

## Capítulo 2

# Ecuaciones

En este capítulo se deducirán las ecuaciones que gobiernan el problema, aplicando las leyes de Newton a cada rebanada infinitesimal del conducto. Las ecuaciones generales así obtenidas se particularizan a continuación para el caso de sistemas conducto-fluido cuyo movimiento permanece contenido en un plano y condiciones en los extremos del tipo empotrado-libre. Una vez introducidos los parámetros y variables adimensionales apropiados, el sistema de ecuaciones integrodiferenciales que gobiernan el problema se discretiza haciendo uso de la regla del punto medio y de diferencias centradas y, seguidamente, se reduce a un sistema de dimensión menor mediante el método de *Ritz-Galerkin* (véase [14]) que nos permite proyectar las ecuaciones discretizadas sobre un espacio de funciones de forma, lo que permite imponer las condiciones de contorno adecuadas y eliminar frecuencias espúreas inherentes a la discretización original. Las ecuaciones de movimiento resultantes para las coordenadas generalizadas asociadas a las funciones de Galerkin se formulan en forma matricial y se procede a su resolución numérica.

### 2.1. Ecuaciones generales

Las ecuaciones que gobiernan el sistema se obtienen aplicando las leyes de Newton sobre un elemento infinitesimal como se muestra en las figuras 2.1 y 2.2. Si  $M$  y  $m$  denotan la masa por unidad de longitud del fluido y del conducto, respectivamente, es fácil ver que las ecuaciones que expresan los balances de fuerzas y de momentos para un elemento de longitud infinitesimal  $ds$  que contiene tanto el fluido como las paredes del conducto se escribe como

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial s} + (m + M) \vec{g} = M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

y

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} + \vec{\tau} \wedge \vec{Q} = 0, \quad (2.2)$$

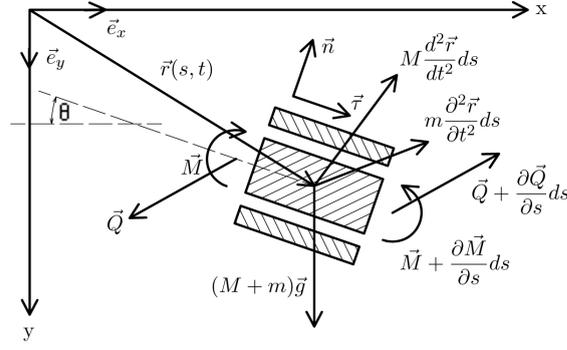


FIGURA 2.1: Balance de fuerzas y momentos aplicado sobre elemento infinitesimal de fluido-conducto.

donde  $\vec{g}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{Q}$  y  $\vec{M}$  son el vector gravedad, de posición, fuerzas y momentos, respectivamente. Nótese que debido al movimiento relativo entre el fluido y el conducto, que se supone caracterizado por una velocidad  $U(t)$  uniforme en cada sección del conducto, es necesario considerar el operador derivada sustancial en el primer término del segundo miembro de la ecuación (2.1). Dicho operador se escribe en términos de las variables del problema  $\vec{r}(s, t)$  y  $U(t)$  como

$$M \frac{d^2}{dt^2} = M \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2MU \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} + MU^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + M\dot{U} \frac{\partial}{\partial s}, \quad (2.3)$$

donde el primer término representa la fuerza de inercia de la aceleración de arrastre y el resto representan las fuerzas de inercia asociadas al movimiento relativo, es decir, Coriolis, centrípeta y aceleración relativa, respectivamente.

Además para cerrar el problema es necesario estipular una ley de comportamiento del conducto que relacione el momento flector  $\vec{M}$  con la deformación del conducto definida por la curvatura de la línea media del mismo,  $\kappa$ . Como ya se ha apuntado en el capítulo anterior, se supondrá una ley lineal de la forma

$$\vec{M} = EI\kappa\vec{b} \quad (2.4)$$

donde  $EI$  es la rigidez a flexión del conducto. La hipótesis expresada en la ecuación (2.4) resulta plausible si el conducto es muy esbelto.

