# 3.- Modelado del problema.

Para el desarrollo de las ecuaciones se han seguido dos fuentes principales:

- Modelos de equilibrado de líneas, Christian Becker y Armin Scholl (2008).

- Modelos "milk-run" de cadenas cerradas de montaje de automóviles, como el desarrollado por los profesores Timon Du, F.K. Wang y Pu-Yun Lu (2006).

## 3.1. Primer modelado.

### 3.1.1. Definición del problema

A continuación se describen las variables del problema, los datos, los parámetros, su función objetivo y sus restricciones.

Variables del problema

$x_{ij}$ ≡ toma valor 1 si la tarea *j* se realiza en el programa o estación de trabajo *i*.

$s_{ij}$ ≡ toma valores enteros y su valor es el intervalo de tiempo entre el inicio de la jornada laboral y el inicio de la tarea *j* dentro de la estación de trabajo *i*.

$w_{v,igkj}$ ≡ toma valor 1 si al término de la tarea *g* del programa *i* se trasladan *v* recursos desde el programa *i* hasta el programa *k* para realizar la tarea *j* y toma valor cero en otro caso. El índice *v* toma valores desde 1 hasta $v_{max}$. En este caso, el mayor número de recursos asignados a una tarea, $v_{max}$, es 4.

F ≡ simboliza el número total de recursos empleados en el día *l*. Por analogía con los problemas de maximización de flujo a coste mínimo, F tomará el valor de los recursos que se asignen a las primeras tareas del día y supondrá el flujo de recursos de un nodo ficticio de salida S.

$f_{ij}$ ≡ toma el valor de los recursos que la tarea *j* del programa *i* recibe directamente del nodo ficticio S.

$h_{ij}$ ≡ toma el valor de los recursos que desde el puesto de trabajo i al término de la tarea j se dirigen al nodo entrada o sumidero de recursos.

Datos del problema

$p_i \equiv$ unidades del producto del programa *i* a producir en un periodo de un año.

$l_i \equiv$ número de días laborables del programa *i* en el ejercicio anual.

$a_{ij} \equiv$ toma valor 1 si se realiza la tarea *j* en el programa o estación de trabajo *i* y 0 en otro caso.

$d_{ij} \equiv$ indica si la tarea *j+1* del programa *i* se debe de ser consecutiva a la tarea *j* si toma valor 1 y en otro caso, vale 0.

$t_{ij} \equiv$ tiempo de ejecución de la tarea *j* en el programa o estación de trabajo *i*.

$r_{ij} \equiv$ número de recursos necesarios para realizar la tarea *j* del programa o estación de trabajo *i*.

$e_{ik} \equiv$ tiempo empleado en desplazarse una unidad de recurso desde el programa o estación de trabajo *i* hasta el programa o estación de trabajo *k*.

$t_{ij,max} \equiv$ tiempo máximo para que la tarea *j* del programa o estación de trabajo *i* se realice.

$A_i(j) \equiv$ conjunto de tareas del programa *i* que se realizan previamente a la tarea *j*.

$D_i(j) \equiv$ conjunto de tareas del programa *i* que se realizan después de la tarea *j.*

Parámetros del problema

$c_l \equiv$ periodo del día laborable *l* o máximo tiempo para terminar la última tarea de la jornada laboral. Se expresa en minutos.

$\alpha \equiv$ peso de las variables $s_{ij}$.

$\gamma \equiv$ peso de la variable *F*.

Ambos parámetros, $\alpha$ y $\gamma$, permiten ajustar la solución según dos enfoques diferentes. Si prima terminar lo antes posible las tareas, $\alpha > \gamma$, mientras que si el objetivo principal es la reducción de personal (y la consiguiente reducción de costes), $\gamma > \alpha$.

Función objetivo y restricciones del problema

$$\min \quad \alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} s_{ij} + \gamma\cdot F$$

La función objetivo se enfoca a reducir tanto el flujo *F* de recursos a contratar para cada día como a reducir el momento $s_{ij}$ en que terminan las tareas. Ambas alternativas se ponderan con unos pesos $\alpha$ y $\gamma$ que ya se explicaron anteriormente.

