Capítulo 5
Algoritmo y variaciones

5.1 Elección: Test de $k^* \cdot \sigma$

Como se ha dicho antes, la estructura del test de doble sigma podría ser adecuada para el problema de la báscula de cómputo. No obstante, es necesario adaptarlo para cumplir con las especificaciones del problema, en concreto con el nivel de confianza del test.
Se ha calculado para ello el valor $\hat{K}$ tal que los límites de control $\mu \pm \hat{K}\sigma$ contengan un intervalo de confianza de tamaño 99%. El valor correspondiente es $\hat{K} = 3.3418$.
Esta constante se obtiene a partir de la función de densidad normalizada, por lo que los límites serán: $K = \hat{K} \cdot \sigma$. Y puesto que se controla la media muestral de una muestra de tamaño N, se tiene:

$$K = \frac{\hat{K} \cdot \sigma_{proc}}{\sqrt{N}}$$

Descripción del test

El algoritmo debe comenzar con la estimación de la media del proceso. Para eso se tomarán datos durante un periodo de tiempo suficientemente largo durante el cual se debe asegurar que el proceso permanece estacionario.

A continuación, elegido un tamaño de muestra N, se calculará el valor de K y con él el valor de los límites: $LSC = \mu + K$; $LIC = \mu - K$. A partir de ahí, tras tomar los N primeros datos y almacenarlos en la cola para la muestra, comienza el cuerpo principal del test.

El test consistirá en un bucle con los siguientes pasos:

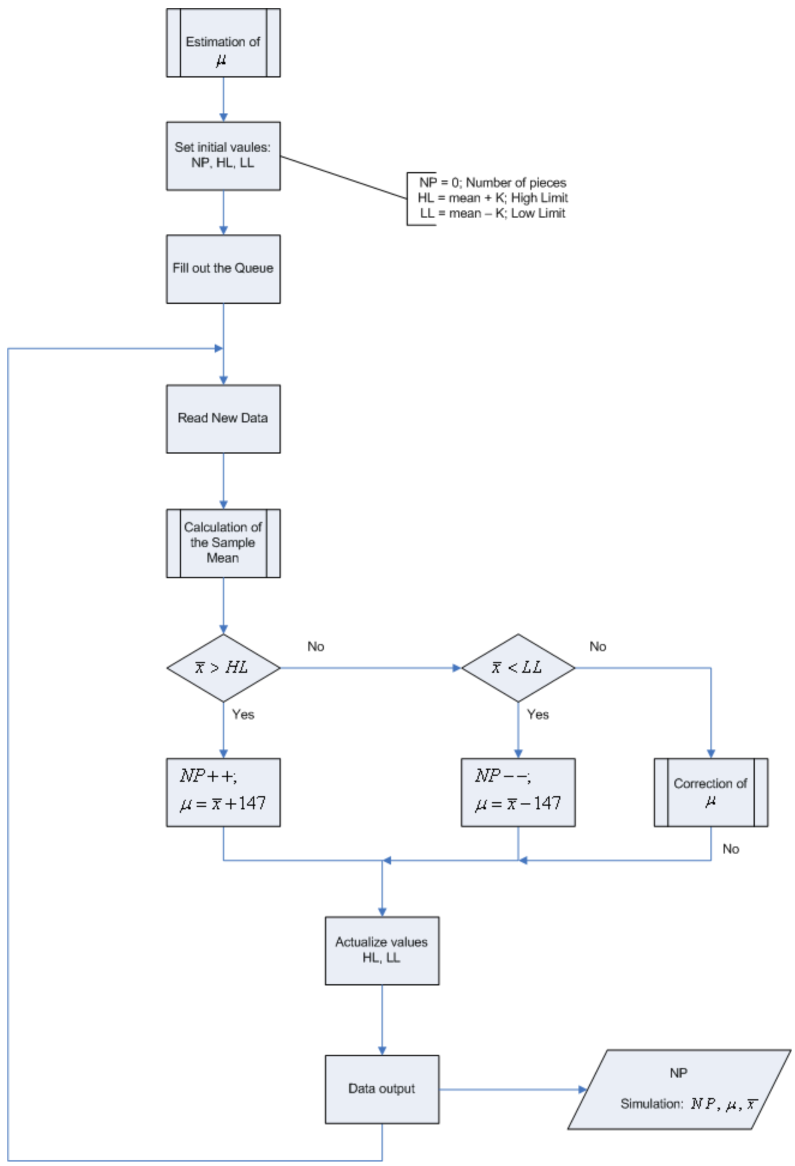
- Se recibe un nuevo dato
- Se calcula la nueva media muestral
- Se compara con los límites:
  - Si es mayor que el LSC se suma uno al número de piezas y se incrementa el valor estimado de la media del proceso en 147g.
  - Si es menor que el LIC se resta uno al número de piezas y se decrementa el valor estimado de la media del proceso en 147g.
- Se actualizan los valores de los límites de control y se envían los datos solicitados.

