

Capítulo 3

Conducto horizontal

En este capítulo se va a resolver el problema de la determinación de la solución de equilibrio así como de su estabilidad lineal y comportamiento poscrítico para un sistema cuya indeformada es horizontal (es decir, paralela al eje x) y está sometido a una acción gravitatoria dirigida según la dirección negativa del eje y , $\vec{G} = -G\vec{e}_y$ (el ángulo formado entre ambos es $\theta_G = -\pi/2$). Este análisis permitirá determinar el caudal máximo que se puede bombear U por un conducto o la presión que se puede imponer en los extremos ΔP sin que éste se vuelva inestable. Como se ha mostrado en las secciones anteriores el comportamiento del sistema está determinado por los parámetros adimensionales de masa relativa fluido-conducto, β , y de las fuerzas de gravedad frente a las de rigidez, G . Finalmente, se han incluido también algunos cálculos y consideraciones energéticas de interés para el comportamiento poscrítico del sistema.

3.1. Solución de equilibrio

En la figura 3.1 se representan las formas de equilibrio obtenidas de la resolución de las ecuaciones (2.28) y (2.29) en los casos: (a) $U = 0$ y un rango de valores de G y, (b) un valor representativo del parámetro de gravedad $G = 30$ y un rango de valores de βU^2 desde 0 hasta 600. Obsérvese que, como era de esperar, la gravedad tiende a flectar el conducto mientras el efecto del flujo tiende a enderezarlo.

Las ecuaciones que gobiernan la forma de equilibrio (2.28) y las condiciones de contorno (2.29) pueden escribirse, teniendo cuenta las definiciones dadas por la ecuación (2.8) de los vectores \vec{n} y $\vec{\tau}$ así como la del vector $\vec{G} = G(\cos \theta_G \vec{e}_x + \sin \theta_G \vec{e}_y)$ como

$$\theta''_{eq}(\xi) + (1 - \xi)G \sin[\theta_G - \theta_{eq}(\xi)] - \beta U_{eq}^2 \sin[\theta_{eq}(1) - \theta_{eq}(\xi)] = 0, \quad \theta_{eq}(0) = \theta'_{eq}(1) = 0. \quad (3.1)$$

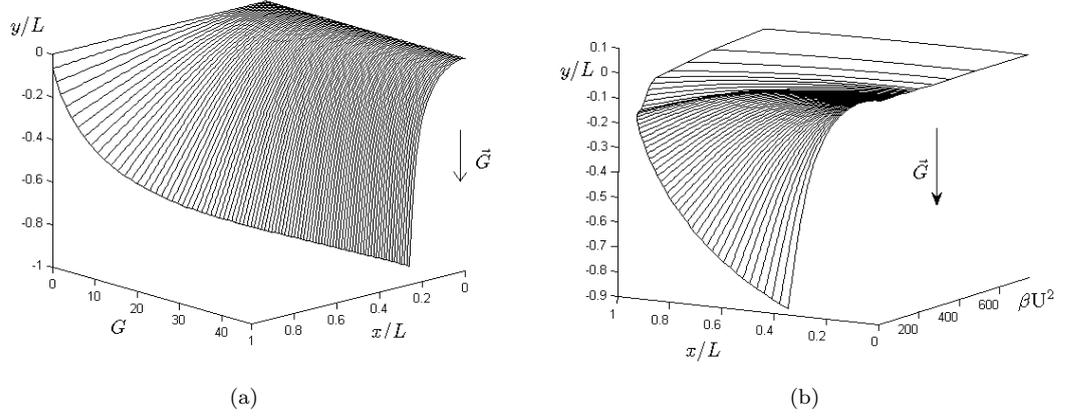


FIGURA 3.1: Formas de equilibrio de un conducto horizontal. (a) varía G y $\beta U^2 = 0$.
 (b) varía βU^2 y $G = 30$.

El procedimiento adoptado para resolver problema de valores de contorno no lineal (3.1) ha sido el siguiente. En primer lugar se resuelve el problema sin flujo, es decir con $U = 0$, y con un valor dado G integrando desde el extremo empotrado imponiendo $\theta_{eq}(0) = 0$ y calculando mediante disparo el valor de $\theta'_{eq}(0)$ que hace $\theta'_{eq}(1) = 0$. Una vez conocido el ángulo girado por la sección libre $\theta_{eq,G} \equiv \theta_{eq}(1)$ bajo la acción exclusiva de la gravedad, que en presencia de fluido será menor en magnitud, se puede resolver el problema con $\beta U^2 \neq 0$ con la siguiente variante del método de disparo: para cada valor dado de $\theta_{eq}(1)$ en el rango $(\theta_{eq,G}, 0)$ se realiza la integración desde el extremo libre hasta el empotrado partiendo de las condiciones iniciales en $\theta_{eq}(1)$ y $\theta'_{eq}(1) = 0$, determinándose entonces el valor del parámetro βU_{eq}^2 de forma que se cumpla la condición de empotramiento en $\xi = 0$ dada por $\theta_{eq}(0) = 0$.

