

2. TEORÍA DE PROPAGACIÓN DE ONDAS SONORAS EN CONDUCTOS

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan, de manera concisa, la teoría de la propagación de ondas y su fundamento acústico, siendo tratados selectivamente según es nuestro caso de estudio.

Se comienza con la definición de las distintas ondas que podemos encontrarnos, según las características del medio en que se propaguen y la fuente que las cree, y se marcará cuál de ellas será objeto de este estudio.

A continuación se desarrolla el proceso hasta llegar a la ecuación que rige el movimiento de onda, así como se definen y justifican las hipótesis simplificativas tomadas hasta llegar a ella.

Por último se profundiza en el caso particular de conductos, objeto de este estudio. Se presenta la ecuación de onda simplificada para este caso, así como el proceso que permite llegar a ella, al igual que antes, se detallan y justifican las hipótesis simplificativas tomadas en el proceso

2.2 Onda sonora

Como se ha comentado en la introducción, el medio es decisivo a la hora de que se propague un tipo de onda u otro, a continuación se explica la diferencia entre lo que ocurre en un medio fluido y lo que ocurre en un medio sólido cuando una fuente genera una onda en ellos.

Si hablamos de un medio *fluido*, ya sea líquido o gas, que será el medio con el que se trabaje en el proyecto, cuando una fuente genera una onda en ellos, los cambios en la tensión transversal del fluido son suficientemente pequeños como para poder ser despreciados. Por lo tanto se considera que en este medio sólo pueden existir ondas mecánicas elásticas longitudinales, como se puede ver en la figura 2.1.

Estas ondas se caracterizan porque la dirección de la velocidad de la partícula es paralela a la dirección de propagación de la onda.



Figura 2.1. Características de una onda longitudinal.

Dentro de las ondas longitudinales se distinguen tres tipos:

- Ondas planas*: Se caracterizan porque todos los puntos poseen el mismo estado acústico, es decir, misma presión sonora y misma velocidad de partícula, formando planos paralelos.
- Ondas esféricas*: Se producen bien cuando en cualquier lugar existe una fuente de onda de forma esférica, o cuando el radio de la fuente es pequeño comparado con la longitud de onda del sonido, se caracteriza porque todos los puntos de su superficie oscilan radialmente a la misma amplitud y fase.
- Ondas cilíndricas*: Aparecen cuando el foco de la onda es un cilindro longitudinal infinito, entonces toda la superficie de éste oscila en fase y con la misma amplitud.

En un medio sólido, cuando se genera una onda, tanto los cambios en la tensión normal como en la transversal son significativos, lo que implica que en el medio sólido, por el contrario que en el medio fluido, no sólo existirán ondas longitudinales, sino también transversales, como la representada en la figura 2.2. En este tipo de ondas la oscilación de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

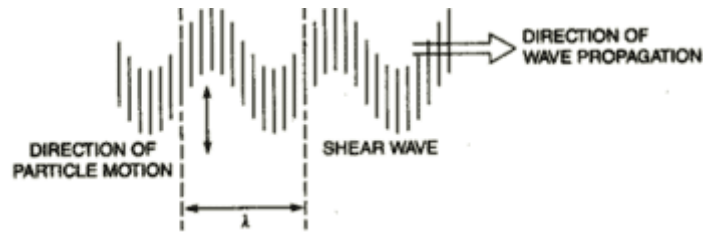


Figura 2.2. Características de una onda transversal

2.3 Fundamentos acústicos del movimiento de onda

Para el análisis de atenuación acústica de silenciadores se destacan dos modelos fundamentales: el modelo fluido dinámico general y el modelo acústico lineal.

De acuerdo al **modelo fluido dinámico**, un sistema queda definido por medio de tres ecuaciones simultáneas:

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad [2.1]$$

donde ρ es la densidad del fluido, y u , v y w son las componentes de la velocidad $\vec{u}$. Esta ecuación, definida para el caso de tres dimensiones, expresa la conservación de la masa para un volumen de control definido por: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, donde x , y y z se miden en un sistema inercial, y se cumple para cualquier fluido que satisface la ecuación del continuo.

- Ecuación de equilibrio dinámico: ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos newtonianos, estas ecuaciones expresan el equilibrio dinámico de las fuerzas inerciales, volumétricas, de presión y viscosas:

$$\rho a_x = \rho E_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho a_y = \rho E_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

[2.2]

$$\rho a_z = \rho E_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Estas ecuaciones se obtienen sin más que considerar el equilibrio dinámico de fuerzas sobre un volumen de control.