El filtro de μ

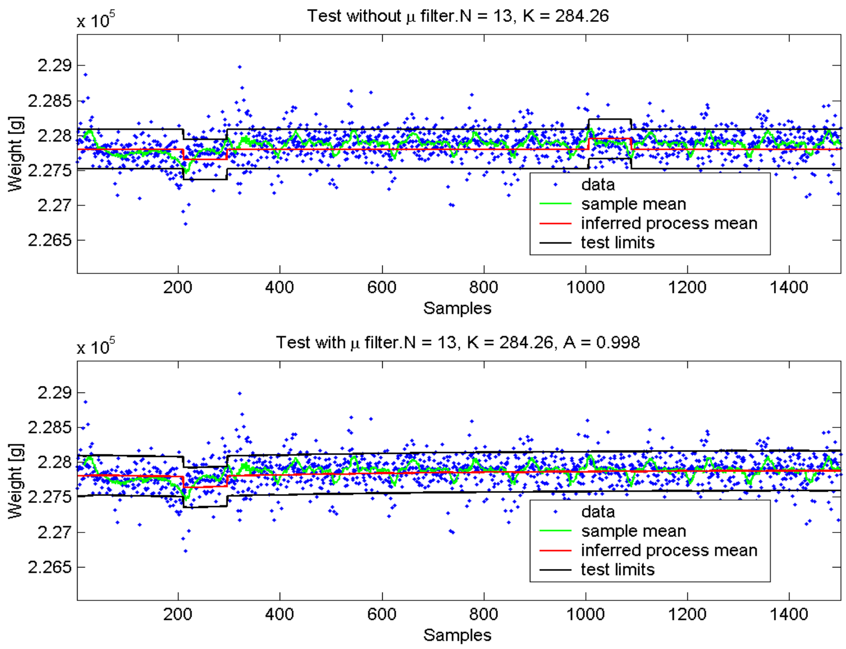
Como se puede ver en el siguiente diagrama de flujo, se ha incluido una corrección continua del valor estimado de la media del proceso, de manera que la nueva estimación será una media ponderada entre la antigua y el valor de la media muestral. Los pesos

para la ponderación de la media deben ser tales que aseguren una evolución muy lenta del valor de la estimación para no contradecir la primera hipótesis.
Este filtro de μ se ha incluido para solucionar algunos problemas como:

- Si la primera estimación de la media del proceso por cualquier motivo no fuera correcta o suficientemente precisa, produciría errores y posiblemente oscilaciones en el valor del número de piezas al no estar centrada la región de control en el verdadero valor de la media del proceso y nunca se corregiría
- Si cualquier pequeño objeto cayera por accidente en la báscula o bien una pieza defectuosa con un peso diferente al de las demás, el efecto sería el mismo que el de una mala estimación de la media del proceso.
- Si el peso medio de las piezas fuera ligeramente superior o inferior al esperado, la diferencia se iría acumulando y el error en la estimación de μ aumentaría con el número de piezas.



Los efectos del filtro de μ se aprecian fácilmente en la siguiente gráfica:



Parámetros y relaciones

Para definir completamente el test, es necesario elegir un valor para el tamaño muestral N y el valor de sigma que se empleará. Para elegir los valores adecuados es necesario introducir en el estudio la probabilidad y la duración de los errores de tipo II.
Fijada la probabilidad de error tipo I al 1% y conocido el salto mínimo de la media del proceso (147g) tras un evento, la probabilidad de un error tipo II es mayor cuanto mayor es la zona de control. Aunque en nuestro caso este tipo de error está prácticamente asegurado, su duración (el número consecutivo de errores tipo II desde que cae una unidad en la báscula) dependerá de la probabilidad.

Dependencia del tiempo de respuesta con N

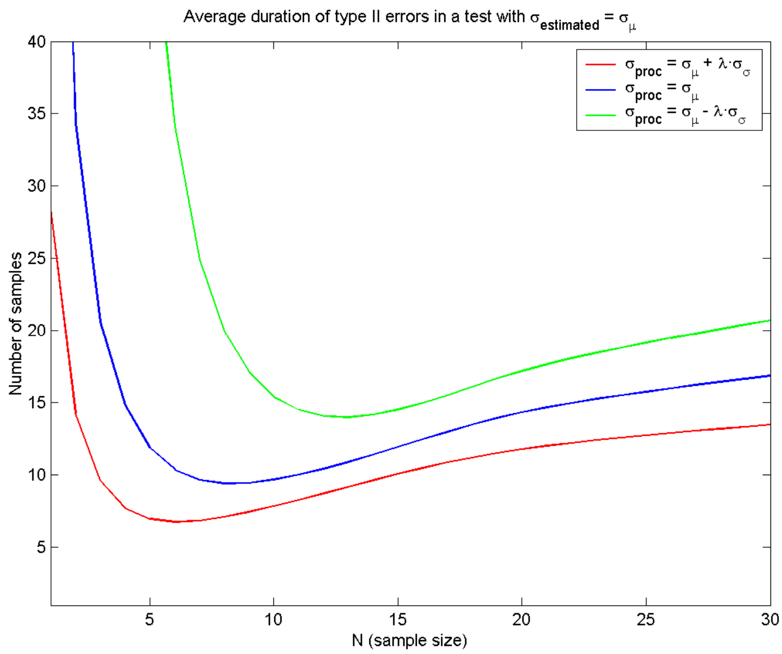
La elección de un valor bajo de N producirá una zona de control muy ancha y por tanto errores tipo II muy largos. Valores altos de N reducirán en principio el tiempo de error tipo II, aunque por otra parte valores excesivamente altos requieren muchas muestras, lo que tiende a alargar también la duración del error. Debe existir un mínimo para algún valor de N.

Dependencia del tiempo de respuesta con sigma

El cálculo del tiempo medio de error tipo II (o tiempo de respuesta del test) es un problema de probabilidad compuesta que depende fuertemente de la desviación típica del proceso. Se plantea por tanto la cuestión de qué valor de la desviación típica utilizar para predecir los tiempos de respuesta.

