# 3. ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS DE CONDUCTOS

## 3.1 Introducción

Actualmente, la mayoría de las veces, el diseño de silenciadores se realiza simplemente modificando los existentes. Sin embargo, debido al tamaño y el costo de estos, es muy beneficioso el poder predecir la pérdida de inserción (IL) o la pérdida de transmisión (LT) en esa primera fase de diseño. Para poder predecir esto de una manera adecuada hay muchos factores, tales como la geometría, las propiedades del material absorbente, los efectos de flujo o el ruido generado por sí mismo que deben ser considerado, y se cuenta con métodos que, aún no siendo exactos, pueden orientarnos muy acertadamente en esos momentos, como es el método matricial, sabiendo que el rango de validez de los resultados queda limitado a frecuencias bajas. Para un cálculo más preciso, se cuenta con herramientas más exactas como el ajuste modal, método de elementos finitos, MEF, o método de elementos de contorno, BEM. En este capítulo se abordan los más comunes.

En primer lugar se definirán algunos conceptos básicos que serán utilizados para ver la efectividad de los silenciadores y el cálculo de sus valores característicos y a continuación se definirán el método matricial y el MEF, Método de Elementos Finitos.

## 3.2 Definiciones

A continuación se definen los parámetros más utilizados para caracterizar los silenciadores y comparar su efectividad. Existen tres índices básicos de medida de atenuación sonora en silenciadores:

- Índice de Pérdidas de Inserción, **IL**: definido, en la ecuación 3.1, como la diferencia entre dos niveles de potencia acústica, también puede ser presión e intensidad acústica, medidos en un mismo punto antes y después de que un silenciador haya sido insertado entre el punto de medida y la fuente de ruido. $W_{ref}$ es la potencia acústica sin silenciador y W la potencia acústica con silenciador. Queda definido por la siguiente ecuación:

$$IL = 10\log\left(\frac{W_{ref}}{W}\right) \qquad [3.1]$$

- Índice de Pérdidas de Transmisión; **TL**: es la relación entre la potencia acústica que incide en el silenciador y la potencia acústica transmitida por éste cuando se utiliza una salida anecoica. El índice es independiente de la fuente de ruido. $S_1$ y $S_2$ son las áreas de los conductos de entrada y salida respectivamente, $P_1^+$ la presión incidente y $P_2^+$ la presión transmitida. En ausencia de flujo medio, las pérdidas de transmisión se obtienen por medio de la siguiente expresión:

$$TL = 10\log\left(\frac{S_1|P_1^+|^2}{S_2|P_2^+|^2}\right) = 20\log\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{P_1^+}{P_2^+}\right|\right] \qquad [3.2]$$

Debido a que este índice no depende de la interacción acústica con otros elementos de un sistema acústico, será empleado para evaluar el comportamiento acústico en uno de los silenciadores que se evaluarán en el proyecto.

- Diferencia de nivel, **LD**: referido a la diferencia de los niveles de presión acústica medidos en la fuente de generación de ruido (aguas arriba del silenciador) y en la salida (aguas abajo del silenciador). No es necesaria una terminación anecoica en la salida del silenciador. Siendo $P_1$ la presión aguas arriba y $P_2$ la presión aguas abajo, la diferencia de nivel se calcula por la relación:

$$LD = 20\log\left(\left|\frac{P_1}{P_2}\right|\right) \qquad [3.3]$$

## 3.3 Método matricial

El método matricial o de la matriz de transferencia se utiliza para el análisis de los sistemas en cascada de una sola dimensión, como son los filtros o silenciadores acústicos. En general no hay manera sencilla para tratar el campo del sonido en sistemas de tubos acoplados, sin embargo, a bajas frecuencias, donde podemos considerar comportamiento unidimensional para cada uno de esos tubos, el problema es bastante simple. En cada unión se puede suponer que la presión de salida de un sistema y la velocidad de volumen son los valores de presión y de velocidad de volumen de entrada del sistema de al lado.

El rendimiento de un silenciador se puede obtener fácilmente en términos de los parámetros de cuatro polos, o la matriz de transferencia del sistema completo, que alternativamente puede obtenerse a través de la multiplicación sucesiva de matrices de transferencia de los elementos que constituyen el sistema.

En la práctica, hay varios elementos acoplados en un silenciador real. Sin embargo, los cuatro valores de las constantes de la matriz de cada uno de los elementos no se ven afectados por las conexiones a los siguientes elementos, mientras que los elementos del sistema se puede suponer lineales y pasivos. Por lo tanto, cada elemento se caracteriza por una matriz de transferencia, que depende de sus condiciones y la geometría de flujo. Por ello, es necesario el modelo de cada artículo y luego unirlas todas para obtener la característica acústica total del silenciador.
Si los múltiples elementos de un silenciador, tales como cambios bruscos de sección transversal, tubos extendidos y / o tubos perforados, están conectados en serie, entonces la transferencia total de la matriz del sistema está dada por el producto de las matrices de sistemas individuales. Se supone que, aunque el campo acústico sea multidimensional en el interior de los distintos subcomponentes, en la zona de unión entre estos la onda es plana.