Por otro lado, el balance de fuerzas para un elemento de fluido aislado de longitud infinitesimal  $ds$  proyectado en la dirección tangente mostrado en la figura 2.2 nos lleva a

$$\frac{-\partial P \vec{\tau}}{\partial s} \cdot \vec{\tau} - f_f - M \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \cdot \vec{\tau} + M \vec{g} \cdot \vec{\tau} = M\dot{U}, \quad (2.5)$$

donde  $P$  es la fuerza tangente al conducto debida a la presión estática,  $f_f$  son las fuerzas de rozamiento entre el fluido y las paredes del conducto.

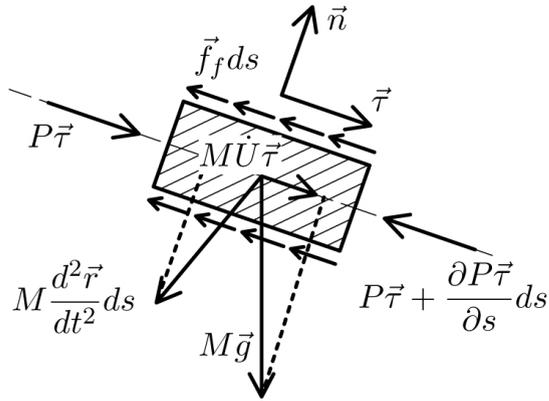


FIGURA 2.2: Balance de fuerzas en dirección tangente al conducto aplicado sobre elemento infinitesimal de fluido.

## 2.2. Conducto empotrado-libre bidimensional

En la sección 2.1 se han establecido las ecuaciones que gobiernan el movimiento del conducto  $\vec{r}$  y del fluido  $U$ . En este trabajo, se considerará sólo el caso bidimensional en el que el movimiento del conducto tiene lugar en el plano  $x - y$ . Entonces, si  $s$  es la longitud de arco recorrida desde el empotramiento, donde  $s = 0$ , el vector de posición se puede escribir como

$$\vec{r}(s, t) = x(s, t)\vec{e}_x + y(s, t)\vec{e}_y, \quad (2.6)$$

donde en el caso de un conducto inextensible se tiene

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1. \quad (2.7)$$

Obsérvese, además, que si  $\vec{\tau}(s, t)$  y  $\vec{n}(s, t)$  son el vector tangente y normal al conducto en  $s$ , respectivamente, y  $\theta(s, t)$  es el ángulo formado por  $\vec{\tau}(s, t)$  con el eje  $x$  se tiene

$$\vec{\tau}(\theta) = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (2.8a)$$

$$\vec{n}(\theta) = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y, \quad (2.8b)$$

y el vector de posición se puede expresar en función de  $\theta(s, t)$  como

$$\vec{r}(s, t) = \int_0^s \vec{\tau}(\theta(s, t)) ds. \quad (2.9)$$

de forma que la ecuación (2.7) se satisface automáticamente.

La ecuación integrodiferencial que gobierna  $\theta(s, t)$  puede obtenerse integrando la ecuación (2.1) entre  $s = L$  y  $s$  teniendo en cuenta que el cortante en el extremo libre es nulo,  $\vec{Q}(L) \cdot \vec{n}(L) = 0$ , lo que permite eliminar  $\vec{Q}(s)$  en la ecuación (2.2) y proporciona, haciendo uso de las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.8) y (2.9),