Como se deduce de la expresión de la constante 'K', cuanto mayor sea el valor de σ_{proc} utilizado mayor será la zona de control. Así pues, si se utiliza el valor medio $\sigma_{proc} = \sigma_{\mu}$, se obtendrá un test intermedio que asegura el nivel de confianza deseado para el 50% de los casos. Si se elige el valor mayor del intervalo de σ, $\sigma_{proc} = \sigma_{\mu} + \lambda \cdot \sigma_{\sigma} = 266.721$ calculado en la sección *"Estudio Estadístico De Las Medidas"*, se obtiene un test holgado que asegura el nivel de confianza deseado en el 97.5% de los casos.

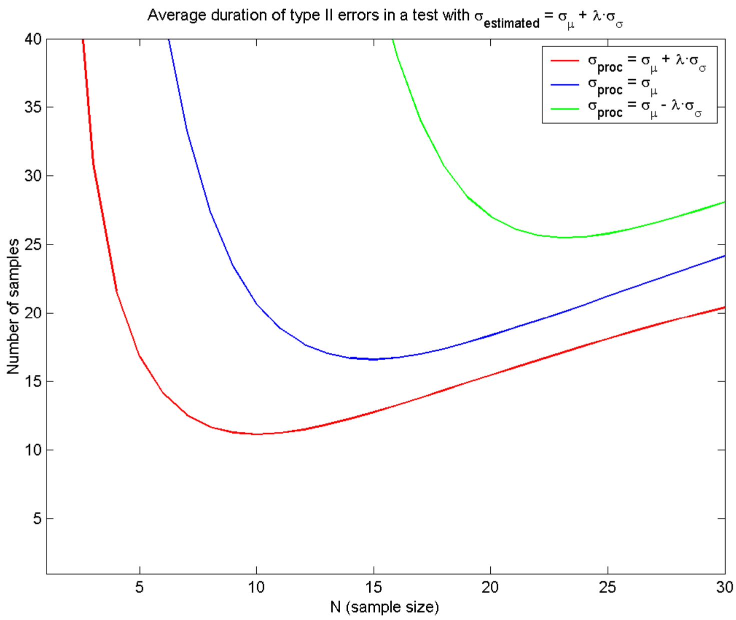
El cálculo de los tiempos de respuesta se detalla en los apéndices del documento principal de este proyecto. Sus resultados se muestran en la gráfica siguiente en función del tamaño de la muestra en el caso de un test medio y efectivamente presentan un mínimo:



La curva azul en la gráfica anterior representa el tiempo medio de respuesta del test en función de N cuando la varianza del proceso es la varianza media estimada en el estudio estadístico previo. Su mínimo es de 9.4 muestras para N=8.

Sin embargo la varianza real podría ser mayor (curva roja) o menor (curva verde) que el valor medio. Una varianza menor que la esperada produciría tiempos de respuesta mucho mayores. Este hecho obliga a tomar valores mayores de N para asegurar que el tiempo de respuesta no se dispara. En este caso N=13 asegura que se mantienen tiempos de respuesta razonablemente bajos en más del 98% de los casos. (Mínimo de la curva para N=13, tiempo de respuesta medido en nº de muestras=13.98)

A continuación se muestran los mismos resultados para el caso de un test holgado:

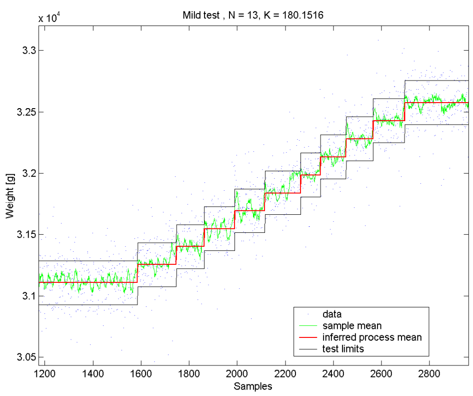


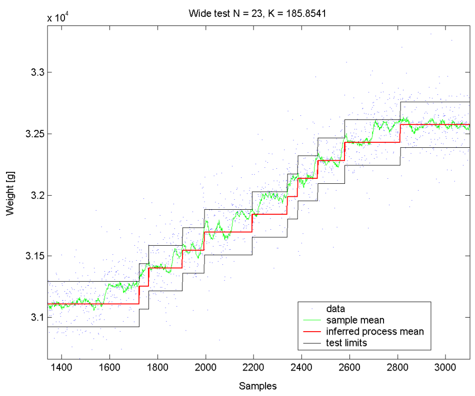
Como se puede ver, los valores de N y del tiempo de respuesta son mucho mayores en este test. De nuevo es necesario establecer valores en el lado de la seguridad y tomar N=23 para mantener limitados los tiempos de respuesta. (Mínimo para N=23, tiempo de respuesta medido en nº de muestras = 25.45)

