables.

2.1. Fase I: Optimización de las "targets" establecidos.

En esta primera fase el estudio se centra en las variables con "targets" y se resuelve como un modelo aditivo adimensionalizado centralizado.

Para esta fase podríamos haber escogido un modelo radial, o no radial pero no aditivo, etc. La razón de esta elección reside en que cuando existen "targets" habrá entradas que se quieran mejorar y otras no, ocurriendo lo mismo para el caso de las salidas. El modelo aditivo, al maximizar solo holguras, no hace distinción entre orientación de entrada y/o salida, por ello parece indicado usarlo para este estudio.

Se muestra a continuación el modelo para esta primera fase:

$$Max \sum_r \sum_{i \in I(r)} \frac{h_{ir}^-}{x_{ir}^{target}} + \sum_r \sum_{k \in O(r)} \frac{h_{kr}^+}{y_{kr}^{target}}$$

$$sa:$$

$$\sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq \hat{x}_{ir} \qquad \forall i, \forall r$$

$$\sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \geq \hat{y}_{kr} \qquad \forall k, \forall r$$

$$\hat{y}_{kr} = y_{kr}^{target} + h_{kr}^+ \qquad \forall r, \forall k \in O(r)$$

$$\hat{x}_{ir} = x_{ir}^{target} - h_{ir}^- \qquad \forall i, \forall r \in I(r)$$

$$\sum_{r} \hat{x}_{ir} \leq x_i^{total} \qquad \forall i \in I^{transf}$$

$$\sum_{j} \lambda_{jr} = 1$$

$$h_{kr}^{+}, h_{ir}^{+} \geq 0$$

$$\hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr} \geq 0$$

Como se puede ver, en la función objetivo, se intenta maximizar solamente las variables a las que se le impone un *target.*

Las variables $\hat{x}_{ir}$ e $\hat{y}_{kr}$ indican el punto sobre el cual DMUr es proyectada en la solución. El primer y segundo grupo de restricciones establecen que dichas variables deben pertenecer a la tecnología especificada. Finalmente, las últimas $|I^{Transf}|$restricciones, son necesarias para asegurar que la suma total de cada entrada permanezca constante

Una vez resuelto el modelo, las cantidades de entradas y salidas en la solución se miden mediante las siguientes expresiones:

$$\hat{y}_{kr} = y_{kr}^{target} + h_{kr}^{+} \qquad \forall r, \forall k \in O(r)$$

$$\hat{x}_{ir} = x_{ir}^{target} - h_{ir}^{-} \qquad \forall i, \forall r \in I(r)$$

Donde x_{ij}^{target} y y_{kj}^{target} eran los valores “targets”corresondientes a las entradas y salidas, y h_{kr}^{+}, h_{ir}^{-} los valores óptimos de las holguras obtenidos por el modelo.

Esta solución representa los valores óptimos de las entradas y salidas con “targets”, en la segunda fase se determinará el resto de las variables.

2.2. Fase II: Optimización de las variables sin ”targets” establecidos.

En esta segunda fase del modelo, como se ha dicho anteriormente, se analizan las entradas y salidas que no pertenecen al conjunto de variables

I(r) y O(r), es decir, que no tienen “targets” establecidos. En este caso utilizamos un modelo no radial, en el cuál se maximizan las salidas y minimizar las entradas en una sola fase.

A continuación se muestra el modelo:

$$Max\sum_{r}\sum_{i\notin I(r)}\alpha_{ir}+\sum_{r}\sum_{k\notin O(r)}\beta_{kr}$$

$$sa:$$

$$\hat{\hat{x}}_{ir}=(\hat{x}_{ir})(1-\alpha_{ir}) \qquad \forall i,\forall r\notin I(r)$$

$$\hat{\hat{y}}_{kr}=(\hat{y}_{kr})(1+\beta_{kr}) \qquad \forall r,\forall k\notin O(r)$$