$$\begin{aligned} & \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi_1} \left\{ \ddot{\theta}(\xi_2) \vec{n}(\xi_2) \cdot \vec{n}(\xi) - \dot{\theta}(\xi_2)^2 \vec{\tau}(\xi_2) \cdot \vec{n}(\xi) \right\} d\xi_2 d\xi_1 \\ & + 2\beta U \int_{\xi}^1 \dot{\theta}(\xi_1) \vec{n}(\xi_1) \cdot \vec{n}(\xi) d\xi_1 + \beta U^2 \vec{n}(\xi) \cdot \vec{\tau}(1) \\ & + \beta \dot{U} \int_{\xi}^1 \vec{\tau}(\xi_1) \cdot \vec{n}(\xi) d\xi_1 - \theta''(\xi, \tau) - (1 - \xi) \vec{G} \cdot \vec{n}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Los puntos y primas en la ecuación (2.10) denotan derivadas con respecto a  $\tau$  y  $\xi$ , respectivamente, y se han introducido las siguientes variables y parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \frac{M}{M+m}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{EI}{(M+m)L^4}}, \quad G \equiv \frac{\vec{g}}{\omega^2 L} = \frac{\vec{g}(M+m)}{EI/L^3}, \\ U &\equiv U/\omega L, \quad \tau \equiv \omega t, \quad \xi \equiv \frac{s}{L}, \quad \vec{\chi} \equiv \frac{\vec{r}}{L}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De manera análoga, sustituyendo las ecuaciones (2.8) y (2.9) en la ecuación (2.5) y teniendo en cuenta que la presión impuesta a la entrada es la de remanso  $P_0 - P_a = \beta U^2/2$  se obtiene la ecuación que gobierna  $U(t)$ :

$$\begin{aligned} \beta \dot{U} &= \Delta P - \frac{1}{2} \beta U^2 + \beta \int_0^1 \vec{G} \cdot \vec{\tau}(\xi) d\xi \\ &- \beta \int_0^1 \int_0^{\xi} \left\{ \ddot{\theta}(\xi_1) \vec{n}(\xi_1) \cdot \vec{\tau}(\xi) - \dot{\theta}(\xi_1)^2 \vec{\tau}(\xi_1) \cdot \vec{\tau}(\xi) \right\} d\xi_1 d\xi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde se ha definido

$$\Delta P \equiv \frac{P_0 - P_a}{EI/L^4} \quad (2.13)$$

y se ha despreciado el rozamiento entre fluido y conducto, es decir,  $f_f = 0$ .

Es interesante interpretar físicamente las variables y, en especial, los parámetros característicos del sistema y proporcionar valores típicos de los mismos. Para ello, obsérvese que  $\beta$  es la masa relativa del fluido en el conjunto,  $\omega$  es una frecuencia típica de la vibración para  $U = 0$ ,  $G$  representa la importancia de la gravedad frente a la rigidez a flexión (o flexibilidad frente a gravedad), y  $\Delta P$  mide la diferencia de presión impuesta en los extremos frente a la rigidez del sistema. En la siguiente tabla se exponen algunos valores característicos típicos para conductos de acero S275 y goma con módulo de Young  $3GPa$  y densidad  $1200Kg/m^3$ . Se consideran secciones redondas con 45mm de diámetro y 3mm espesor  $\varnothing 45.3$ , y con 200mm y 6mm,  $\varnothing 45.3$  y longitudes de 1m y

10m. Se observa como la aparición de flameo (que tiene lugar para valores de  $U$  entre 13 y 18 para la mayor parte de los casos) en conductos muy rígidos, con grandes secciones o longitudes cortas, requiere velocidades del fluido mayores que la del sonido mientras que en conductos poco rígidos estas velocidades sí están dentro de un rango de valores razonable para un líquido.