Resultados y problemática

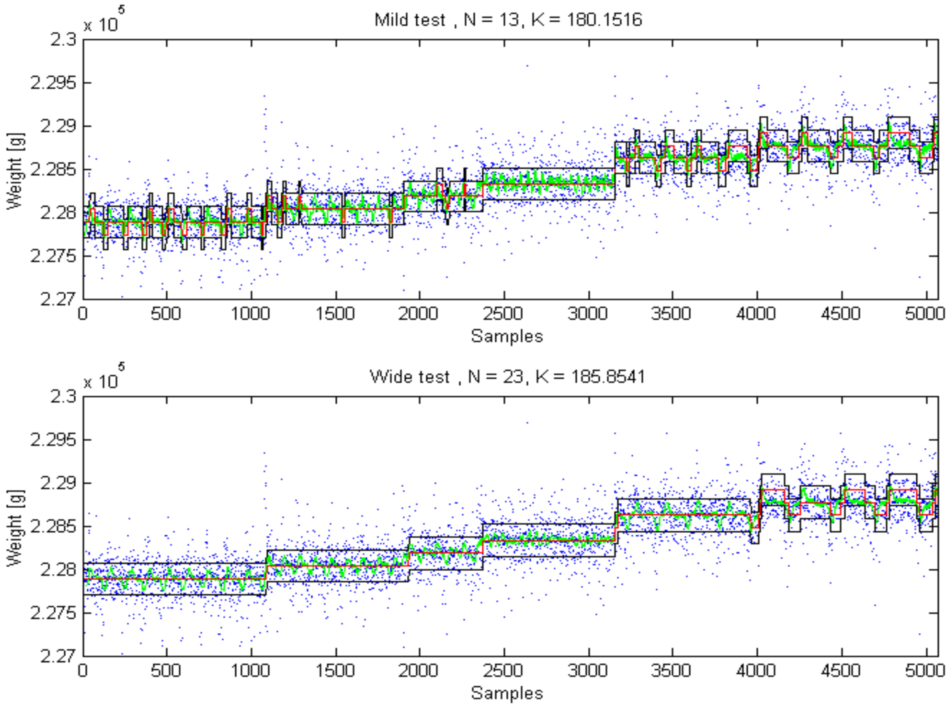
Los experimentos realizados con estos test muestran que, por una parte es necesario el uso de un test holgado para evitar exceso de errores tipo I. Por otra parte, en los casos en que la desviación típica del proceso es media o baja (especialmente cuando es baja), los tiempos de error tipo II son excesivamente altos. A continuación se muestran algunos de estos resultados.

Test medio y test holgado respectivamente para una distribución con una desviación típica algo menor que el valor medio:





Test medio y test holgado respectivamente para una distribución con una desviación típica alta:

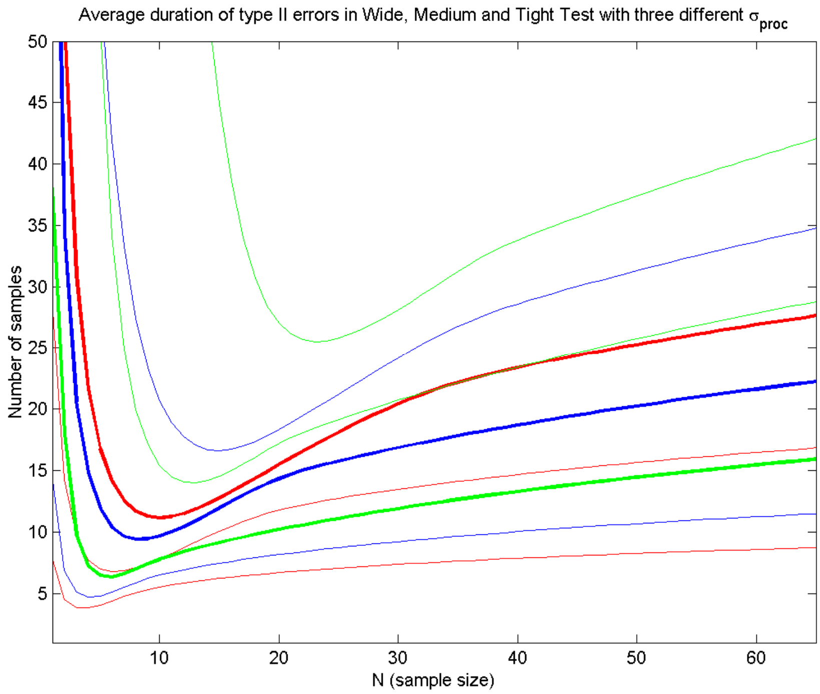


El estudio estadístico ha servido para mantener acotados los tiempos de respuesta (tiempos de error tipo II), aunque la cota no es lo suficientemente baja. El motivo de esta falta de eficiencia es el amplio rango de valores de la varianza que hay que abarcar. Los valores altos obligan a utilizar un intervalo de control amplio, y los bajos obligan a aumentar el tamaño de la muestra. Como consecuencia, la probabilidad de error tipo II aumenta.

En el apartado siguiente se estudia el uso de un test similar con valores adaptables para solucionar este problema.