Aunque no sea necesario para el análisis de estabilidad, para obtener la diferencia de presión que impone un caudal dado por U_{eq} se despeja ésta de la ecuación (2.30) una vez obtenida la expresión de la deformada $\theta_{eq}(\xi)$.

3.2. Análisis de estabilidad lineal para U impuesta

En el análisis modal para U impuesta, se ensaya una solución en forma de espacio-estado

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \sum_j^{2N_G} a_j \mathbf{Q}_j e^{\sigma_j \tau}, \quad (3.2)$$

en el sistema de ecuaciones lineales dada por la ecuación (2.33) donde se tiene en cuenta que $U_p = \dot{U}_p = 0$. De esta forma se obtiene

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{eq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_p \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\tilde{K} & -\beta U_{eq} C^{eq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde

$$\tilde{K} = K + G K_{\mathbf{F}_{g,p}}^{eq} + \beta U_{eq}^2 K_{\mathbf{F}_c}^{eq}. \quad (3.4)$$

La solución de la ecuación (3.3) que, por supuesto depende de U , consiste en $2N_G$ autovalores σ_j reales o pares de complejos conjugados, con sus correspondientes autovectores (modos), \mathbf{Q}_j . Una vez obtenidos estos, se puede determinar la región estable como aquella en la que todos los autovalores tienen parte real negativa. Cada curva en el diagrama de Argand de la figura 3.2 representa la evolución en el plano complejo de cada uno de los autovalores σ_i según varía U . De esta forma, los valores de cada autovalor $\sigma_i(U)$ están remarcados sobre su correspondiente curva con \square para $U = 0, 3, 6, \dots$ mientras que se ha señalado con $*$ el valor $\sigma_i(U)$ correspondiente a condiciones críticas, es decir, aquellas para las que existe al menos un autovalor cuya parte real pasa a ser positiva. Obsérvese que en ausencia de flujo ($U = 0$) todos los autovalores σ_j 's son imaginarios puro, como corresponde al problema clásico de una viga empotrada-libre sin amortiguamiento. Es importante observar que para cualquier par de valores admisibles de β y G , respectivamente, existe siempre un valor de U para el cual el sistema se hace inestable (*). El análisis de los diagramas de Argand realizado aquí está basado en un estudio pionero llevado a cabo por Benjamin [1] para un sistema con 2 grados de libertad.

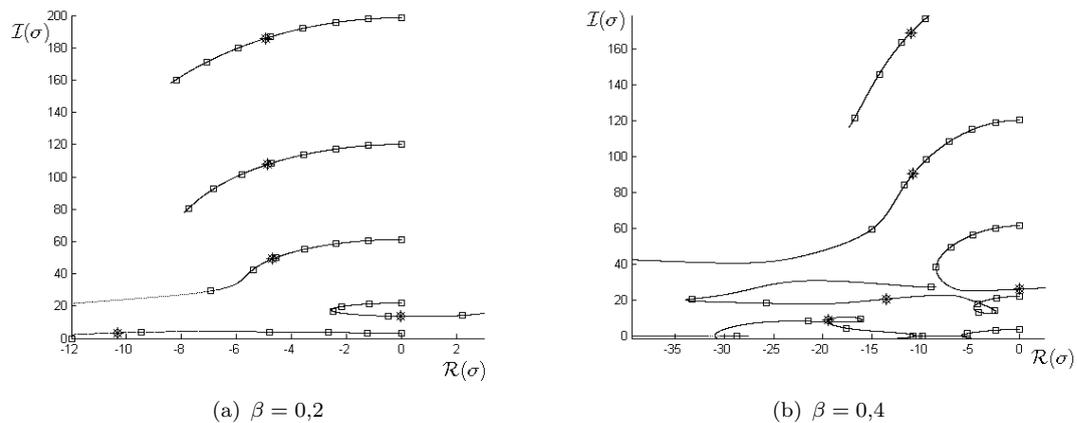


FIGURA 3.2: Solución del problema de autovalores sin gravedad.

Regiones de estabilidad

Hasta ahora, se ha considerado β y U como dos parámetros independientes pero obsérvese que en las ecuaciones (2.33) y (2.34) aparecen agrupados como β , βU y βU^2 . Si se analiza la estabilidad del sistema en términos de estos parámetros así agrupados puede comprobarse que el término de aceleraciones normales βU^2 es desestabilizante (pandeo), puesto que este término también puede interpretarse como la fuerza de reacción sobre el conjunto conducto-fluido debido al flujo de cantidad de movimiento que abandona el sistema, mientras que el término de Coriolis βU es estabilizante (amortiguamiento) y como era de esperar, valores de βU^2 altos desestabilizan y sólo un amortiguamiento βU suficientemente grande es capaz de compensar este efecto como se muestra en la figura 3.3(a). En la figura 3.3(b) se toma βU^2 como parámetro y se representa la frecuencia del modo inestable en condiciones críticas ω_u frente a éste comprobándose así cómo mayores flujos excitan modos más rígidos independientemente de G . Nótese que los cambios bruscos de rigidez se corresponden con cambios de curvatura de la curva βU^2 vs βU . En la figura 3.4 se representa la forma de los modos inestables en condiciones críticas, donde se puede comprobar que éstos son más rígidos para flujos βU^2 crecientes.

