3. SOLUCIONES ANALÍTICAS

3.1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En el proceso de fusión o de solidificación (cambio de fase), el calor se transfiere, por conducción desde la parte sólida (en el caso de fusión) o desde la líquida (en el caso de solidificación) presentándose una interfase que en el caso de los materiales puros es una superficie que cambia de fase a temperatura constante, mientras que en las mezclas, el cambio de fase se da en un rango de temperaturas.

El fenómeno de cambio de fase se trata como un problema con fronteras móviles, dado que a medida que el material cambia de fase, la interfase donde se presenta dicho cambio se desplaza en el espacio y como las propiedades de las dos fases en general son diferentes, la frontera del dominio sobre el cual se aplican las ecuaciones diferenciales se mueve.

A continuación, se muestra un esquema general de las ecuaciones que se aplican al fenómeno de cambio de fase y la forma como se desplaza la frontera de cada uno de los dominios:

- Se aplica una ecuación en la parte sólida y otra en la líquida.
- El dominio de las ecuaciones va cambiando con el tiempo debido al desplazamiento de la frontera de aplicación de cada una de ella (desplazamiento de la interfase).
- La diferencia entre el flujo de calor en la parte sólida y líquida es proporcional a la velocidad de desplazamiento de la interfase.

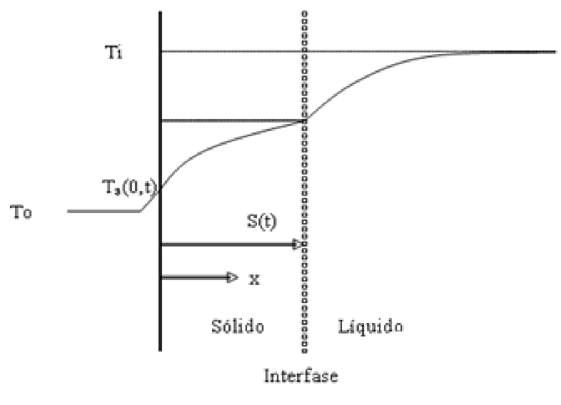


Figura 27. Esquema del desplazamiento de la interfase

Parte sólida: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_s \cdot \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x}\right) = \rho_s \cdot C_s \cdot \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial t}$$

Parte líquida: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_l \cdot \frac{\partial T_l(x,t)}{\partial x}\right) = \rho_l \cdot C_l \cdot \frac{\partial T_l(x,t)}{\partial t}$$

Interfase: $$k_s \cdot \frac{\partial T_s(S(t),t)}{\partial x} - k_l \cdot \frac{\partial T_l(S(t),t)}{\partial x} = \rho \cdot L \cdot \frac{dS(t)}{dt}$$

Como primera simplificación en se tiene la de que el material de cambio de fase está en unas condiciones tales que hace innecesario el uso de las ecuaciones de cantidad de movimiento debido a que, por ejemplo, se encuentra embebido en una matriz que impide los fenómenos de transporte de masa que puedan ocasionar las fuerzas convectivas. Por lo tanto a las dos fases (líquida y sólida) se les puede aplicar la ecuación de conducción de calor.

3.2. SOLUCIONES ANALÍTICAS

Sólo existen soluciones analíticas para un número limitado de casos, y dentro de estas soluciones analíticas se pueden distinguir dos casos fundamentales: las soluciones exactas y las aproximadas, siendo estas últimas las agrupadas principalmente por el problema de Stefan y que será tratado en un apartado más adelante.

Los casos que serán explorados con las soluciones analíticas son los que se enumeran a continuación:

- Temperatura superficial impuesta
- Temperatura impuesta en el aire

Estos dos casos comparten la característica de que el flujo de calor es unidimensional y la fase líquida es semi-infinita, es decir, que la frontera de la fase líquida no se encuentra en contacto con la sólida, se encuentra en el infinito.

3.2.1. Soluciones analíticas exactas

3.2.1.1. Temperatura superficial impuesta

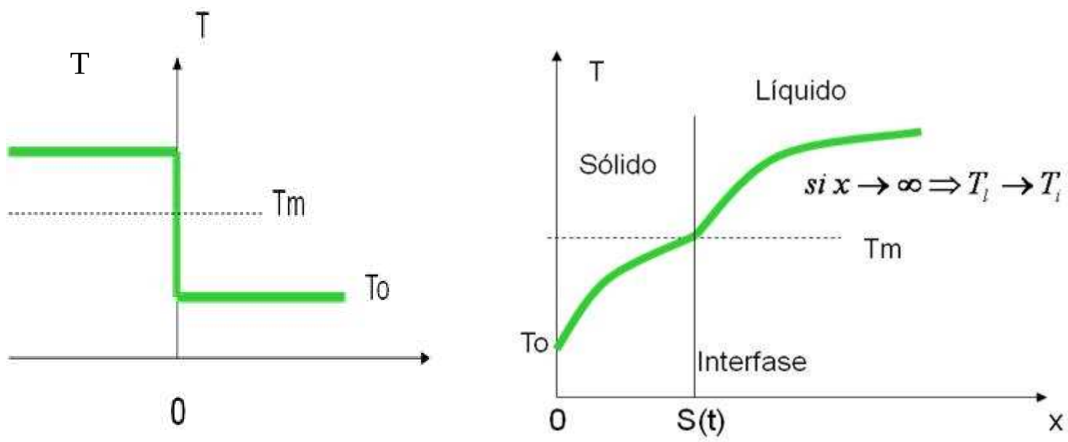
Este problema tiene solución exacta, se conoce como la solución de Neumann. Se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales mostradas en los fundamentos teóricos. A continuación se presentan los supuestos y las ecuaciones de con las que se puede solucionar.