5.2 Primera variación: Test Adaptable

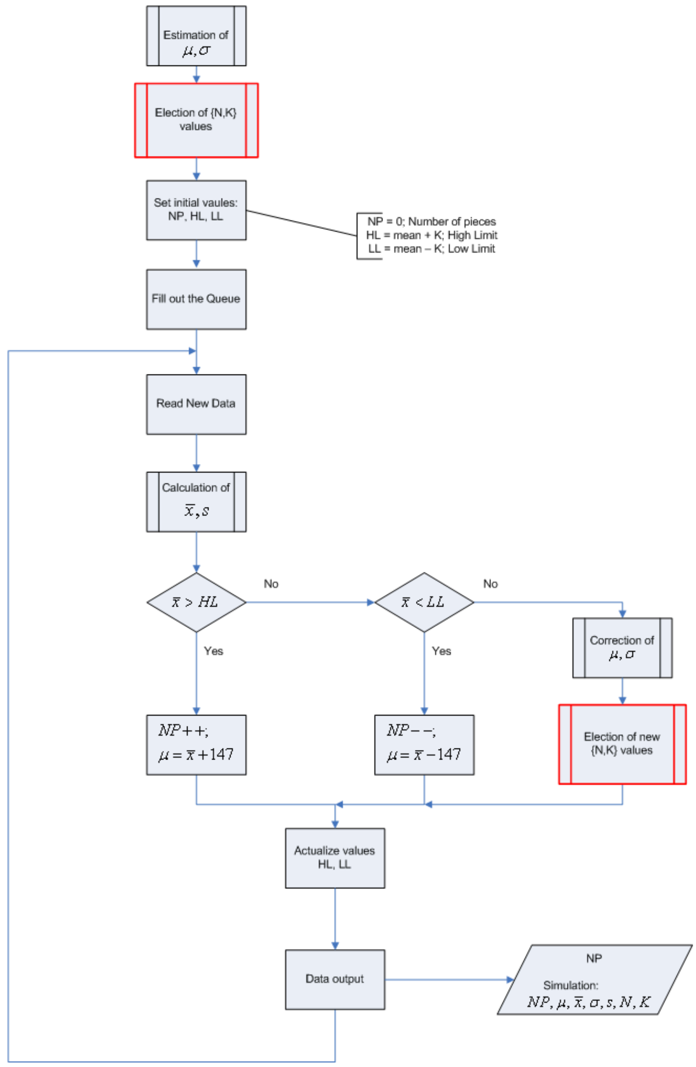
Como se ha visto, la elaboración de un test único que abarque todos los valores posibles de la varianza, produce tiempos de respuesta muy largos. En la gráfica siguiente se muestran los tiempos de respuesta de tres tipos de test: holgado, medio y estrecho para valores bajos (verde), medios (azul) y altos (rojo) de σ_{proc}.



Las líneas resaltadas corresponden a los valores alcanzables si se conociera a priori el valor de σ_{proc}. Como se ve, los tiempos de respuesta se reducirían entre un 30% (caso de σ_{proc} altos) y un 72% caso de σ_{proc} bajos.

Descripción del test adaptable

En este apartado se propone como solución un test adaptable cuyos parámetros se ajusten en función del valor de la desviación típica en cada momento. Su funcionamiento se basa, por tanto en la estimación "online" de la desviación típica. Su estructura se muestra en el siguiente diagrama.



El diagrama es muy similar al del test de parámetros fijos aunque con las siguientes diferencias:

- En los bloques en los que se estimaba o corregía la media del proceso o bien la muestral, ahora se estima o corrige también la desviación típica del proceso o la muestral respectivamente.
- Se añade un nuevo bloque (en rojo) tras cada bloque en el que se estima o corrige la desviación típica del proceso. En este bloque se elige el nuevo valor de N en función de $\hat{\sigma}_{proc}$ y se calcula el nuevo valor correspondiente de K.

Tamaño de los intervalos de confianza

Puesto que la estimación de σ_{proc} se hace a través del estadístico de la desviación típica muestral S_{n-1}, su valor seguirá siendo incierto. Dicha incertidumbre se traduce en la necesidad de un intervalo de confianza para σ_{proc}, que dependerá del tamaño N_2 de la muestra utilizada para la estimación. El objetivo de este test se podrá cumplir siempre

que el intervalo de confianza del 95% para σ_{proc} sea menor que el obtenido en el estudio estadístico previo ($\pm 37\%$ de S_{n-1}).
Se ha calculado el tamaño de dicho intervalo de confianza para σ_{proc} del 95% en función de N y S_{n-1} mediante dos aproximaciones.

En primer lugar, se ha aproximado la distribución de S_{n-1} por la de una muestra procedente de una población normal. Utilizando el teorema de Fischer se tiene que el valor:

$$a = \sqrt{\frac{\chi_{n-1}^{2(\alpha)} \cdot \sigma_{proc}^2}{N_2 - 1}}$$

donde:

$$\chi_{\text{n-1}}^{2(\alpha)} : P(\chi_{\text{n-1}}^2 \geq \chi_{\text{n-1}}^{2(\alpha)}) = \alpha$$

es un límite tal que:
$P\left(S_{n-1}^2 \leq a^2\right) = \alpha$

Con esto, utilizando el valor $\alpha = 0.025$ se obtiene que el valor N_2 mínimo buscado es 15. Según este resultado, siempre que estimemos la desviación típica con una muestra de tamaño mayor que 15, obtendremos un intervalo de confianza para σ_{proc} más estrecho que el obtenido con el estudio previo de la distribución y por tanto un test con mejores tiempos de respuesta.

Una aproximación más conservadora consiste en tomar los valores:

$$E(S_{n-1}) = \sigma_{proc} \cdot c_2 \sqrt{\frac{N_2}{N_2 - 1}}$$

$$Var(S_{n-1}) = \sigma_{proc}^2 \cdot \left(1 - c_2^2 \frac{N_2}{N_2 - 1}\right)$$