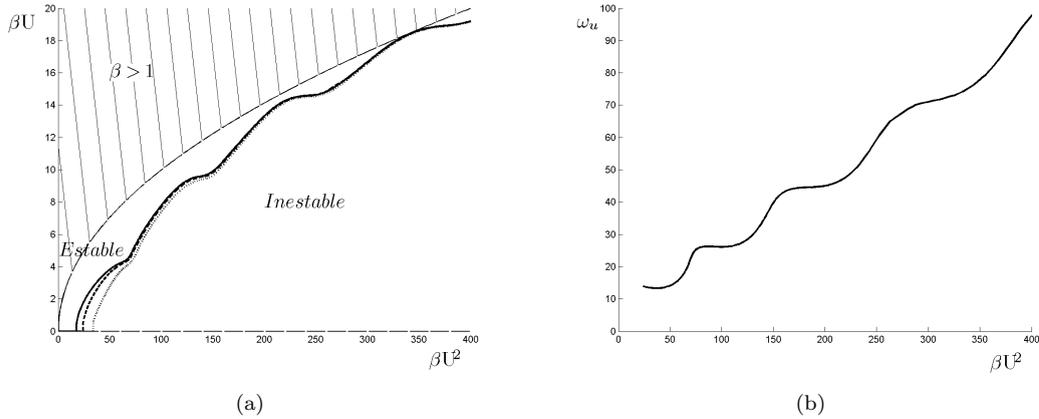


FIGURA 3.3: Regiones de estabilidad del sistema para el caso $\theta_G = -\pi/2$. $G = 0$ (línea continua), $G = 15$ (línea de trazos), $G = 30$ (línea de puntos)

La región de estabilidad para un valor dado de G se determina variando independientemente los valores del parámetro β en el intervalo 0 y 1 y del parámetro βU^2 entre 0 e ∞ y, para cada par de valores de β y βU^2 , se calculan la configuración de equilibrio $\theta_{eq}(\xi)$ y, posteriormente, los autovalores σ_i y autovectores \mathbf{Q}_i ¹. Para dibujar las curvas que determinan las condiciones críticas se almacena el autovalor $\sigma_u = \alpha_u \pm i\omega_u$ de mayor parte real y mediante el comando *contour* de MATLAB se representa la curva que cumple $\alpha_u = 0$ y se observa que se cumple que $\omega_u \neq 0$ en la región inestable correspondiente al

¹Como ya sabemos, variar βU^2 en el intervalo $[0, \infty)$ es equivalente a variar $\theta_{eq}(1)$ en el intervalo $[\theta_{eq,G}, 0)$. Se varía βU^2 para configuraciones en el equilibrio rectas $\theta_{eq}(\xi) = 0$ y $\theta_{eq}(1)$ para deformadas curvas $\theta_{eq}(\xi) \neq 0$

fenómeno de flameo. Dicho método devuelve la curva parametrizada dada por $(\beta U^2, \beta U)$ frontera de la región de estabilidad. Por otra parte, si se interpola (*contour*) ω_u a lo largo de la curva anterior $(\beta U^2, \beta U)$, se obtienen los valores de ω_u en condiciones críticas.

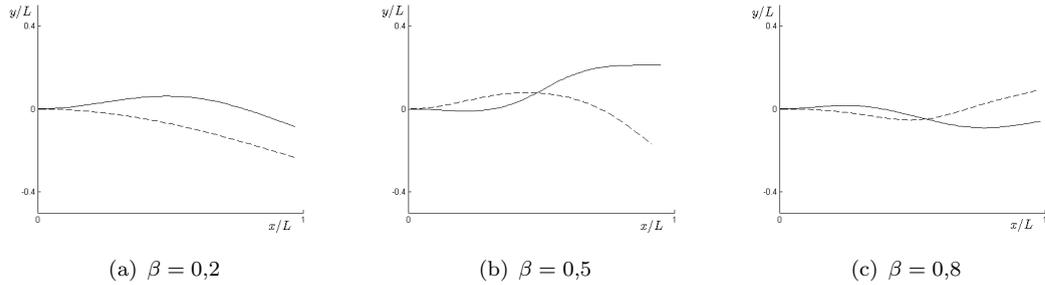


FIGURA 3.4: Formas asociadas a distintos modos inestables Q_u (— parte real, -- parte imaginaria) en condiciones críticas y ausencia de gravedad.