Descripción del problema:

Se tiene un líquido a temperatura uniforme Ti mayor que la temperatura de solidificación Tm. En el tiempo t=0, la temperatura de su superficie desciende instantáneamente a una temperatura To menor que Tm, y esta temperatura se mantiene constante en el tiempo.

Supuestos:

- Medio semi-infinito
- Flujo unidimensional de calor
- Propiedades constantes
- Cambio de fase a temperatura constante



Figuras 28 y 29. Condición inicial y evolución de la temperatura

Para la parte sólida la temperatura es:

$$\frac{T_s(x,t) - T_0}{T_m - T_0} = \frac{\operatorname{erf}\left[x/\left(2\sqrt{\alpha_s \cdot t}\right)\right]}{\operatorname{erf}[\lambda]}$$

Para la parte líquida la temperatura es:

$$\frac{T_l(x,t) - T_i}{T_m - T_i} = \frac{\operatorname{erfc}[x/(2\sqrt{\alpha_l \cdot t})]}{\operatorname{erfc}\left[\lambda\sqrt{\alpha_s/\alpha_l}\right]}$$

El parámetro λ es función de la posición de la interfase s(t):

$$\lambda = s(t)/\left(2\sqrt{\alpha_s \cdot t}\right)$$

La posición de la interfase se obtiene a partir de la siguiente ecuación siendo *erf* es la función de error y *erfc* la función de error complementaria:

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}\,[\lambda]} + \frac{k_l}{k_s}\sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_l}}\left[\frac{T_m - T_i}{T_m - T_0}\right]\frac{e^{-\lambda(\alpha_s/\alpha_l)}}{\operatorname{erf}\left[\lambda\sqrt{\alpha_s/\alpha_l}\right]} = \frac{\lambda L\sqrt{\pi}}{C_s \cdot (T_m - T_0)}$$

La solución se puede obtener con un proceso iterativo.

3.2.1.2. Temperatura impuesta en el aire (flujo convectivo)

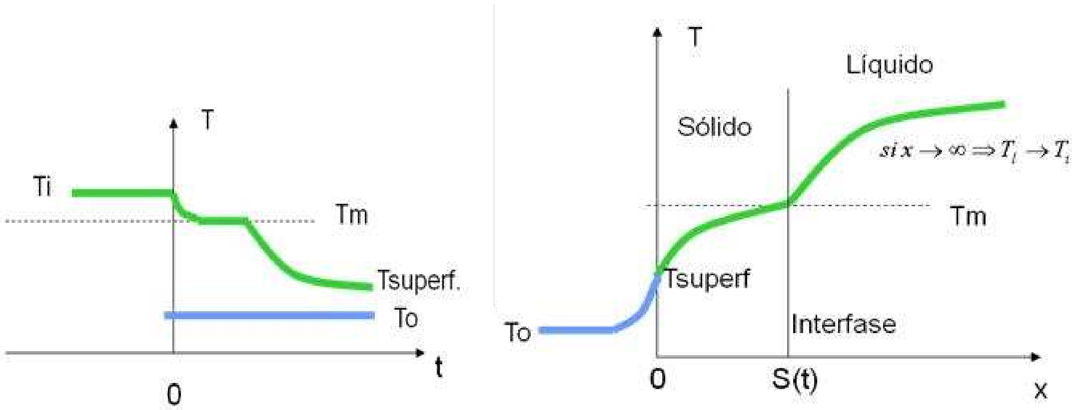
Este problema tiene solución aproximada utilizando el método del balance integral de calor (Goodman, 1958).La descripción y los supuestos del problema son:

Descripción del problema:

Se tiene un líquido a temperatura uniforme Ti mayor que la temperatura de solidificación Tm. En el tiempo t=0, es expuesto a un medio (aire por ejemplo) que se encuentra a una temperatura To menor que Tm, manteniéndose constante esta temperatura en el tiempo.El coeficiente convectivo se mantiene constante.

Supuestos:

- Medio semi-infinito
- Flujo unidimensional de calor
- Propiedades constantes
- Cambio de fase a temperatura constante.