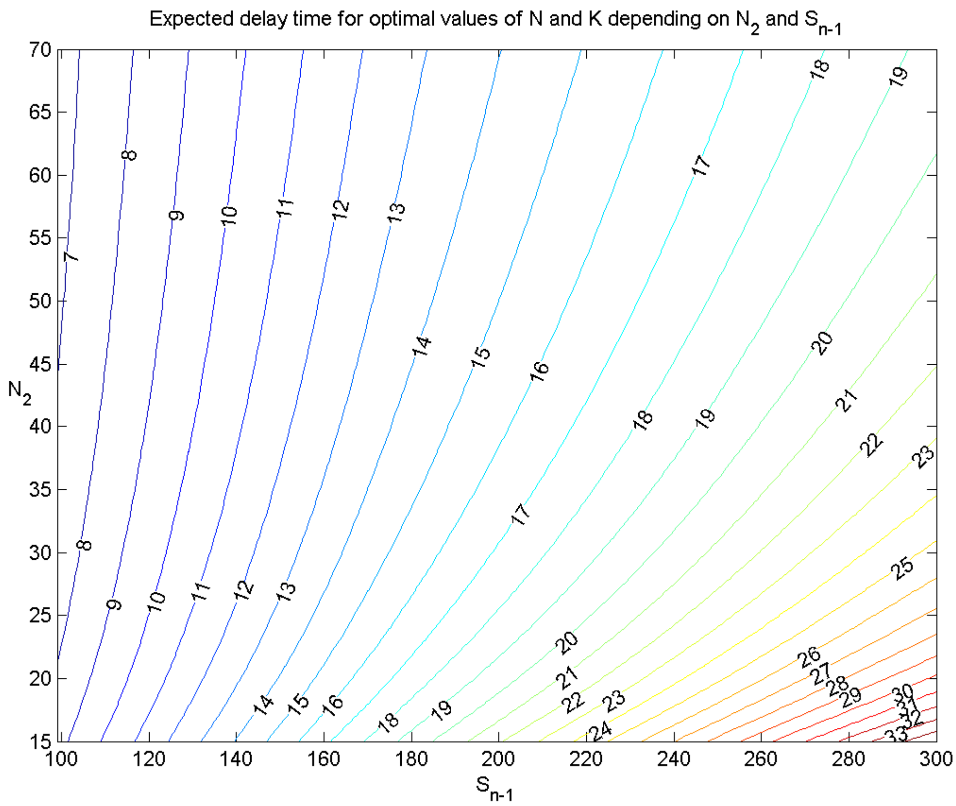
obtenidos también del teorema de Fischer y utilizarlos para establecer un intervalo mediante la acotación de Tchebycheff. Con esta aproximación se obtiene un N_2 mínimo igual a 74.

Por sentido práctico, puesto que se pretende utilizar un valor de N_2 bastante mayor que el mínimo necesario, **se utiliza en principio la primera aproximación y se deja su validez pendiente del comportamiento del test**.

Valores óptimos

Al igual que se hizo en el estudio del test no adaptable, pero con los nuevos intervalos de confianza para σ_{proc}, se puede calcular ahora el conjunto de valores óptimos K_{opt} y N_{opt} que minimizan el tiempo máximo de respuesta medio T_{max} del test. Esta terna de valores óptimos $\{K_{opt}, N_{opt}, T_{max}\}$ es adaptable y tomará un valor distinto en función del intervalo que se tenga en cada instante para σ_{proc} y en última instancia en función de N_2. Puesto que el parámetro N_2 es elegible, se tiene otro grado de libertad que nos permite reducir el intervalo de confianza para σ_{proc} en principio tanto como sea necesario acotando el tiempo T_{max}.

La gráfica siguiente muestra el valor de T_{max} para un test óptimo en función de los valores de S_{n-1} y N_2.

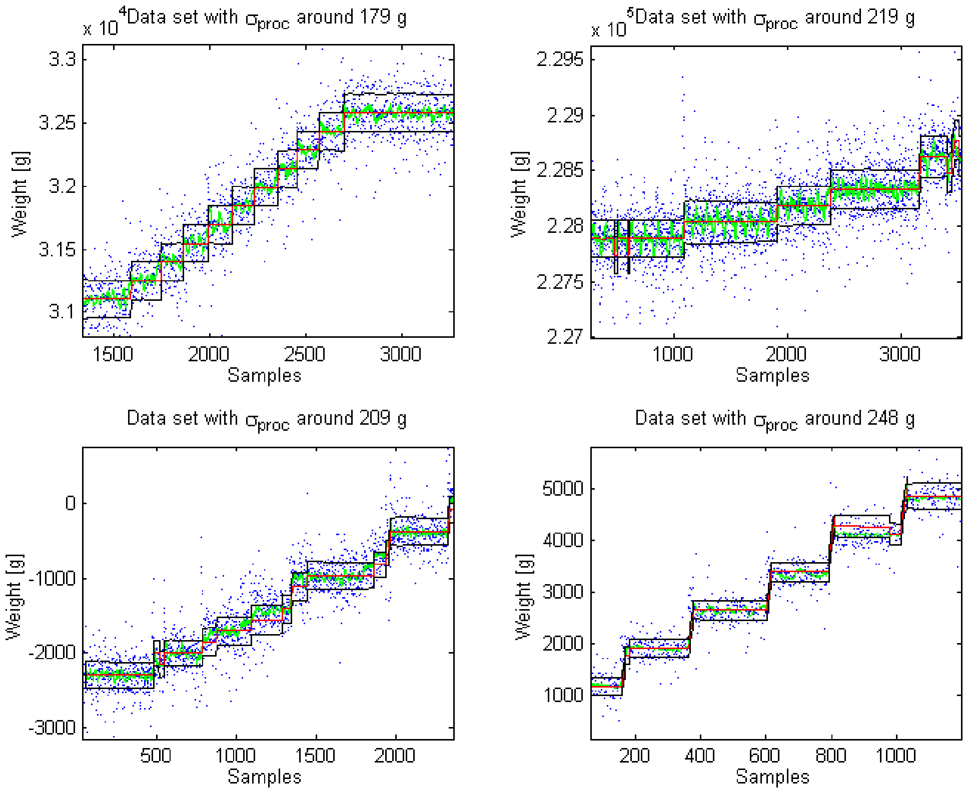


Puesto que no se tiene ninguna especificación acerca del tiempo de respuesta del test, es necesario elegir valores basándose en un sentido puramente práctico. Por un lado no interesan valores demasiado altos de N_2 que impliquen una carga computacional demasiado alta durante el cálculo de S_{n-1}, y por el otro, hay que limitar los tiempos de respuesta de forma que se aprecien respuestas inmediatas.