Finalmente, en lo que respecta al efecto de la gravedad debe señalarse que, en el caso de indeformada horizontal considerado en este capítulo, su influencia es estabilizante como se muestra en la figura 3.3(a). Esto puede interpretarse físicamente si se tiene en cuenta que, si el conducto se halla curvado bajo la acción de la gravedad, la fuerza de reacción debida el flujo de cantidad de movimiento a la salida, βU^2 , no está dirigida según la línea que une la sección de salida con el empotramiento, por lo que su efecto es menos sensible a pequeñas perturbaciones. Además aparece una rigidez geométrica asociada a la gravedad que se manifiesta en un aumento de las frecuencias naturales del sistema. Ambos efectos, el del desalineamiento y el de la rigidez geométrica, crecen con el valor de G (debido a una mayor flexión del conducto y del propio aumento del valor de G) y decrecen con el valor de βU^2 (debido a que el flujo tiende a enderezar el conducto).

3.3. Comportamiento postcrítico

Una vez que se han obtenido los modos naturales de vibración, Q_j 's, del sistema fluido-conducto, el movimiento puede ser expresado en términos de estos usando tanto los modos reales como las partes real e imaginaria, Q_j^R y Q_j^I , de cada pareja de modos complejos conjugados. Si N_C denota el número el de pares de modos complejos conjugados y N_R es el número de modos reales se tiene entonces :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N_C} [Q_i^R \alpha_i^R(\tau) + Q_i^I \alpha_i^I(\tau)] + \sum_{k=1}^{N_R} Q_k \alpha_{k+2N_C}(\tau), \quad (3.5)$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = V \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.6)$$

donde se ha definido la matriz cuyas columnas son los modos naturales $V \equiv [\dots, \mathbf{Q}_i^R, \mathbf{Q}_i^I, \dots, \mathbf{Q}_{N_M}^R, \mathbf{Q}_{N_M}^I, \dots, \mathbf{Q}_k, \dots, \mathbf{Q}_{N_R}]$ y el vector de amplitudes $\boldsymbol{\alpha} \equiv [\dots, \alpha_i^R, \alpha_i^I, \dots, \alpha_{N_M}^R, \alpha_{N_M}^I, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{N_M}]^T$. Introduciendo la ecuación (3.6) en la ecuación (2.25) se obtiene el vector $\boldsymbol{\theta}$ en función del vector de coordenadas modales, $\boldsymbol{\alpha}$, como

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{eq} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} V \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{eq} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + H \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.7)$$