|              | Unidad            | Ex1      | Ex2     | Ex3       | Ex4      | Ex5      | Ex6     | Ex7      | Ex8     |
|--------------|-------------------|----------|---------|-----------|----------|----------|---------|----------|---------|
| Material     | Nombre            | Acero    | Acero   | Acero     | Acero    | Goma     | Goma    | Goma     | Goma    |
| Módulo Young | GPa               | 210      | 210     | 210       | 210      | 3        | 3       | 3        | 3       |
| Densidad     | kg/m <sup>3</sup> | 7850     | 7850    | 7850      | 7850     | 1200     | 1200    | 1200     | 1200    |
| Sección      | Nombre            | ∅45.3    | ∅45.3   | ∅200.6    | ∅200.6   | ∅45.3    | ∅45.3   | ∅200.6   | ∅200.6  |
| Longitud     | m                 | 1        | 10      | 1         | 10       | 1        | 10      | 1        | 10      |
| $\beta$      | 1                 | 0,314    | 0,314   | 0,522     | 0,522    | 0,783    | 0,783   | 0,896    | 0,896   |
| $U$          | 1                 | 15       | 15      | 15        | 15       | 15       | 15      | 15       | 15      |
| $U$          | m/s               | 842,9655 | 84,2966 | 3675,8553 | 367,5855 | 158,9518 | 15,8952 | 575,3227 | 57,5323 |
| $\omega$     | rad/s             | 56,1977  | 0,5620  | 245,0570  | 2,4506   | 10,5968  | 0,1060  | 38,3548  | 0,3835  |
| $G$          | 1                 | 0,0031   | 3,1062  | 0,0002    | 0,1634   | 0,0874   | 87,3616 | 0,0067   | 6,6685  |

Las ecuaciones (2.10) y (2.12) deben resolverse sujetas a las condiciones de contorno

$$\theta(0, \tau) = \theta'(1, \tau) = 0, \quad (2.14)$$

y las condiciones iniciales

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi) \quad \dot{\theta}(\xi, 0) = \dot{\theta}_0(\xi). \quad (2.15)$$

Obsérvese que la condición de cortante nulo en el extremo libre del conducto,  $\theta''(1, \tau) = 0$ , se cumple automáticamente mediante la ecuación (2.10) debido a la forma en que se ha obtenido ésta, esto es, por integración de la ecuación (2.1) entre  $s = L$  y un  $s$  genérico e imponiendo  $\vec{Q}(L) \cdot \vec{n}(L) = 0$  al integrar.

### 2.3. Ecuaciones de energía

Un balance de energía para un sistema abierto y deformable  $\Omega = \Omega_p + \Omega_f$  que contiene al conducto  $\Omega_p$  y al fluido  $\Omega_f$ , y los límites de dichos volúmenes son la superficie del conducto  $\Sigma_p$  y la superficie interior del conducto junto con las áreas de entrada y salida  $\Sigma_f$ , respectivamente, nos lleva a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dE_t}{dt} = & \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_f(t)} \frac{1}{2} \rho_f \vec{v}_f^2 d\varpi + \int_{\Omega_p(t)} \frac{1}{2} \rho_p \vec{v}_p^2 d\varpi \right] + \int_{\Omega_p(t)} \tau' : \nabla \vec{v}_p d\varpi = \\ & - \int_{\Sigma_f(t)} \frac{1}{2} \rho_f \vec{v}_f^2 (\vec{v}_f - \vec{v}_c) \cdot \vec{n}_\sigma d\sigma - \int_{\Sigma_f(t)} p \vec{v}_f \cdot \vec{n}_\sigma d\sigma + \int_{\Omega_f(t)} \vec{f}_m \cdot \vec{v}_f d\varpi + \int_{\Omega_p(t)} \vec{f}_m \cdot \vec{v}_p d\varpi \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $E_t$  es la energía total formada por energía elástica y energía cinética tanto del fluido como del conducto.  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $p$  y  $f$  son densidad, velocidad, presión del fluido y fuerzas

másicas, respectivamente. Subíndices  $f$ ,  $p$  y  $c$  denotan fluido, conducto y superficie del volumen de control, respectivamente.  $\int_{\Omega(t)}(\cdot)d\varpi$  representa la integral de volumen y  $\int_{\Sigma_f(t)}(\cdot)\vec{v}_f \cdot \vec{n}_\sigma d\sigma$  el flujo que atraviesa los límites del volumen  $\Omega_f$ .