$$\hat{\hat{x}}_{ir}=(\hat{x}_{ir}) \qquad \forall i,\forall r\in I(r)$$

$$\hat{\hat{y}}_{kr}=(\hat{y}_{kr}) \qquad \forall r,\forall k\in O(r)$$

$$\sum_{j}\lambda_{jr}x_{ij}\le\hat{\hat{x}}_{ir} \qquad \forall i,\forall r$$

$$\sum_{j}\lambda_{jr}y_{kj}\ge\hat{\hat{y}}_{kr} \qquad \forall k,\forall r$$

$$\sum_{r}\hat{x}_{ir}\le x_i^{total} \qquad \forall i\in I^{transf}$$

$$\sum_{j}\lambda_{jr}=1$$

El modelo maximizará las variables alfa y beta para disminuir y aumentar entradas y salidas de una manera eficiente, sujeto a las dos primeras restricciones, lo que permitirá que la solución obtenida no abandone la tecnología.

Finalmente se obtienen las soluciones óptimas definitivas, siendo las mismas que en la primera fase para las variables pertenecientes a los conjuntos I(r) y O(r).

3. MODELO DEA CENTRALIZADO CON OBJETIVOS TECNOLÓGICAMENTE INALCANZABLES.

Cuando una entidad impone un valor determinado en alguno de sus “inputs” o “outputs” con el fin de mejorar su funcionamiento puede ser que se sitúe fuera de la tecnología del problema.

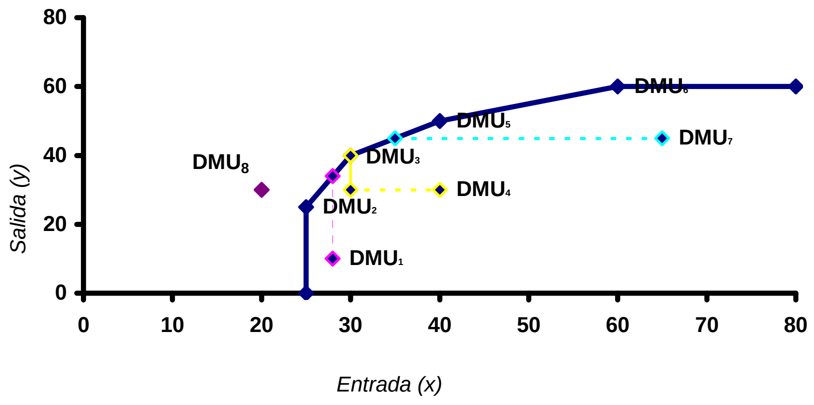

Figura 4.3.1. Ejemplo de "inputs" o "outputs" que toman variables inadmisibles.

Sin embargo, este problema se puede rectificar con un nuevo modelo mostrado posteriormente, en el cuál, se definen dos tipos de holguras, (h^+) y (h^-), tanto para las entradas como para las salidas, dejando libre las holguras que restan, en el caso de las entradas, y las que suman, en el caso de las salidas, y minimizando en la función objetivo unas holguras, que en el caso de las entradas estarán sumando, y en el caso de las salidas restando.

Por ejemplo, si una de las entradas de una DMU tiene un valor que a su vez es ya eficiente para esa unidad productiva, y se le impone un *target* que hace que esa variable se vuelva inadmisible, entonces, mediante dicha holgura, se podrá sumar el valor mínimo necesario para que vuelva a ser admisible. La entrada, se desplazará a la frontera de la tecnología, es decir, volverá a adquirir su valor eficiente.

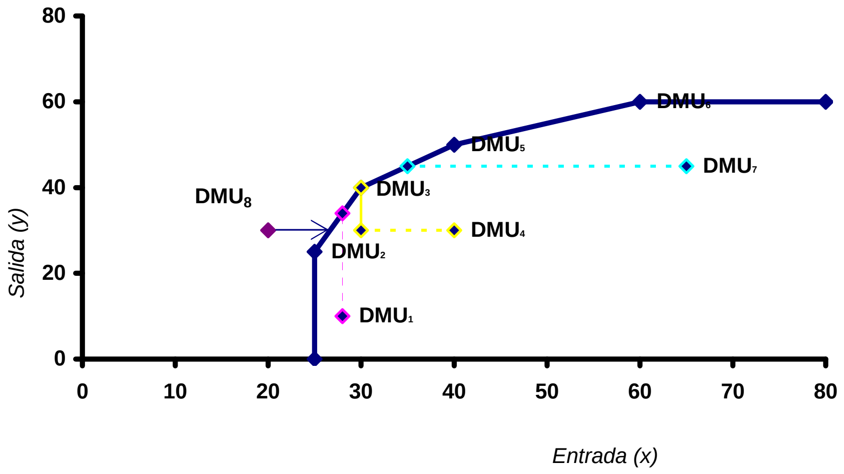

Figura 4.3.2. Ejemplo de traslación para transformar una variable inadmisible en admisible.