(1) $\quad s_{ij} + t_{ij} \leq t_{ij,max} \qquad \forall j=1,\ldots,n,\ \forall i=1,\ldots,m$

Con esta restricción se pretende asegurar que toda tarea se termina antes de un tiempo predeterminado. Por defecto, el tiempo máximo $t_{ij,max}$ será el final de la jornada: 480 minutos. El valor de $t_{ij,max}$ se puede adaptar a las necesidades de producción y tomar el valor que determine la dirección de la empresa A.

(2) $\quad s_{ig} + t_{ig} + \sum_{v} w_{v,igkj}\cdot e_{ik} \leq (1-\sum_{v} w_{v,igjk})\ M + s_{kj} \qquad \forall g \in P(j),\ \forall j=1,\ldots,n,$

$\forall i,k=1,\ldots,m,\ k\neq l,\ \forall v=1,2,3,4.$

Esta restricción define la relación de precedencia entre tareas de distintos programas o estaciones de trabajo. Además de la duración $t_{ij}$ de la tarea, se considera el tiempo necesario para trasladar los recursos de la estación de trabajo precedente *i* hasta la siguiente *k* mediante el producto $w_{v,igkj}\cdot e_{ik}$, donde $e_{ik}$ es el tiempo que emplea un recurso en desplazarse de un puesto de trabajo *i* a un puesto de trabajo *k*.

La relación en tiempo (minutos) entre unos programas y otros, $e_{ik}$ queda recogida en la siguiente tabla 3.1:

| $e_{ik}$ (min) | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 4 | 1 | 3 | 3 | 6 | 4 | 8 | 5 |
| B | 4 | 0 | 2 | 2 | 3 | 4 | 7 | 5 | 6 |
| C | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 3 | 6 | 5 |
| D | 3 | 2 | 2 | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 4 |
| E | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 5 | 5 | 4 |
| F | 6 | 4 | 3 | 3 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 |
| G | 4 | 7 | 3 | 4 | 5 | 3 | 0 | 2 | 2 |
| H | 8 | 5 | 6 | 6 | 5 | 2 | 2 | 0 | 3 |
| I | 5 | 6 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 3 | 0 |

**Tabla 3.1. Relación de tiempo (en minutos) necesarios para ir desde un nodo de trabajo a otro.**

(3) $s_{ig} + t_{ig} + M\cdot(1-d_{ig}) \geq s_{ij}$ $\forall g \in D(j), \forall j=1,\ldots,n, \forall i=1,\ldots,m$

Esta restricción, junto con la restricción (4), consigue asegurar que tareas consecutivas de un mismo programa o estación de trabajo tienen tiempos de ejecución consecutivos.

Si la tarea *g*, precedente de la tarea *j* para una misma estación de trabajo *i*, se debe de realizar de forma consecutiva, $d_{ig} = 1$, y por tanto, $(1-d_{ig}) = 0$ y la restricción resulta $s_{ig} + t_{ig} \geq s_{ij}$.

Por otro lado, analizamos como sería la restricción (4): para dos tareas *g* y *j* que se realizan en la misma estación de trabajo *i*, el valor del tiempo empleado en transportar recursos desde donde se realiza la tarea *g* a donde se realiza la tarea *j*, $f_{ii}$ = 0. Por tanto, la restricción resultaría $s_{ig} + t_{ig} \leq s_{ij}$.

Al tener que ser $s_{ig} + t_{ig}$ mayor o igual y menor o igual que $s_{ij}$ por la restricción (5) y por la restricción (4), nos aseguramos de que finalmente $s_{ig} + t_{ig} = s_{ij}$ para tareas sucesivas de un mismo programa *i*.

(4) $s_{ij} \leq M \cdot a_{ij}$ $\forall j=1,\ldots,n,\ \forall i=1,\ldots,m$

Con esta restricción se consigue que las tareas que no se realizan para cada día que se resuelve el problema, tengan un tiempo de inicio $s_{ij}$ = 0 para que no penalicen la función objetivo.