La ecuación (2.16) representa los cambios de la energía total  $E_t$  con el tiempo. El primer miembro de la ecuación representa los cambios de energía cinética del fluido y del conducto y la potencia de los momentos flectores  $\tau'$  en el conducto. En el miembro de la derecha, el primer término representa flujo de energía cinética en la entrada y salida al conducto (no hay flujo a través de las paredes), el segundo la potencia de las fuerzas de presión y el resto el trabajo de las fuerzas másicas

Teniendo en cuenta que el volumen se conserva aunque se deforme  $\int_{\Omega(t)} d\varpi = cte$ , realizando las integrales

$$\dot{E}_t = -\beta U \left[ \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}^2 + U \dot{\vec{R}} \cdot \vec{T} \right] + U(\Delta P - \frac{1}{2}\beta U^2) + \int_0^1 \left( \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \tau} + \beta U \vec{\tau}(\xi) \right) \cdot \vec{g} d\xi \quad (2.17)$$

donde  $\vec{R}(\tau) = \vec{\chi}(1, \tau)$  y  $\vec{T}(\tau) = \vec{\tau}(1, \tau)$ .

Nótese, que  $\dot{\vec{R}}^2$  siempre es positivo por lo que este término representa un amortiguamiento del sistema.  $\dot{\vec{R}} \cdot \vec{T}$  puede ser positivo o negativo dependiendo de la deformada en ese momento. En caso de que éste sea negativo y si  $U$  es suficientemente grande, el sistema se volverá inestable.  $U\Delta P$  es la potencia de la bomba/depósito cuya energía se acumula mayormente en el fluido  $1/2\beta U^3$  mientras el último término es la potencia de las fuerzas másicas.

## 2.4. Discretización

Las ecuaciones (2.10) y (2.12) se van a resolver numéricamente, por lo que hay que discretizarlas en  $\xi$ . El conducto se divide en  $N$  partes iguales y se toma el punto medio  $\xi_i = (i-1/2)/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ).  $\theta(\xi)$  y  $\dot{\theta}(\xi)$  vienen dados por sus valores en los puntos de la discretización dados por los vectores  $\boldsymbol{\theta} = [\dots, \theta(\xi_i), \dots, \theta(\xi_N)]^T$  y  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dots, \dot{\theta}(\xi_i), \dots, \dot{\theta}(\xi_N)]^T$ .

Las integrales se realizan por la regla del punto medio

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_i} f(\xi_1) d\xi_1 &= \sum_n^N A_{in} f(\xi_n) \\ \int_{\xi_i}^1 f(\xi_1) d\xi_1 &= \sum_n^N B_{in} f(\xi_n) \\ \int_0^1 f(\xi_1) d\xi_1 &= \sum_{n=1}^N f(\xi_n)/N, \end{aligned} \quad (2.18)$$

y las derivadas por diferencias finitas

$$\frac{\partial^2 f(\xi_i)}{\partial \xi^2} = [f(\xi_{i-1}) - 2f(\xi_i) + f(\xi_{i+1})] N^2 = \sum_n^K -K_{\theta, in} f(\xi_n), \quad (2.19)$$

donde las matrices  $A$ ,  $B$  y  $K_\theta$  vienen dadas por

$$A_{in} = \begin{cases} 1/N & n < i \\ 1/2N & i = n \\ 0 & n > i \end{cases}, \quad B_{in} = \begin{cases} 0 & n < i \\ 1/2N & i = n \\ 1/N & n > i \end{cases}, \quad K_{\theta, in} = \begin{cases} 2N^2 & i = n \\ -N^2 & i = n \pm 1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}. \quad (2.20)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.18)-(2.20), las ecuaciones (2.10) y (2.12) discretizadas pueden expresarse en forma matricial como

$$M_\theta(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + S_\theta(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} + K_\theta\boldsymbol{\theta} + 2\beta UC_\theta(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \beta U^2 \mathbf{F}_{c,\theta}(\boldsymbol{\theta}) + \beta \dot{U} \mathbf{F}_{rel,\theta}(\boldsymbol{\theta}) + G\mathbf{F}_{g,p,\theta}(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (2.21)$$

y

$$\beta \dot{U} - \Delta P + \frac{1}{2}\beta U^2 + \beta \mathbf{M}_{f,\theta}^T(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \beta \mathbf{S}_{f,\theta}^T(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \beta G\mathbf{F}_{g,f}(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (2.22)$$

respectivamente, donde las matrices que aparecen en (2.21) y (2.22) se explicitan en el apéndice A.