Esto mismo ocurrirá en el caso de las salidas, pero esta vez será minimizando el valor de una holgura que resta a la restricción correspondiente.

A continuación se mostrará el modelo en sus dos fases.

Se especifica previamente la nomenclatura a utilizar:

j	índice para las DMUs
i	índice para las entradas
k	índice para las salidas
r	índice para variables con targets.
I^{Transf}	conjunto de entradas cuya suma debe permanecer constante (inputs transferibles)
$I(r)$	conjunto de entradas con targets.
$O(r)$	conjunto de salidas con targets.
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por DMU_j
y_{kj}	cantidad de salida k producida por DMU_j
$\hat{x}_{ij}$	solución de la fase I para la entrada i consumida por la DMU_j
$\hat{y}_{kj}$	solución de la fase I para la salida k producida por la DMU_j
$\hat{\hat{x}}_{ij}$	solución óptima (fase II) para la entrada i consumida por la DMU_j
$\hat{\hat{y}}_{kj}$	solución óptima (fase II) para la salida k producida por la DMU_j
x_{ir}^{target}	entrada i con target para la DMU_{jr}
y_{kr}^{target}	salida k con target para la DMU_{jr}

$(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, ..., \lambda_{nr})$ vector de variables para proyectar DMU_r

3.1. Fase I: Optimización de las variables con "targets" establecidos

En esta primera fase el estudio se centra en las variables con "targets" establecidos y se resuelve como un modelo aditivo centralizado adimensionalizado.

Se utilizará un modelo aditivo al igual que en la primera fase del modelo anterior por las mismas razones que habíamos explicado. Además, para este caso, al utilizar dos nuevas holguras que suman y restan a entradas y salidas respectivamente, se producen traslaciones, siendo el modelo aditivo invariables frente a éstas, una razón más para elegir este modelo.

Mostramos seguidamente el modelo para esta primera fase.

$$Min \sum_r \sum_{i \in I(r)} \frac{h^+_{ir}}{x^{target}_{ir}} + \sum_r \sum_{k \in O(r)} \frac{h^-_{kr}}{y^{target}_{kr}}$$

$$sa:$$

$$\sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq \hat{x}_{ir} \qquad \forall i, \forall r$$

$$\sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \geq \hat{y}_{kr} \qquad \forall k, \forall r$$

$$\hat{x}_{ir} \leq x_{ir} \qquad \forall i, \forall r$$

$$\hat{y}_{kr} \leq y_{kr} \qquad \forall k, \forall r$$

$$\sum_r \hat{x}_{ir} \leq x^{total}_i \qquad \forall i \in I^{Transf}$$

$$\hat{y}_{kr} = \ y^{target}_{kr} + h^+_{kr} \text{ - } h^-_{kr} \qquad \forall k\ \forall r \in O(r),$$

$$\hat{x}_{ir} = \ x^{target}_{ir} - h^-_{ir} + h^+_{ir} \qquad \forall r\ \forall i \in I(r),$$

$$\sum_j \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r$$

$$h^+_{kr}, h^+_{ir} \geq 0 \qquad \forall i,\ \forall k, \forall r$$

$$\hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr} \geq 0 \qquad \forall i,\ \forall k, \forall r$$

Se puede observar que las holguras h_{ir}^{-} y h_{kr}^{+} no aparecen en la función objetivo. Las dos primeras restricciones hacen que tomen valores que no desplacen a las unidades productivas fuera de la tecnología.