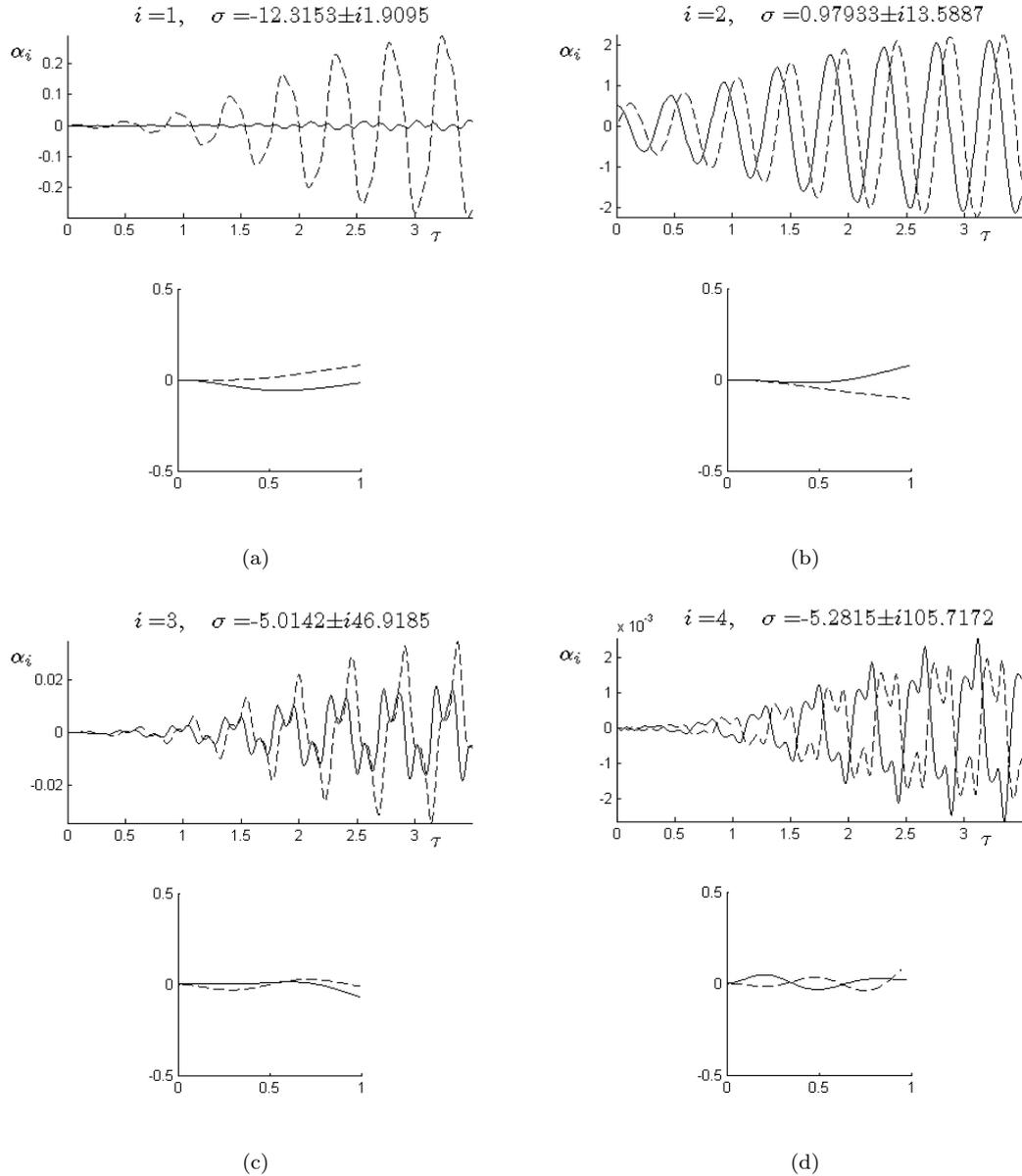


FIGURA 3.5: Transitorio del comportamiento postcrítico en parte real e imaginaria de las coordenadas modales con $G = 0$, $\beta = 0,2$ y $U = 13,5$.

La principal ventaja que supone el uso de coordenadas modales es que, aparte de su sentido físico, permiten usar un elevado número, N_G , de funciones de Galerkin en la resolución

de estabilidad lineal, mientras que la evolución no-lineal poscrítica puede describirse con suficiente aproximación en términos de un número más reducido, $N_M < N_G$, de coordenadas modales asociadas a los N_M modos naturales de menor frecuencias. Como es de esperar, y se ha comprobado numéricamente, la influencia de los modos de elevada frecuencia en la solución no es relevante. El procedimiento descrito ahorra tiempo de computación debido a que los modos naturales se calculan a partir de un sistema lineal de $2N_G$ incógnitas, mientras que la solución dinámica del problema no-lineal se realiza para un sistema de $2N_M < 2N_G$ incógnitas. Téngase en cuenta, por tanto, que el grueso del coste computacional reside en la integración de las ecuaciones de movimientos y no en la resolución del problema de autovalores.