- Ecuación de la energía: de la misma forma que la ecuación de continuidad expresaba la conservación de la masa, ésta hace lo propio con la energía, considerando el balance:

$$\text{Energía entrante} = \text{Energía saliente} + \text{Energía acumulada}$$

Si se toma un volumen de control diferencial de fluido de dimensiones dx, dy y dz, finalmente, tras el balance se obtiene que la energía acumulada es:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\rho (u^2 + v^2 + w^2)] \right] dx dy dz$$

[2.3]

El problema queda completamente definido al incluir tres ecuaciones adicionales: la ecuación de estado, la de energía interna y la de viscosidad. De forma general:

$$\rho = \rho(p, T)$$

[2.4]

$$E = E(p, T)$$

$$\mu = \mu(p, T)$$

En la obtención de la solución de un problema general de flujo se plantea la búsqueda de los campos de velocidades u , v , w , de presión p , de temperatura T , de densidad ρ , la energía interna E y de viscosidad μ partiendo de un dominio dado, de las propiedades del fluido, de las ecuaciones anteriormente mencionadas y de un conjunto de condiciones de contorno iniciales. Por tanto, la solución requeriría resolver ocho ecuaciones con ocho incógnitas, situación compleja cuya dificultad aumentaría debido a que las fuerzas actuantes o la temperatura puedan deformar el contorno del dominio. La solución de este tipo de problemas es compleja y está fuera del alcance de este proyecto.

El modelo acústico lineal será el que se tratará en este proyecto. En este caso, la obtención de la ecuación de ondas o de la ecuación de Helmholtz, en el caso de comportamiento armónico, resulta de linealizar y combinar las ecuaciones de continuidad, equilibrio dinámico y constitutivas del fluido. Como hipótesis de partida del proceso de linealización se plantea que las variaciones de presión, densidad y velocidad de las partículas, en el caso de medio en movimiento, es pequeño respecto al valor medio o de equilibrio. Esto supone una limitación de la aplicación de la ecuación de ondas debiéndose restringir a fenómenos acústicos de baja amplitud. En el caso de caracterización de silenciadores es útil ya que los sistemas de excitación no suelen superar los 140 dB.

Las hipótesis de partida asociadas a la obtención de la ecuación de ondas, según el método lineal, son las siguientes:

- Trabajaremos con aire, es el caso más usual, tratándolo como gas perfecto, por lo que no existen pérdidas por fricción.
- Se considera que se trabaja con gas ideal por lo que la viscosidad se hace nula ($\mu = 0$).
- El proceso de propagación de ondas se considera adiabático, puesto que hay un intercambio insignificante de energía térmica entre las partículas de un fluido su entropía permanece casi invariable, por tanto, en una perturbación acústica los elementos no intercambian energía.

Esta hipótesis, junto con la de gas perfecto, hacen que el proceso sea considerado isentrópico.

- Se asumen pequeñas variaciones de las funciones de presión, densidad y velocidad de partícula para poder linealizar el problema, lo que implica que a la presión y velocidad media o de equilibrio se superpone una amplitud acústica pequeña, despreciable frente al valor medio, lo que se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho_T &= \rho_0 + \rho \\ p_T &= p_0 + p \\ u_T &= u_0 + u \end{aligned} \quad [2.5]$$

donde p, ρ, u son valores pequeños frente al valor medio, p_0, ρ_0, u_0 .

Para llegar a la ecuación de ondas, como se ha dicho antes, se utilizan las ecuaciones de comportamiento del gas. De las hipótesis 1 y 3:

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad [2.6]$$

diferenciando esta ecuación:

$$V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1} dV = 0 \quad [2.7]$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores, 2.6 y 2.7, se obtiene:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad [2.8]$$

Si se aplica esta última ecuación, 2.8. a una masa fija del volumen de control se obtiene:

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad [2.9]$$

Reorganizando y teniendo en cuenta la velocidad del sonido en el medio, c_0 , se obtiene:

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = c_0^2 \quad [2.10]$$

$$\frac{dP}{d\rho} = c_0^2 \quad [2.11]$$

Por otro lado las ecuaciones de Navier- Stokes, teniendo en cuenta las siguientes hipótesis:

- El aire se comporta como gas ideal y, por tanto, $\mu=0$.
- La derivada total del vector velocidad (es decir, la aceleración) es:

$$\overline{A} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \nabla \overline{u} \quad [2.12]$$

- El término de la fuerza por unidad de volumen se debe a $\overline{B} = \overline{g}$

Se simplifica en:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \nabla \overline{u} - \overline{g} \right) = -\nabla P \quad [2.13]$$

Por otro lado, se ha supuesto que las funciones ρ , P y $\overline{u}$ varían ligeramente respecto a sus valores medios, como se observa en las ecuaciones 2.5, donde $\overline{u_0} = 0$, puesto que no existe flujo medio.