En el caso de que un *target* estuviera fuera de la tecnología, serían las h_{kr}^{-} y h_{ir}^{+}, adquiriendo el mínimo valor admisible mediante la función objetivo, las que desplazaran a la frontera de la tecnología, a las referencias de la DMU adquiriendo de esta manera un valor eficiente.

En esta primera fase se obtendrán los valores eficientes de las entradas y salidas con "targets".

3.2. Fase II: Optimización de las variables con y sin "targets" establecidos.

En esta segunda fase del modelo, se analizan todas las entradas y salidas, pertenezcan o no al conjunto de variables I(r) y O(r), usando para ello un modelo no radial. A continuación se muestra el modelo para esta segunda fase.

$$Max \sum_{r} \sum_{i \notin I(r)} \alpha_{ir} + \sum_{r} \sum_{k \notin O(r)} \beta_{kr}$$

$$sa:$$

$$\sum_{j} \lambda_{jr} x_{ij} \le \hat{\hat{x}}_{ir} \qquad \forall i, \forall r$$

$$\sum_{j} \lambda_{jr} y_{kj} \ge \hat{\hat{y}}_{kr} \qquad \forall k, \forall r$$

$$\sum_{r} \hat{x}_{ir} \le x_{i}^{total} \qquad \forall i \in I^{Transf}$$

$$\hat{\hat{x}}_{ir} = (\hat{x}_{ir})(1 - \alpha_{ir}) \qquad \forall i, \forall r$$

$$\hat{\hat{y}}_{kr} = (\hat{y}_{kr})(1 - \beta_{kr}) \qquad \forall k, \forall r$$

$$\sum_{j} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r$$

$$0 \le \alpha_{ir} \le 1 \qquad \forall i, \forall r$$

$$\beta_{kr} \ge 0 \qquad \forall k, \forall r$$

El modelo maximizará las variables alfa y beta para disminuir y aumentar entradas y salidas de una manera eficiente, sujeto a las dos primeras restricciones, lo cual hará que no tomen valores inadmisibles.

Finalmente se obtiene las soluciones óptimas definitivas.

4. MODELO DEA CENTRALIZADO CON OBJETIVOS TECNOLOGICAMENTE INALCANZABLES Y CON ARTICULACIÓN DE PREFERENCIAS.

Hasta este momento no se ha dado mayor relevancia a unas variables de entradas o salidas, que a otras, es decir, no se han impuesto restricciones en los pesos. Existen varias formas de calcular los pesos. En este caso se ha realizado un estudio previo, y con la ayuda del *software “Espert Choice”*(Anexo I), se han determinado sus valores.

Partiendo del modelo anterior, se sigue la misma estructura y se añaden en la función objetivo de cada fase, los valores de los pesos asignados para cada variable.

A continuación se mostrará el modelo en sus dos fases.

Se especifica previamente la nomenclatura a utilizar:

j	índice para las DMUs
i	índice para las entradas
k	índice para las salidas
r	índice para variables con targets.
I^{Transf}	conjunto de entradas cuya suma debe permanecer constante (inputs transferibles)
$I(r)$	conjunto de entradas con targets.
$O(r)$	conjunto de salidas con targets.
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por DMU_j
y_{kj}	cantidad de salida k producida por DMU_j
$\hat{x}_{ij}$	solución de la fase I para la entrada i consumida por la DMU_j

$\hat{y}_{kj}$	solución de la fase I para la salida k producida por la DMU_j
$\hat{\hat{x}}_{ij}$	solución óptima (fase II) para la entrada i consumida por la DMU_j
$\hat{\hat{y}}_{kj}$	solución óptima (fase II) para la salida k producida por la DMU_j
x_{ir}^{target}	entrada i con target para la DMU_{jr}
y_{kr}^{target}	salida k con target para la DMU_{jr}
u_{ij}	peso de importancia de la entrada i consumida por la DMU_j
v_{kj}	peso de importancia de la salida k generada por la DMU_j
u^{*}_{ij}	peso de importancia de la entrada i con *targets* consumida por la DMU_j
v^{*}_{kj}	peso de importancia de la salida k, con *targets*, generada por la DMU_j
$(\lambda_{1r},\lambda_{2r},....,\lambda_{nr})$	vector de variables para proyectar DMU_r