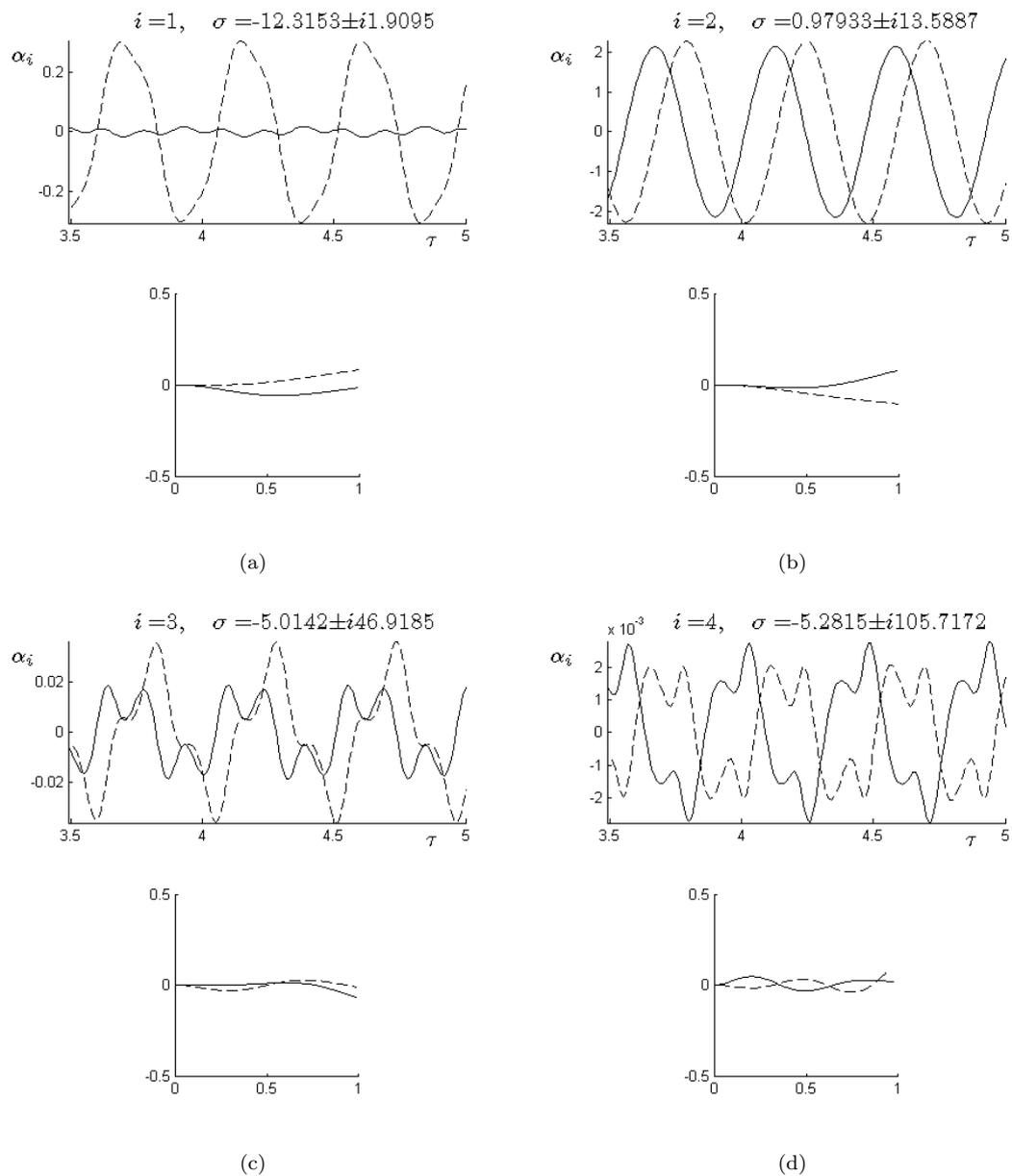


FIGURA 3.6: Régimen permanente del comportamiento poscrítico en parte real e imaginaria de las coordenadas modales con $G = 0$, $\beta = 0,2$ y $U = 13,5$.

Para el caso de U impuesta el sistema (2.21) se escribe en término de las coordenadas modales como

$$\hat{M}_m(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{K}_m\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{F}_p(\boldsymbol{\alpha}), \quad (3.8)$$

mientras que para ΔP impuesto dicho sistema se escribe

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_m(\boldsymbol{\alpha}) & \hat{M}_m^{pf}(\boldsymbol{\alpha}) \\ \hat{M}_m^{fp}(\boldsymbol{\alpha}) & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{K}_m(\boldsymbol{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_f \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde expresiones explícitas de las matrices se dan en el apéndice A. Nótese que en dichas expresiones se requieren los valores $\theta_{eq}(\xi)$ y ΔP para un caudal de equilibrio U_{eq} que se obtienen de la resolución de las ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.30).

Para obtener el comportamiento postcrítico de un sistema con flujo impuesto en coordenadas modales se integra la ecuación (3.8) mediante un método de integración por paso (en este caso se usa la función *ODE45* de *MATLAB*). Una perturbación inicial produce un transitorio en el que el modo inestable crece (ver la figura 3.5), excitando débilmente otros modos de manera que se acota alcanzando un régimen permanente oscilatorio que vibra con la frecuencia del modo inestable, ω_u y múltiplos de ésta, $3\omega_u, 5\omega_u, \dots$ como ocurre normalmente en vibraciones no lineales y que se ha comprobado mediante una transformada de Fourier (ver la figura 3.6). Las figuras superiores representan las amplitudes $\boldsymbol{\alpha}$ y las inferiores la forma $\boldsymbol{\theta}$, real e imaginaria en caso de complejo, correspondiente a amplitudes unitaria del modo que se presenta (alrededor de la forma de equilibrio horizontal en este caso, $G = 0$). Obsérvese la simetría respecto a cero de las amplitudes.

En la figura 3.7 se representa el régimen permanente en un caso con gravedad $G = 20$. Nótese la asimetría de las amplitudes debido a la asimetría en grandes deformaciones alrededor de un solución de equilibrio curva dada por trazo línea-punto. En términos matemáticos, esto se debe a que senos y cosenos son simétricos pares o impares solo respecto a múltiplos de $\pi/2$ y no a puntos intermedios. En este caso particular, el primer par de modos es real como se sabe que puede ocurrir.

3.4. Diferencia de presión impuesta.

En el análisis de estabilidad de la sección 3.2 se ha resuelto el problema de autovalores asociado a la ecuación (2.33) con $\dot{U}_p = 0$, ya que se impuso $U = cte$. Sin embargo, se duda de que esta hipótesis sea realista en el caso de un conducto unido a un depósito donde lo que se impone no es un caudal sino una diferencia de presión entre el depósito y el ambiente de descarga. De este modo habría que resolver las ecuaciones (2.33) y