## 2.5. Expansión de Ritz-Galerkin

Para llevar a cabo la resolución numérica de (2.21) y (2.22) con una precisión razonable parecería bastar la elección de una discretización suficientemente fina ( $N > 150$ ) en la variable espacial  $\xi$ , sin embargo ello presenta un grave inconveniente en el caso de problemas dinámicos y es que aparecen elevadas frecuencias espúreas, con autovectores asociados carentes de sentido físico, que ralentizan la integración. Con el objeto de filtrar dichas frecuencias y, al mismo tiempo, imponer las condiciones de contorno apropiadas en los extremos del conducto es conveniente utilizar el método de Ritz-Galerkin. Como se verá a continuación, este método permite proyectar los vectores discretos  $N$ -dimensionales  $\boldsymbol{\theta}$  y  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  sobre un espacio de menor dimension  $N_G < N$  subtendido por  $N_G$  funciones independientes (funciones de Galerkin) que satisfacen idénticamente las condiciones de contorno. En efecto, la solución  $\theta(\xi, \tau)$  puede expandirse alrededor de la solución de equilibrio  $\theta_{eq}(\xi)$  como

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_{eq}(\xi) + \sum_{j=1}^{N_G} q_j(\tau) \varphi'_j(\xi), \quad (2.23)$$

donde las  $q_j(\tau)$ 's son las amplitudes asociadas a las funciones básicas  $\varphi'_j(\xi)$  que cumplen las condiciones de contorno dadas por la ecuación (2.14) y que se eligen como las derivadas de los modos naturales de vibración de una viga empotrada-libre sin gravedad. Éstos últimos vienen dados por las funciones

$$\varphi_j(\xi) = \cosh \lambda_j \xi - \cos \lambda_j \xi - \frac{\cosh \lambda_j + \cos \lambda_j}{\sinh \lambda_j + \sin \lambda_j} (\sinh \lambda_j \xi - \sin \lambda_j \xi) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (2.24)$$

donde las  $\lambda_j$ 's satisfacen la ecuación algebraica  $\cos \lambda_j \cosh \lambda_j + 1 = 0$  que resulta de imponer las condiciones de contorno para los desplazamientos transversales de una viga empotrada-libre .

El vector  $\boldsymbol{\theta}(\tau)$  y sus derivadas temporales,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}(\tau)$  y  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau)$ , que aparecen en las ecuaciones (2.22) y (2.21) pueden expresarse ahora en términos del vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}(\tau) = [q_1(\tau), \dots, q_j(\tau), \dots, q_{N_G}(\tau)]^T$  y sus derivadas,  $\dot{\mathbf{q}}(\tau)$  y  $\ddot{\mathbf{q}}(\tau)$ , mediante el cambio lineal de variables determinado por la ecuación (2.23) :

$$\boldsymbol{\theta}(\tau) = \boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}(\tau), \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) = \Phi \dot{\mathbf{q}}(\tau), \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}}(\tau) = \Phi \ddot{\mathbf{q}}(\tau) \quad (2.25)$$

donde se ha definido el vector de la solución de equilibrio  $\boldsymbol{\theta}_{eq} = [\dots, \theta_{eq}(\xi_i), \dots, \theta_{eq}(\xi_N)]^T$  y la matriz de cambio  $\Phi$  cuyos elementos son  $\Phi_{ij} = \varphi'_j(\xi_i)$ .