4.1. Fase I: Optimización de variables con "targets" establecidos.

En esta primera fase, el estudio se centra en las variables con "targets" y se resuelve como un modelo aditivo centralizado adimensionalizado, al igual que en los apartados anteriores, como se muestra a continuación:

$$Min\sum_{r}\sum_{i\in I(r)} u^{*}_{ij}\frac{h^{+}_{ir}}{x^{target}_{ir}}+\sum_{r}\sum_{k\in O(r)} v^{*}_{kj}\frac{h^{-}_{kr}}{y^{target}_{kr}}$$

$sa:$

$$\sum_{j}\lambda_{jr}x_{ij}\leq \hat{x}_{ir} \qquad \forall i,\forall r$$

$$\sum_{j}\lambda_{jr}y_{kj}\geq \hat{y}_{kr} \qquad \forall k,\forall r$$

$$\hat{x}_{ir}\leq x_{ir} \qquad \forall i,\forall r$$

$$\hat{y}_{kr}\leq y_{kr} \qquad \forall k,\forall r$$

$$\sum_{r}\hat{x}_{ir}\leq x^{total}_{i} \qquad \forall i\in I^{Transf}$$

$$\hat{y}_{kr}= \ y^{target}_{kr}+h^{+}_{kr}-h^{-}_{kr} \qquad \forall k\ \forall r\in O(r),$$

$$\hat{x}_{ir}= \ x^{target}_{ir}-h^{-}_{ir}+h^{+}_{ir} \qquad \forall r\ \forall i\in I(r),$$

$$\sum_{j}\lambda_{jr}=1 \qquad \forall r$$

$$h^{+}_{kr},h^{+}_{ir}\geq 0 \qquad \forall i,\ \forall k,\forall r$$

$$\hat{x}_{ir},\hat{y}_{kr}\geq 0 \qquad \forall i,\ \forall k,\forall r$$

En este modelo no se aprecia una modificación sustancial respecto del modelo anterior. La única diferencia con éste es el valor de las restricciones que se han añadido a los valores que se obtendrían en el último modelo descrito. Este hecho pone de manifiesto la versatilidad del modelo en cuanto a la facilidad de adaptarse a diversas situaciones

En esta primera fase, se introducen los valores de las restricciones de los pesos calculadas solo para las variables con *targets*.

Se obtendrán los valores eficientes de las entradas y salidas con *targets*, sujetas a las restricciones de importancia impuestas para cada variable.

4.2. Fase II: Optimización de variables con y sin "targets" establecidos.

En esta segunda fase del modelo, se analizan el resto de entradas y salidas sujetas a las restricciones de los pesos mencionadas, habiendo sido calculadas en este caso para todas y cada una de las entradas y salidas, con targets o sin ellos.

$$
\begin{aligned}
& Max \sum_{r} \sum_{i \notin I(r)} u_{ij} \alpha_{ir} + \sum_{r} \sum_{k \notin O(r)} v_{kj} \beta_{kr} \\
& sa: \\
& \sum_{j} \lambda_{jr} x_{ij} \le \hat{\hat{x}}_{ir} \qquad \forall i, \forall r \\
& \sum_{j} \lambda_{jr} y_{kj} \ge \hat{\hat{y}}_{kr} \qquad \forall k, \forall r \\
& \sum_{r} \hat{x}_{ir} \le x_i^{total} \qquad \forall i \in I^{Transf} \\
& \hat{\hat{x}}_{ir} = (\hat{x}_{ir})(1 - \alpha_{ir}) \qquad \forall i, \forall r \\
& \hat{\hat{y}}_{kr} = (\hat{y}_{kr})(1 - \beta_{kr}) \qquad \forall r, \forall k \\
& \sum_{j} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r \\
& 0 \le \alpha_{ir} \le 1 \qquad \forall i, \forall r \\
& \beta_{kr} \ge 0 \qquad \forall r, \forall k
\end{aligned}
$$

Finalmente se obtienen las soluciones óptimas definitivas, sujetas a la importancia asignada para cada una de las variables según la entidad bancaria