Sustituyendo esas tres ecuaciones en la de Navier-Stokes simplificada se obtiene:

$$(\rho_0 + \rho) \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \nabla \overline{u} - \overline{g} \right) = -\nabla (P_0 + P) \quad [2.14]$$

Y operando:

$$\rho_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \rho_0 \overline{u} \nabla \overline{u} - \rho_0 \overline{g} + \rho \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \rho \overline{u} \nabla \overline{u} - \rho \overline{g} = -\nabla P_0 - \nabla P \quad [2.15]$$

Para linealizar la ecuación, se tiene en cuenta que:

- Los términos de orden superior no se consideran.
- El término $(\rho_0 + \rho) \overline{g}$ es mucho menor que $\rho_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$, por lo tanto no se tienen en cuenta.
- El término ∇P_0 es nulo ya que P_0 es constante.

La ecuación de Navier linealizada queda:

$$\rho_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\nabla P \quad [2.16]$$

Tras haber analizado las ecuaciones de Navier y de los gases para el método lineal, se pasa a analizar la de continuidad.

Como se comentó anteriormente se supone que las variables acústicas sufren pequeñas variaciones en torno a su valor medio, teniendo esto en cuenta, la ecuación de continuidad, 2.1, queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho) + \nabla[(\rho_0 + \rho) \bar{u}] = 0 \quad [2.17]$$

Operando:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{u} + \nabla(\rho \bar{u}) = 0 \quad [2.18]$$

Para linealizar esta ecuación se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- El término $\rho \bar{u}$ es un infinitésimo de orden superior frente al resto de términos, por lo tanto se desprecia.
- La densidad media tiene un valor constante, por lo tanto el término $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$.

La ecuación de continuidad, una vez linealizada, queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \bar{u} = 0 \quad [2.19]$$

Para llegar a la ecuación de ondas se analiza a continuación el comportamiento del fluido. Se tienen en cuenta las siguientes ecuaciones que definen al fluido:

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = c_0^2 \quad [2.20]$$

$$P_T = P_0 + P \quad [2.21]$$

Combinándolas se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P_0 + P}{\rho_0 + \rho} = c_0^2 \quad [2.22]$$

Teniendo en cuenta la hipótesis que se viene barajando de pequeñas variaciones de presión y densidad puede asumirse que:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} = c_0^2 = \text{cte} \quad [2.23]$$

Tomando ahora las ecuaciones linealizadas, 2.19 y 2.22, junto a esta última, se obtiene la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad [2.24]$$

Considerando la presión P como una excitación armónica, definida como $P = P^e e^{i\omega t}$, se obtiene la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 P^e + K^2 P^e = 0 \quad [2.25]$$

Hay que tener en cuenta que este desarrollo se ha llevado a cabo para la obtención de la ecuación de ondas en ausencia de flujo medio, para el caso contrario pueden presentarse algunos problemas, debido a la presencia de términos de velocidad.

2.4 Ondas sonoras en conductos

La más común de todas las configuraciones geométricas que se plantea en el tema del sonido en los conductos es la de un tubo recto, cilíndrico. Tiene una longitud que es considerablemente mayor que las dimensiones transversales, en consecuencia, por debajo de una cierta frecuencia la presión sonora es casi constante a lo largo de la sección transversal.

Por debajo de esta frecuencia, frecuencia de corte, los únicos modos (modos propios), u ondas de propagación, que pueden existir en una distancia considerable a lo

largo del conducto, son los que sólo varían longitudinalmente (es decir, a lo largo de él). Esta región de la frecuencia se llama la región de onda plana, y es un concepto central en el análisis de la propagación del sonido en los conductos, de donde se sigue que el campo de sonido es esencialmente unidimensional. A frecuencias por encima de la región de onda plana, aparecen ondas con formas más complicadas y tienen como característica que la presión sonora varía a lo largo de la sección transversal, se excitarán un número alto de modos propios, dando como resultado un campo casi difuso. En la región de onda plana, los modos superiores sólo pueden existir a nivel local, en las proximidades de las discontinuidades geométricas, como por ejemplo el cambio del área.