(5) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{g\in A(j)} \sum_{v=1}^{v_{\max}} v \cdot w_{v,igkj} + f_{kj} \geq a_{kj} \cdot r_{kj}$ $\forall g \in$ A(j), $\forall j=1,\ldots,n$, $\forall l,k=1,\ldots,m$, $\forall v=1,\ldots,v_{max}$

Esta restricción impone que el número de recursos que se dirigen a la estación de trabajo *k* para realizar la tarea *j* desde las *g* tareas predecesoras realizadas en las estaciones de trabajo *i* sea siempre igual o superior al número de recursos $r_{kj}$ necesarios. En definitiva, las estaciones de trabajo se abastecen adecuadamente de recursos.

(6) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in D(g)} \sum_{v=1}^{v_{\max}} v \cdot w_{igkj} + h_{ig} \leq a_{ig} \cdot r_{ig}$ $\forall g \in$ P(j), $\forall j=1,\ldots,n$, $\forall l,k=1,\ldots,m$

Con esta restricción se asegura que el número de recursos que se mandan a *g* tareas sucesoras de la tarea *j* sea siempre menor o igual que los recursos utilizados para completar la tarea *j* de la estación de trabajo *i*. Si la tarea *j* no se realiza, evidentemente, no se redistribuyen recursos desde esa tarea.

(7) $$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}h_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}f_{ij}$$ $\forall i=1,\dots,m$, $\forall j=1,\dots,n_i$,

Con las restricciones (7) se restringe que el número de recursos que sale del nodo origen y del nodo entrada son iguales.

Es cierto que no se crea un nodo sumidero para recoger todos los recursos empleados. Sin embargo los resultados muestran que con las restricciones consideradas, en especial los grupos (5) y (6), se consigue que lleguen los recursos a las estaciones de trabajo que lo requieran.

### 3.1.2. Consideraciones

1. No se repiten dos tareas en el mismo día.

La producción del sector aeronáutico, casi artesanal, no prevee producciones mayores a las 200 unidades anuales. Aunque el número de unidades a producir rebase el número de días laborables en un año, la gran mayoría de movimientos de logística interna llevan un mínimo de 2 o 3 unidades de producto; por lo tanto, no se realizará cada tarea más de una vez al día.

2. Se ha eliminado la flexibilidad horaria.

Hasta ahora, los recursos actualmente pueden adoptar un horario de trabajo diurno, vespertino o nocturno. Hay dos motivos para la eliminación de ducha flexibilidad:

Por un lado, resulta demasiado ambicioso intentar dotar a un modelo matemático aplicado a un caso particular de semejante flexibilidad.

Por otro lado, si el trasfondo de este proyecto es mejorar la optimización del empleo de recursos, se debe de seguir aquella directiva acorde con reducción de recursos y facilitar la dispersión de los recursos en la franja horaria va en contra.

3. Planificación diaria es dato.

Para la realización del modelo es indispensable que desde el departamento de producción o de organización preparen un plan de trabajo para los recursos de Logística Aeronáutica. Este plan de trabajo debe de estar coordinado con la planificación de producción de Andaluza de Aeronáutica.

4. Para implementar las restricciones, éstas se tienen que reescribir ordenando las variables a la izquierda del signo y los términos constantes a la derecha del mismo de la siguiente forma:

(1') $s_{ij} \leq t_{ij,max} - t_{ij}$

(2') $s_{ig} + \sum_{v} w_{v,igkj} (e_{ik} + M) - s_{kj} \leq - t_{ig} + M$

(3') $s_{ig} - s_{ij} \geq - M\cdot(1-d_{ig}) - t_{ig}$

(4') $s_{ij} \leq M\cdot a_{ij}$

(5') $\sum_{i=1}^{n} \sum_{g\in A(j)} \sum_{v=1}^{v_{max}} v \cdot w_{v,igkj} + f_{kj} \geq a_{kj} \cdot r_{kj}$

(6') $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in D(g)} \sum_{v=1}^{v_{max}} v \cdot w_{igkj} + h_{ig} \leq a_{ig} \cdot r_{ig}$

(7') $F - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} = 0 = F - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} f_{ij}$

## 3.2. Modelado revisado

### 3.2.1. Necesidad de un modelado revisado.

La revisión del modelado es una consecuencia de las limitaciones de cálculo de las herramientas utilizadas. El primer modelado matemático se revisa para reducir sus dimensiones y hacer más fácil su manipulación.