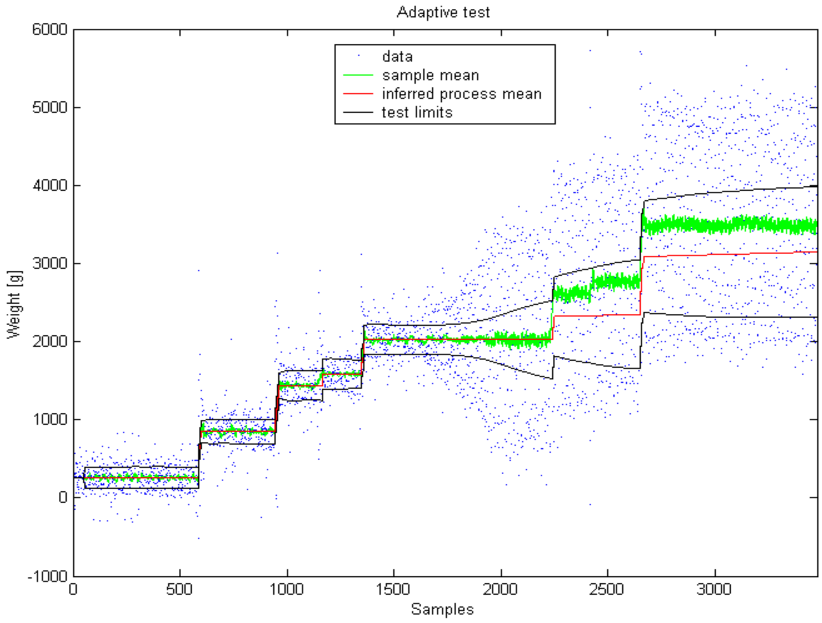
En este trabajo se ha considerado que menos de un segundo de tiempo de respuesta es un valor ya aceptable. Para asegurar esos resultados en el peor de los casos, según la gráfica anterior, es necesaria una $N_2 \geq 26$. Puesto que es un valor no muy alto, es factible duplicarlo, reduciendo así los tiempos de respuesta especialmente en los casos en los que S_{n-1} toma valores altos. Con este valor de N_2, el valor esperado de T_{max} es de medio segundo aproximadamente.

Resultados y otros problemas

Los resultados de este test son, según lo esperado, buenos para serie de datos con distintas varianzas. En las gráficas siguientes se observa que el test se ha adaptado a cada situación resultando siempre en cortos tiempos de respuesta.



La aplicación del test adaptable al caso de un experimento con vibraciones del terreno deja sin embargo bastante que desear. Como se muestra en la figura siguiente, la desviación estimada del proceso crece mucho al comenzar las vibraciones, mientras que la media muestral del proceso se mantiene dentro de unos límites relativamente estrechos.



Este mal funcionamiento del test se debe a que deja de cumplirse la relación:

$$E(S_{n-1}^2) = \sigma_{proc}^2$$

que solamente es válida para procesos estacionarios y que se está utilizando para estimar la desviación típica de la media muestral a través de:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_{proc}}{\sqrt{N}} = \frac{S_{n-1}}{\sqrt{N}}$$

En el siguiente apartado se propone una solución para este problema.

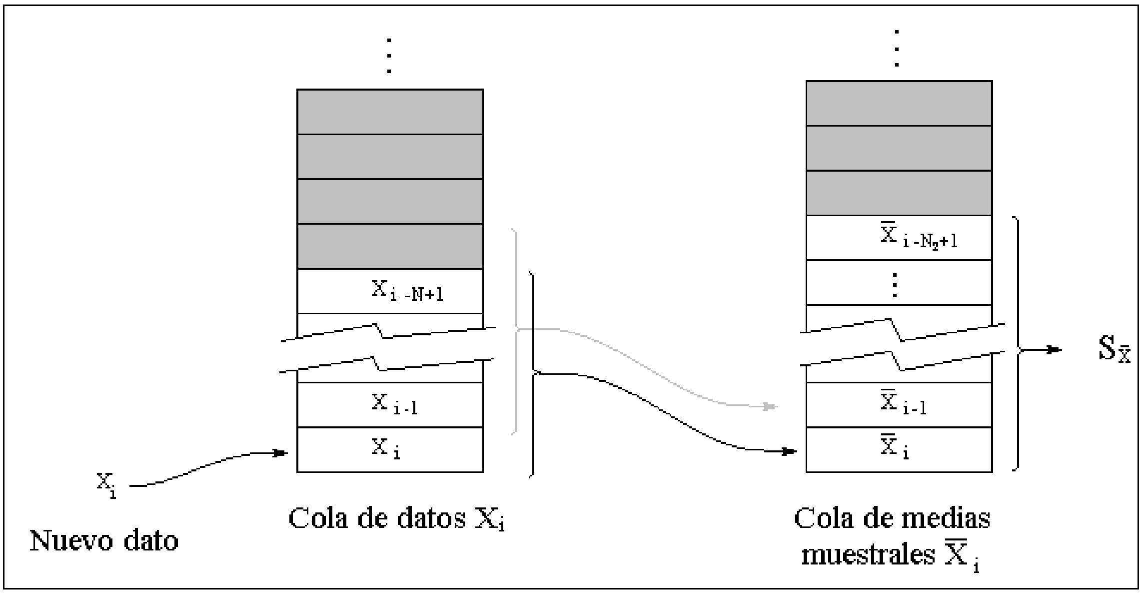
5.3 Segunda variación: El test de doble cola