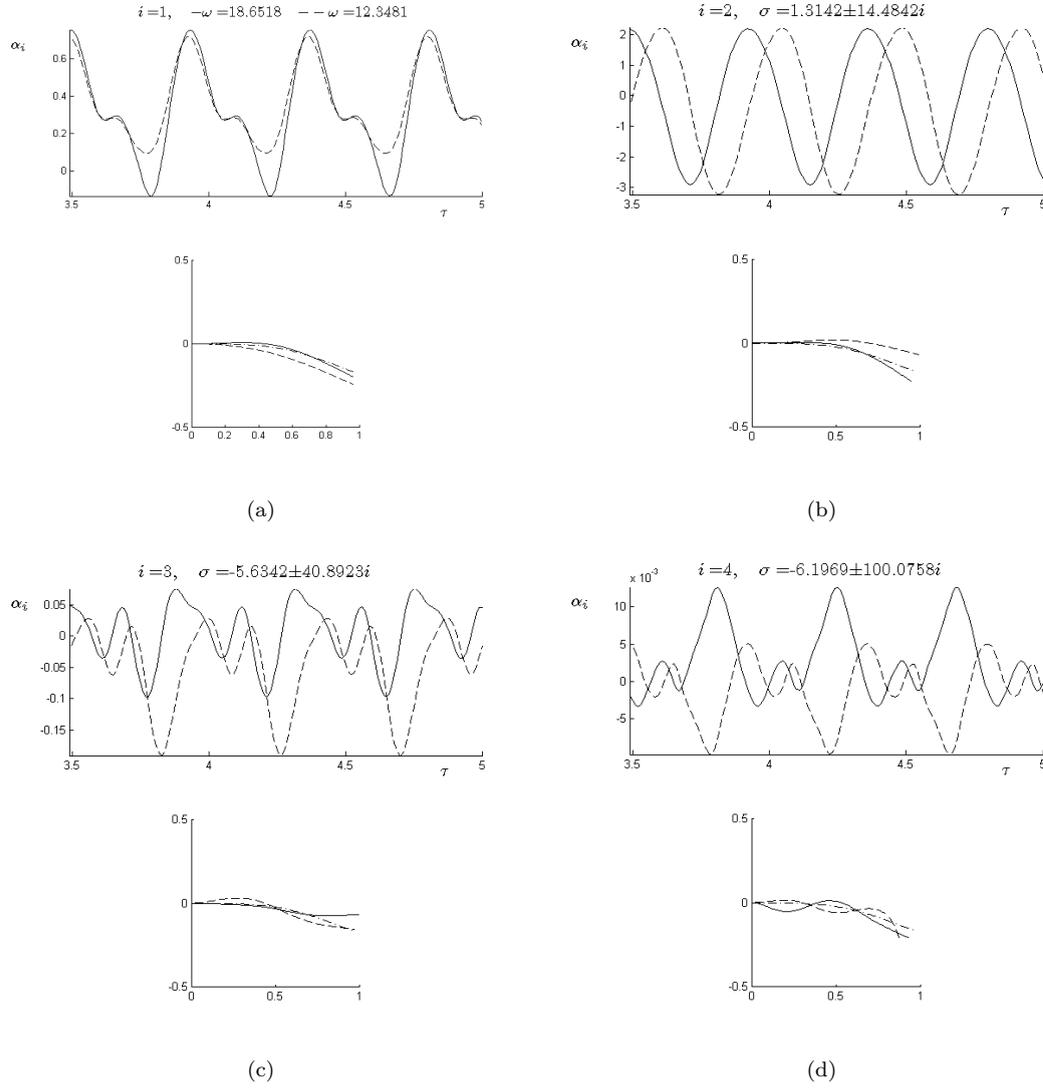


FIGURA 3.7: Régimen permanente del comportamiento postcrítico en parte real e imaginaria de las coordenadas modales con $G = 20$, $\beta = 0,2$ y $U = 13,5$.

(2.34) (en forma de espacio-estado (3.10)) imponiendo una diferencia de presión de remanso determinada. Sin embargo, los datos que arrojan este análisis son los mismos que imponiendo U en el caso sin gravedad ya que se desacoplan por ser la solución de equilibrio recta (\mathbf{K}_f^{eq} , \mathbf{C}_f^{eq} , \mathbf{F}_c^{eq} y \mathbf{F}_{rel}^{eq} son cero). En el caso con gravedad sí influye el acoplamiento de las ecuaciones, aunque los resultados no difieren apreciablemente. Para comparar se ha considerado el valor de U_{eq} como representativo en lugar de ΔP , evitando así tener que resolver la ecuación (2.30).

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M^{eq} & \beta \mathbf{F}_{rel}^{eq} \\ 0 & \beta \mathbf{M}_f^{eq,T} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_p \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \\ \dot{\mathbf{U}}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\tilde{K} & -\beta U_{eq} \mathbf{C}^{eq} & -2\beta U_{eq} \mathbf{F}_c^{eq} \\ -G \mathbf{K}_{\mathbf{F}_{g,f}}^{eq,T} & 0 & -\beta U_{eq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_p \\ \mathbf{U}_p \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde

$$\tilde{K} = K + G K_{\mathbf{F}_{g,p}}^{eq} + \beta U_{eq}^2 K_{\mathbf{F}_c}^{eq}. \quad (3.11)$$

Aunque la región de estabilidad sea prácticamente la misma en términos de presión en vez de velocidades impuestas, el comportamiento postcrítico difiere ligeramente. Las amplitudes del movimiento de la tubería α presentan el mismo comportamiento, es decir, un régimen transitorio inicial y posteriormente las amplitudes se acotan en el régimen permanente pero las grandes deformaciones y velocidades asociada a esta vibración inducen una perturbación del flujo alrededor de la velocidad de equilibrio U_{eq} . En la figura 3.8 se representa $U(\tau)$ donde se puede observar un transitorio inicial donde se desarrolla el flujo desde las condiciones iniciales $U(0)$ a las de equilibrio U_{eq} , una vez el flujo alcanzado este valor se empieza a desarrollar la inestabilidad para posteriormente acotarse como en el caso de flujo impuesto.