Figuras 30 y 31. Condición inicial y evolución de la temperatura

Se obtiene por medio de la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$T(x,t) = T_m + a \cdot [x - s(t)] + b \cdot [x - s(t)]^2$$

$$a = \frac{-(1+X) + \sqrt{(1+X)^2 + (\beta - 1) \cdot X) \cdot (X+2)}}{\frac{k}{2 \cdot h \cdot (T_m - T_i)} (\beta - 1) \cdot X \cdot (X+2)}$$

$$b = -\frac{(\beta - 1)}{4 \cdot (T_m - T_i)} a^2$$

$$X(t) = \frac{h}{k_s} s(t)$$

$$St = \frac{C \cdot (T_m - T_0)}{L}$$

$$\beta = 1 + 2 \cdot St$$

$$\vartheta = \frac{h^2 \cdot (T_m - T_0) \cdot t}{k_s \cdot \rho_s \cdot L}$$

$$\vartheta = \frac{1}{12\beta} \cdot \Bigg\{ [(1+2\beta) + (2+\beta) \cdot X] \cdot [1 + \beta \cdot X \cdot (2+X)]^2 - \frac{2(\beta-1)}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{[1+\beta \cdot X \cdot (2+X)]^{1/2} + [(1+X) \cdot \beta]^{1/2}}{1+\sqrt{\beta}} - 4\beta \cdot (\beta - 1) \ln \frac{-1 + \beta \cdot (2+X) + [1+\beta \cdot X \cdot (2+X)]^{1/2}}{2\beta} + (\beta^2 + 5\beta)\frac{X^2}{2} + 2(\beta^2 + 4\beta - 2) \cdot X - (1+2\beta) \Bigg\}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones se obtiene el valor de X para cada instante de tiempo y con dicho valor ya se puede obtener fácilmente el campo de temperaturas.

3.2.1.3. Comentarios sobre las soluciones exactas

- Las soluciones analíticas existen para problemas sencillos.
- Algunos de estos problemas no son realistas, por ejemplo, en el caso de temperatura superficial impuesta el cambio instantáneo de temperatura es estrictamente imposible y puede ser aceptado como aproximación en sólo algunos casos.
- Estas soluciones requieren que las propiedades del material sean constantes.
- La utilidad de estos problemas es que sirven para calibrar los métodos de simulación.

3.2.2. Soluciones analíticas simplificadas. Solución de Stefan

La solución de Stefan es una aproximación en la que se supone que el fenómeno transitorio es dominado por el cambio de fase y por tanto las fases líquida y sólida se encuentran en estado estable. Debido a este supuesto se desprecia el almacenamiento de calor por el efecto del cambio de temperatura de cualquiera de las dos fases, por lo que el problema de Stefan establece el límite inferior de energía almacenada en un fenómeno de cambio de fase, además de establecer el límite de velocidad para la ocurrencia de dicho cambio de fase.

Para la aplicación del problema de esta solución es fundamental el uso del número de Stefan que está definido como:

$$\mathrm{St} = \frac{\mathrm{C} \cdot (\mathrm{T_m} - \mathrm{T_0})}{\mathrm{L}}$$

Este número establece una relación entre la capacidad térmica del material en estado sólido o líquido y su calor latente. Para números pequeños de St, la solución de Stefan se aproxima bastante bien a la solución exacta. Si St=0, la solución de Stefan es exacta.

3.2.3. Temperatura superficial impuesta (solución de Stefan)

El planteamiento es el mismo que para la solución exacta:

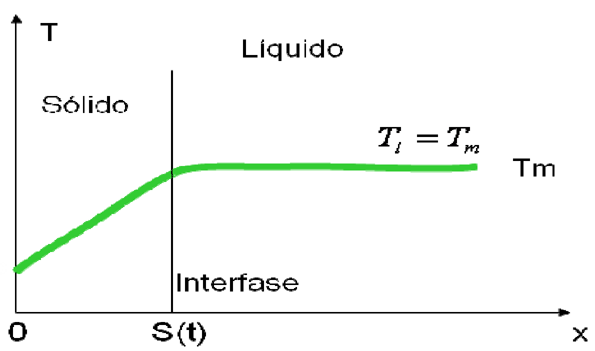


Figura 32. Evolución de la temperatura en la solución de Stefan

Para desarrollar la solución de Stefan, es necesario suponer que el líquido se encuentra a una temperatura inicial igual a la de solidificación.

La posición de la interfase es:

$$s(t) = \sqrt{2\frac{k_s}{\rho_s \cdot L}(T_m - T_0) \cdot t}$$

La temperatura de la parte sólida:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{T_m - T_0}{s(t)} \cdot x$$

El flujo de energía total de la superficie durante el tiempo que la capa de espesor X congela es simplemente el calor latente. Así que este método no tiene en cuenta el calor sensible, aunque la temperatura de la capa congelada decrementa con el tiempo. Esto contrasta con la solución exacta, con T_0=T_f, donde se puede ver que el calor eliminado es igual al calor latente más el calor sensible involucrados en la bajada de temperatura de la capa congelada. Esta limitación está directamente asociada con asumir el número de Stefan igual a cero.