Introduciendo el cambio de variables (2.25) en la ecuación (2.21) y proyectando el sistema de ecuaciones resultante sobre el espacio determinado por las funciones de forma  $\varphi'_j$  se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinario no lineal de segundo orden

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + S(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}, \Phi \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} + \mathbf{F}_K(\boldsymbol{\theta}_{eq}) + 2\beta UC(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ + \beta U^2 \mathbf{F}_c(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) + \beta \dot{U} \mathbf{F}_{rel}(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) + G \mathbf{F}_{g,p}(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) = 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $K$  es la matriz de rigidez,  $M$  y  $S$  son matrices asociadas a la inercia del conjunto mientras los términos de fuerzas de Coriolis, centrípeta y aceleración relativa vienen dados por la matriz  $2\beta UC$  y vectores  $\beta U^2 \mathbf{F}_c$ ,  $\beta \dot{U} \mathbf{F}_{rel}$ , respectivamente, y  $G \mathbf{F}_{g,p}$  representa la fuerza de la gravedad sobre el conjunto.

Obsérvese que al expresar la solución en términos de coordenadas alrededor de la posición de equilibrio aparece el término  $\mathbf{F}_K(\boldsymbol{\theta}_{eq})$  en la ecuación (2.26) que representa las fuerzas de rigidez asociadas a la deformación en el equilibrio.

Análogamente, si se introduce el cambio de variables la ecuación (2.25) en la ecuación de movimiento para el fluido (2.22) se obtiene

$$\beta \dot{U} - \Delta P + \frac{1}{2} \beta U^2 + \beta \mathbf{M}_f^T(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \beta \mathbf{S}_f^T(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}, \Phi \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \beta G F_{g,f}(\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}) = 0, \quad (2.27)$$

donde los términos en  $M_f$  y  $S_f$  representan proyecciones tangenciales de las fuerzas de inercia experimentadas por el fluido asociadas al movimiento del conducto, y  $\beta GF_{g,f}(\mathbf{q})$  es la fuerza de la gravedad sobre el fluido.

Las expresiones detalladas de las matrices y vectores que aparecen en las ecuaciones (2.26)-(2.27) se incluyen en el apéndice A.

## 2.6. Solución de equilibrio y linealización del sistema

Las ecuaciones que determinan solución de equilibrio del sistema (2.26)-(2.27) se obtiene omitiendo del mismo las derivadas temporales. La ecuación (2.26) proporciona entonces:

$$\theta''_{eq}(\xi) + \vec{n}(\xi) \cdot \left[ (1 - \xi)\vec{G} - \beta U_{eq}^2 \vec{\tau}(1) \right] = 0, \quad (2.28)$$

que debe resolverse junto con las condiciones de contorno

$$\theta_{eq}(0) = \theta'_{eq}(1) = 0, \quad (2.29)$$

y la ecuación (2.27) proporciona

$$\frac{1}{2} \beta U_{eq}^2 = \Delta P + \beta [\vec{\chi}_{eq}(1) - \vec{\chi}_{eq}(0)] \cdot \vec{G}, \quad (2.30)$$

que relaciona la velocidad del fluido en el equilibrio con la diferencia de presiones entre la toma y la salida del conducto. La resolución de las ecuaciones (2.28)-(2.29) se explicará detalladamente en los capítulos posteriores para cada caso considerado.

Una vez conocida la solución de equilibrio, las ecuaciones (2.10)-(2.12) pueden linealizarse alrededor de la solución de equilibrio para obtener la evolución de las perturbaciones de los desplazamientos,  $\theta_p(\xi, \tau)$ , y la velocidad,  $U_p(\tau)$ , en torno a la misma. En efecto, haciendo  $\theta(\xi, \tau) = \theta_{eq}(\xi) + \theta_p(\xi, \tau)$  y  $U(\tau) = U_{eq} + U_p(\tau)$  con  $\theta_p \ll 1$  y  $U_p \ll U_{eq}$ , las ecuaciones las ecuaciones (2.10)-(2.12) linealizadas resultan