Debido a la influencia del flujo constante, la ecuación de onda en los conductos se diferencia un poco de la ecuación de ondas convencional, se le suele llamar la ecuación de onda modificada.

Partiendo de la ecuación de ondas para excitación armónica obtenida en el anteriormente (ecuación de Helmholtz) y suponiendo un conducto de pared rígida con su eje paralelo a la dirección z (asumiendo que la propagación sólo depende de esta coordenada), esta última ecuación puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + K_0 P = 0 \quad [2.26]$$

Cuya solución es del tipo:

$$P(z) = P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z} \quad [2.27]$$

Siendo P^+ y P^- amplitudes complejas asociadas a la onda progresiva y regresiva, respectivamente. La propagación se describe por tanto en base a la suma de dos componentes: una que avanza en el sentido positivo de z y otra en sentido contrario.

Partiendo de la ecuación de Euler, puede obtenerse para la velocidad una expresión similar a la de la presión:

$$U(z) = \frac{1}{\rho_0 c_0} (P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z}) = \frac{1}{Z_0} (P^+ e^{-jk_0 z} + P^- e^{jk_0 z}) \quad [2.28]$$

Donde Z_0 se conoce como impedancia característica del medio. Tanto para la expresión de la presión como de la velocidad, el valor de los coeficientes de propagación se obtiene a partir de las condiciones de contorno aplicadas en el conducto.

Para llegar a esta conclusión se han tomado las mismas hipótesis que se tomaron para obtener la ecuación de onda, matizando lo siguiente:

- La hipótesis de despreciar la transmisión de viscosidad y calor en el fluido es una buena aproximación en la mayoría de los casos, excepto para el caso de un conducto muy pequeño en el que la longitud de éste y su diámetro sean del mismo orden de magnitud.
- La ecuación a la que se ha llegado es una buena aproximación a bajas frecuencias, pero a altas frecuencias los campos de sonidos en el conducto son más complicados. Es posible resolver problemas analíticos sólo en conductos uniformes con secciones transversales con formas sencillas.

Cuando no estamos en este caso debemos realizar el análisis con la ecuación de onda en tres dimensiones.

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad [2.29]$$

Comentar que el modelo de onda plana no es más que un caso particular del método del ajuste modal, considerando un único modo de propagación de los infinitos posibles.

Cuando se considera, por ejemplo, una cámara circular, la solución de la ecuación de ondas no es más que una combinación de los modos de propagación. Estos modos transversales, junto con otros longitudinales, aparecen cuando la frecuencia de excitación alcanza la frecuencia de corte.

2.5 Ventajas e inconvenientes del modelo

Ventajas

Las hipótesis simplificadoras tenidas en cuenta en la deducción del modelo acústico conducen a una mayor sencillez en la resolución de la ecuación. Este modelo permite

extraer conclusiones sin cálculos complejos y, además, en muchos casos las aproximaciones unidimensionales permiten trabajar con soluciones analíticas simples e intuitivas, como es el caso de la ecuación de una onda plana progresiva. Por este motivo, se hace posible cuantificar la validez de la hipótesis de unidimensionalidad del flujo.

Puesto que su resolución, a través de la ecuación de Helmholtz, se realiza en el dominio de la frecuencia, éste es un método adecuado para la obtención de funciones de respuesta en frecuencia, que sólo dependen de las características propias del sistema.

Este modelo está implantado en los programas de cálculo actuales y su utilización es cada vez mayor. Puede usarse para realizar estimaciones iniciales que permitan aplicar otros modelos más complejos del modo más adecuado.

Inconvenientes

Este modelo, como ya se ha comentado antes, está limitado al caso de pequeñas perturbaciones, de modo que no es aplicable al estudio de pulsos de gran amplitud (las fluctuaciones de presión pueden ser como máximo de 20 a 200 Pa). Como es sabido, se trata de un caso particular del modelo dinámico, en el que las tres ecuaciones de continuidad, energía y momento se combinan para dar una única ecuación cuya resolución sólo es válida mientras las hipótesis sean correctas, lo cual no siempre es fácil de determinar. Esta limitación es importante y debe conocerse bien el tipo de fenómeno que se estudia para no cometer errores graves de cálculo.