La relación entre la desviación típica muestral y la desviación típica del proceso en el caso de una población no estacionaria cuyo valor medio esperado oscila a lo largo del tiempo se estudia en el documento principal de este proyecto. Se comprueba que las oscilaciones afectan mucho más a la desviación típica muestral del proceso $\hat{\sigma}_{proc}$ que a la desviación típica muestral de la media muestral $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$. Este hecho es lógico si se tiene en cuenta que el cálculo de la media muestral tiene un efecto de filtro paso-baja en las medidas del proceso.

Por otra parte, puesto que los límites de control se van a aplicar a la media muestral del proceso, no interesa el valor real de la desviación típica de la media del proceso estacionario subyacente, $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{est}}$, sino sólo la desviación típica de la media muestral del proceso no estacionario, $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{no-est}}$. El problema no es, por tanto, la no estacionareidad del proceso en sí, sino no poder calcular $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{no-est}}$ a partir de S_{n-1}. Se decide, por tanto, estimar $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{no-est}}$ directamente.

Para eso se modifica el test incluyendo una nueva cola que contendrá los N_2 valores de la media muestral. La desviación típica muestral de los valores de esta cola se usará como estimación directa de $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{no-est}}$ sin necesidad de dividir entre $\sqrt{N}$ como en el caso anterior.

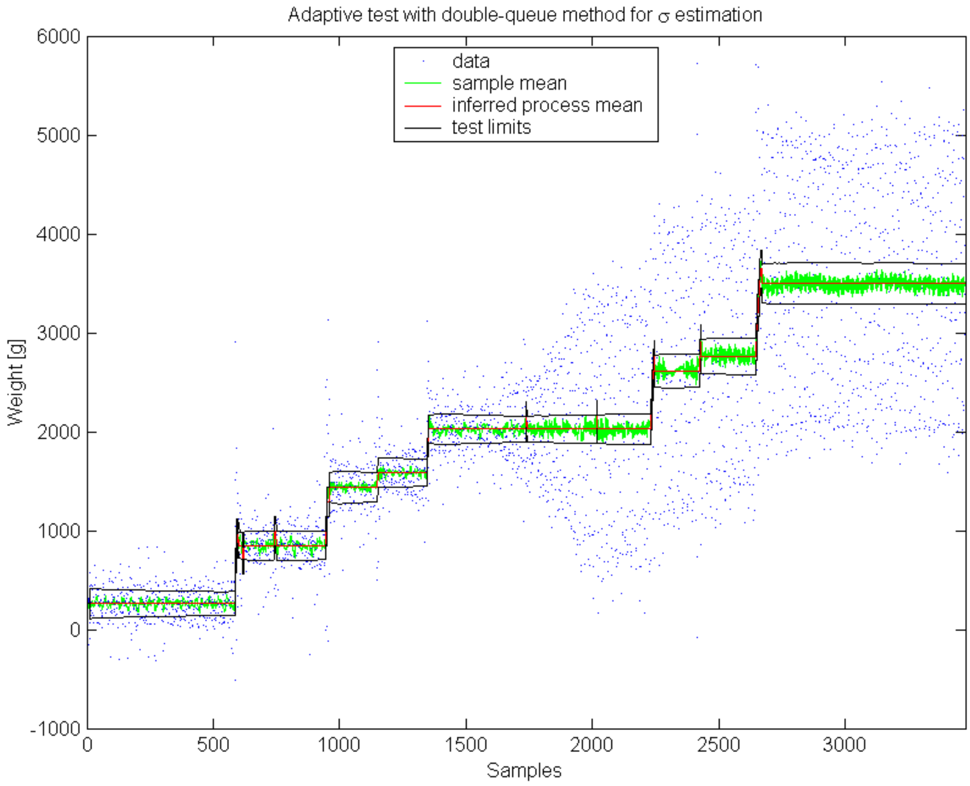
En cualquier caso, gracias al efecto paso-baja que tiene el cálculo de la media muestral, se tiene que $\hat{\sigma}_{\bar{x}_{no-est}}\sqrt{N}$ es mucho mejor estimador de la desviación típica del proceso que $\boldsymbol{S_{n-1}}$, por lo que será usada en el capítulo siguiente para estimar la no-estacionareidad del proceso y para elaborar un sencillo estadístico para la detección de eventos.



Esquema de la estimación directa de la desviación típica muestral de la media muestral del proceso con el sistema de doble cola.

Resultados

El comportamiento del test de doble cola es prácticamente idéntico al anterior en el caso sin vibraciones. En el caso con vibraciones los límites se adaptan según lo esperado a la desviación típica de la media muestral. Como se puede apreciar en la figura siguiente, la respuesta del algoritmo no varía al comenzar las vibraciones del terreno.


Adaptive test with double-queue method for σ estimation
data
sample mean
inferred process mean
test limits
Weight [g]
Samples
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
0
500
1000
1500
2000
2500
3000