El primer modelado preparado en una tabla de Excel® tenía dimensiones de unas 10000 filas por unas 50 columnas. El límite de de Excel® se encuentra en 50 variables, mientras que dicho modelo sobrepasaba holgadamente las 4000 variables.

El mismo modelado preparado con la herramienta Matlab® agota la memoria virtual de un ordenador de 2 gigabytes de memoria RAM. Se necesita, por tanto, un modelado que describa el modelo con un menor número de variables.

La causa de un número tan elevado de variables se encuentra en el grupo de restricciones (2'):

En el primer modelado hay: 194 tareas posibles a realizar por los recursos de Logística Aeronáutica, 194 variables $s_{ij}$, 194x4 variables $w_{v,igkj}$ por cada variable $s_{ij}$ y se necesitan $179^2$ restricciones para completar el grupo de restricciones (2') del punto 3.1.2: su sub-matriz asociada tiene 179 filas y 130000 variables, con unos 23 millones de coeficientes. La memoria que ocupa, a 8 bytes por coeficiente, es de unos 220 megabytes de memoria e incapaz de ser manipulada un ordenador corriente.

Por tanto, se debe revisar el modelado para reducir, en lo posible, el número de variables manteniendo la funcionalidad del mismo.

3.2.2. Cambios en el modelado revisado.

En primer lugar, se omiten las restricciones (1') del punto 3.1.2 porque al ser $\sum_i \sum_j s_{ij}$ parte de la función a minimizar, son redundantes.

En segundo lugar, se producen cambios en las variables. Por un lado, se eliminan las variables $x_{ij}$ y por otro, se sustituyen las variables $w_{v,igkj}$, que suponen 4 variables por cada tarea, por una única variable $v_{igkj}$.

Para eliminar las variables $x_{ij}$ se crean matrices de coeficientes que sólo contemplen las variables relacionadas con las tareas a realizar en el horizonte temporal determinado: por defecto, un día laborable. Posteriormente se puede modificar el horizonte temporal según las necesidades.

Este nuevo enfoque consigue que la subrutina de Matlab® a crear maneje coeficientes relacionados con unas 50 tareas diarias en lugar de las relacionadas con las 194 tareas totales. De mi experiencia en la empresa y los datos de producción anual, se extrae la cifra de una media de 50 tareas diarias a realizar. Recordar que cuando se implemente el modelo a un caso real, los datos de tareas a realizar los deberá de facilitar el departamento de producción correspondiente.

3.2.3. Descripción del modelo revisado.

En el modelo revisado final, se redefine significado de algunas de las variables. Repasando el significado de cada una de ellas:

$f_{ij}$ ≡ toma valor 1 si la tarea j del programa i recibe recursos desde un nodo imaginario fuente denominado F y cero en otro caso.

$h_{ij}$ ≡ toma valor 1 si la tarea j del programa i destina, al término de ésta, sus recursos a un nodo imaginario sumidero denominado S y cero en otro caso.

$s_{ij}$ ≡ toma valores enteros y su valor es el intervalo de tiempo entre el inicio de la jornada laboral y el inicio de la tarea *j* dentro de la estación de trabajo *i*.

F ≡ simboliza el número de tareas que por el que entran o salen recursos del circuito de logística interna.

$v_{igkj}$ ≡ toma valor 1 si se destinan los recursos de la tarea g del programa i a la tarea j del programa k al término de la primera y cero en otro caso.

Se ha omitido la variable $w_{igkj}$ pues al cambiar la interpretación de las variables $h_{ij}$ y $f_{ij}$, se pueden reescribir las condiciones de flujo a través de un nodo sin ellas.