$$\begin{aligned} & \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi_1} \ddot{\theta}(\xi_2) \vec{n}_{eq}(\xi_2) \cdot \vec{n}_{eq}(\xi) d\xi_2 d\xi_1 + 2\beta U_{eq} \int_{\xi}^1 \dot{\theta}(\xi_1) \vec{n}_{eq}(\xi_1) \cdot \vec{n}_{eq}(\xi) d\xi_1 \\ & + [\beta U_{eq}^2 + 2\beta U_{eq} U_p] \vec{n}_{eq}(\xi) \cdot \vec{\tau}_{eq}(1) + \beta U_{eq}^2 [\theta_p(1) \vec{n}_{eq}(1) \cdot \vec{n}_{eq}(\xi) - \theta_p(\xi) \vec{\tau}_{eq}(1) \cdot \vec{\tau}_{eq}(\xi)] \\ & + \beta \dot{U}_p \int_{\xi}^1 \vec{\tau}_{eq}(\xi_1) \cdot \vec{n}_{eq}(\xi) d\xi_1 - \theta_p''(\xi, \tau) - \theta_{eq}''(\xi, \tau) - (1 - \xi) \vec{G} \cdot [\vec{n}_{eq}(\xi) - \theta_p(\xi) \vec{\tau}_{eq}(\xi)] = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

y

$$\begin{aligned} \beta \int_0^1 \vec{G} \cdot [\vec{\tau}_{eq}(\xi) + \theta_p(\xi) \vec{n}_{eq}(\xi)] d\xi - \beta \int_0^1 \int_0^\xi \ddot{\theta}(\xi_1) \vec{n}(\xi_1) \cdot \vec{\tau}(\xi) d\xi_1 d\xi \\ + \Delta \bar{P} - \frac{1}{2} \beta [U_{eq}^2 + 2U_{eq}U_p] = \beta \dot{U}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde, para simplificar la notación, no se ha explicitado la dependencia temporal de  $\theta$  ni de los vectores  $\vec{\tau}$  y  $\vec{n}$ .

Discretizando  $\theta_p(\xi, \tau)$ , expandiéndola en funciones de Galerkin y relacionando el vector de valores discretos  $\boldsymbol{\theta}_p(\tau)$  con el vector de amplitudes de Galerkin  $\mathbf{q}_p$  mediante la ecuación (2.25), las ecuaciones linealizadas (2.31)-(2.32) se escriben:

$$M^{eq} \ddot{\mathbf{q}}_p + [K + GK_{F_{g,p}}^{eq} + \beta U_{eq}^2 K_{F_c}^{eq}] \mathbf{q}_p + 2\beta U_{eq} C^{eq} \dot{\mathbf{q}}_p + 2\beta U_{eq} \mathbf{F}_c^{eq} U_p + \beta \mathbf{F}_{rel}^{eq} \dot{U}_p = 0, \quad (2.33)$$

y

$$\dot{U}_p + U_{eq} U_p + \mathbf{M}_f^{eqT} \ddot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{K}_{F_{g,f}}^{eqT} \mathbf{q}_p = 0, \quad (2.34)$$

respectivamente, donde por claridad se ha expresado la dependencia de  $\boldsymbol{\theta}_{eq} + \Phi \mathbf{q}_{eq}$  de todas las matrices excepto  $K$  a través del superíndice  $eq$ . Nótese la aparición de rigideces,  $2\beta U_{eq} \mathbf{F}_c^{eq}$ ,  $\mathbf{K}_{F_{g,f}}^{eq}$ ,  $GK_{F_{g,p}}^{eq}$  y  $\beta U_{eq}^2 K_{F_c}^{eq}$ , asociadas a  $\mathbf{F}_c$ ,  $\mathbf{F}_{g,f}$ ,  $\mathbf{F}_{g,p}$  y  $\mathbf{F}_c$ . El término  $2\beta U_{eq} U_p$  representa la perturbación de la presión estática motivada por cambios en la energía cinética del fluido  $\beta U^2$ , lo cual supone también una rigidez.

Las matrices y vectores que aparecen en las ecuaciones (2.33) y (2.34) se explicitan en el apéndice A.