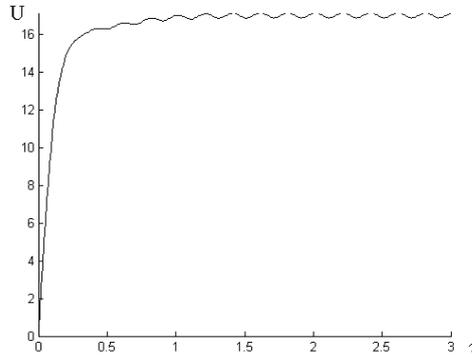


FIGURA 3.8: Comportamiento del flujo U en la región inestable, $G=0$, .

3.5. Transferencia de energía

A continuación se resuelve representa la energía para el caso de flujo impuesto, sin gravedad. Se encuentra una discrepancia entre la ecuación para la energía dada en [1] y la ecuación (2.17),

$$\dot{E}_t = -\beta U \left[\dot{\vec{R}}^2 + U \dot{\vec{R}} \cdot \vec{T} \right]. \quad (3.12)$$

Calculando la energía directamente como función de θ , $\dot{\theta}$, β y U .

$$\int_0^1 \frac{1}{2} [(1 - \beta) \vec{v}_p(\xi)^2 + \beta \vec{v}_f(\xi)^2] d\xi + \int_0^1 \theta''(\xi) d\xi \quad (3.13)$$

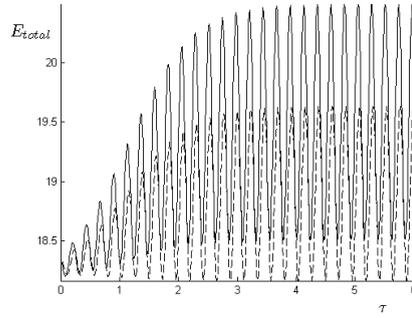


FIGURA 3.9: Energía acumulada en el sistema en caso de flujo impuesto sin gravedad, $\beta = 0,2$, $U = 13,5$. - - Benjamin, - la ecuación (2.17).

donde $\vec{v}_p(\xi) = \int_0^\xi \dot{\theta}(\xi_1) \vec{n}(\xi_1) d\xi_1$ y $\vec{v}_f(\xi) = \int_0^\xi [\dot{\theta}(\xi_1) \vec{n}(\xi_1) + U \vec{\tau}(\xi_1)] d\xi_1$ se tiene que coincide con la solución de la ecuación (2.17) difiriendo así del resultado obtenido por la expresión dada en [1].

Se resuelve la ecuación (2.17) para un caso sin y con gravedad $G = 20$ con presión impuesta, ambas con $\beta = 0,2$ y $U_{eq} = 16$ y $U(0) = 0$.

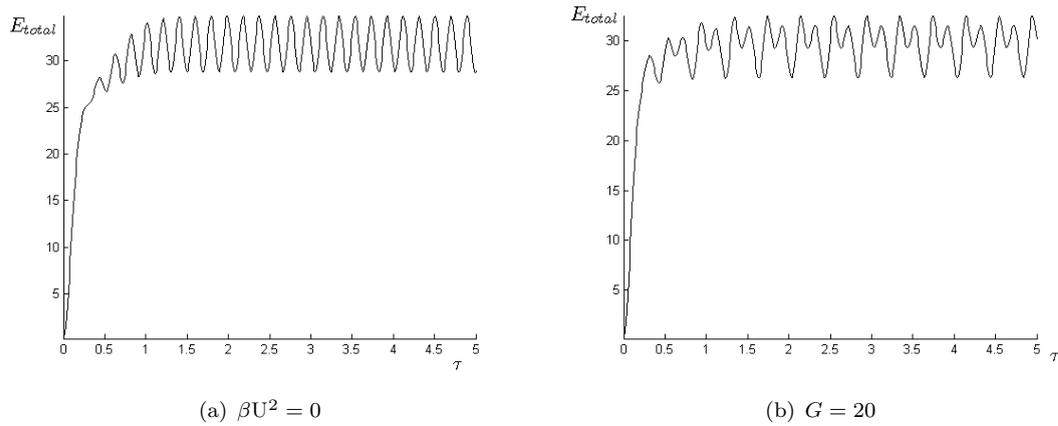


FIGURA 3.10: Energía total del sistema con $G = 0$ y $\beta = 0,2$.

En la figura 3.10 se observa como la energía aumenta al establecerse el flujo de fluido y las grandes deformaciones asociadas a la inestabilidad. Una vez en el régimen permanente se observa como la energía oscila alrededor de un valor medio constante lo cual se debe al movimiento violento y periódico del conducto. Nótese la falta de simetría respecto al valor medio en el caso de formas de equilibrio no rectas debidas a gravedad como también sucede con las amplitudes (véase la figura 3.7). Es relevante el hecho de que la mayor parte de la energía está asociada al movimiento relativo del fluido dentro del conducto, $\frac{1}{2} \beta U_{eq}^2 \approx 25,6$.