A continuación, el modelo revisado del circuito de logística interna:

$$\min \quad \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} s_{ij} + \gamma \cdot F$$

$$\text{s.a.} \quad s_{ig} + e_{ik} + t_{ig} + v_{igkj} \cdot M \leq s_{kj} + M \qquad \text{(I)}$$

$$\sum_{k,j} v_{igkj} \cdot r_{ig} + h_{ig} = \sum_{i,g} v_{igkj} \cdot r_{ig} + f_{kj} \cdot r_{kj} \qquad \text{(II)}$$

$$\sum_{i,g} v_{igkj} \cdot r_{ig} + f_{kj} \geq r_{kj} \qquad \text{(III)}$$

$$v_{igkj} + v_{kjig} \leq 1 \qquad \text{(IV)}$$

$$F = \sum_{i,j} f_{ij} \qquad \text{(V)}$$

$$F = \sum_{i,j} h_{ij} \qquad \text{(VI)}$$

$$s_{ij} + t_{ij} \leq a_{ij} \qquad \text{(VII)}$$

$s_{ij} \geq d_{ij}$ (VIII)

$F \geq \min (r_{ij})$ (IX)

$s_{ij}, v_{igkj}, f_{ij}, h_{ij}, F \geq 0$

Respecto a los pesos de la función objetivo, se destaca su flexibilidad para adaptarse a cada dos políticas diferentes de empresa: bien reducir el número de recursos empleados ($\gamma >> \alpha$) o bien el tiempo de ejecución de las tareas ($\alpha > \gamma$).

Con el grupo (I) de restricciones se genera la condición a cumplir entre tareas sucesivas para que no se solapen en el tiempo. Es prácticamente igual a la del modelo inicial.

Las restricciones (II) y (III) son las que aseguran que el flujo de entrada y el flujo de salida de cada puesto de trabajo para cada tarea son iguales entre sí y siempre en número suficiente para realizar la tarea.

El grupo de restricciones (IV) es nuevo y su objetivo es impedir que el flujo de recursos sea de ida y vuelta.

Las restricciones correspondientes a (V) y (VI) son análogas a las restricciones (7’) del modelo inicial. Se asegura con ellas la uniformidad de flujo que sale del nodo fuente F y el flujo que entra en el nodo sumidero S.

Se han introducido dos grupos de restricciones, los (VII) y (VIII), muy relacionados con el (1’) del primer modelo. Su misión es considerar las limitaciones horarias de algunas tareas, como por ejemplo, la recepción y entrega de materiales que dependerá de los horarios acordados con las empresas transportistas. Dotan de mayor versatilidad al modelo y posibilitan el ajuste de las tareas a un horario determinado.

La última restricción, la (IX), se ha añadido por cuestiones meramente matemáticas: si queremos minimizar F, y entre las tareas se pueden alimentar entre sí de recursos, como un anillo cerrado. Con esta restricción se rompe el anillo y se asegura un inicio y un fin del circuito.

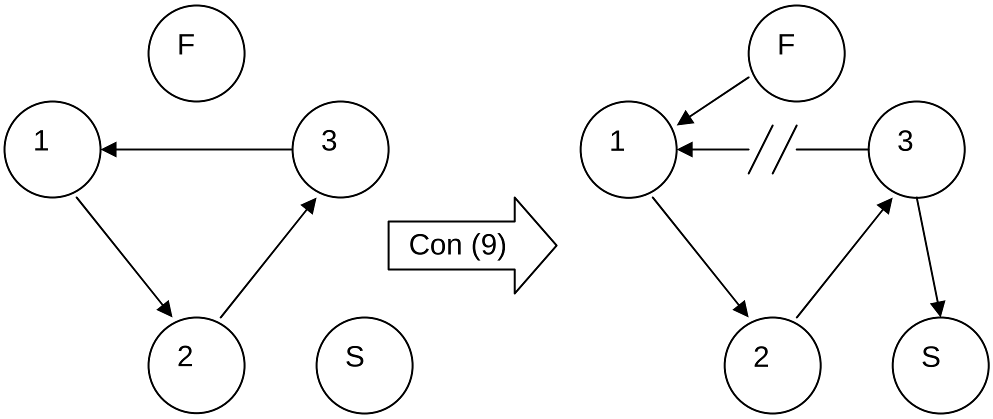


**Figura 3.1. Comparación de resultados sin el empleo de la restricción (IX) y con el empleo de la misma.**