Se explicará la base teórica del método de la matriz con el siguiente conducto simple:

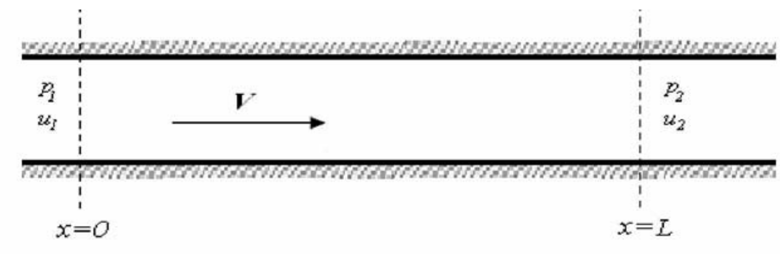


***Figura 3.1*** *Conducto simple*

Usando la analogía de la impedancia, la presión sonora, **p,** y la velocidad de volumen, **u,** en las posiciones 1 (extremo superior) y 2 (extremo en sentido descendente), en la figura 3.1, se pueden relacionar por:

$$p_1 = Ap_2 + Bu_2 \qquad [3.4]$$

$$u_1 = CR_2 + Du_2 \qquad [3.5]$$

donde *A*, *B*, *C*, y *D* generalmente se llaman los parámetros de cuatro polos. Éstas son cantidades complejas, dependientes de la frecuencia, que incorporan las características acústicas del conducto y describen la respuesta espectral de éste. Estos parámetros se pueden obtener, en teoría, mediante métodos clásicos o numéricos para cualquier diseño geométrico, también abarcando la presencia de flujo y diferencias de temperatura, y son los que componen la matriz de transferencia.

Las ecuaciones 3.4 y 3.5 se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad [3.6]$$

O de manera equivalente como:

$$q_1 = Tq_2 \qquad [3.7]$$

Donde $q_t = [p_t \quad u_t]^T$ es un vector de estado, que incorpora las variables de presión *p* y velocidad *u*, en la entrada y en la salida del conducto o silenciador, y

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad [3.8]$$

es la matriz de transferencia de 2×2, definida con respecto a variables de estado. Esta matriz relaciona la velocidad de volumen y la presión sonora en dos puntos en un elemento del silenciador, tal como la del conducto recto discutido anteriormente.

El principio de la reciprocidad requiere que el determinante de la matriz de transferencia sea uno. Además, en un silenciador simétrico *A* y *D* deben ser idénticos.

Si tenemos un sistema más complejo, como el silenciador que vemos en la figura 3.2 que incluye un conducto recto (1), un tubo extendido (2), una expansión repentina donde se tiene un tubo uniforme (3), un tubo perforado (4) (resonador concéntrico), tubo uniforme (5), contracción repentina (6) y nuevamente un conducto recto.

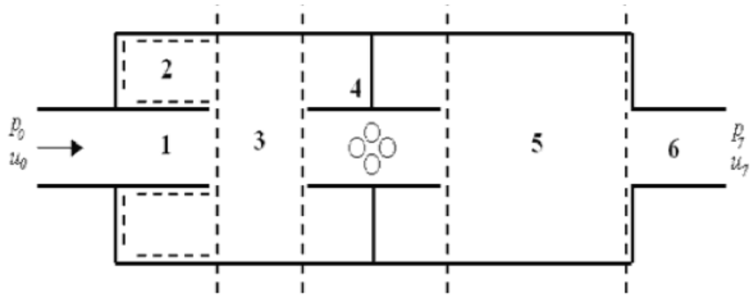


***Figura 3.2*** *Conducto complejo*

Entonces, este silenciador en particular lo podemos describir de la siguiente manera:

$$q_0 = T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 q_7 \qquad [3.9]$$

La única información que se necesita para modelar cualquier silenciador complejo son los elementos de las matrices de transferencia. Los parámetros de cuatro polos se pueden encontrar fácilmente en la literatura para los elementos simples de silenciadores, tales como conductos y cámaras de expansión rectas. Pero para un elemento complejo, los parámetros de cuatro polos pueden tomar formas muy complicadas que matemáticamente no se determinan de manera fácil. Una alternativa es utilizar el Método de Elementos Finitos para obtener numéricamente cada constante

Afortunadamente, una gran cantidad de matrices de transferencia se han desarrollado y se han dado a conocer teóricamente en la literatura. Algunas de ellas incluyen los efectos de flujo, incluso algunas matrices de transferencia dependen de parámetros adicionales tales como conductividad de calor.

Al usar perforaciones en los elementos del silenciador, las matrices de transferencia dependen de la porosidad (número de perforaciones por unidad de longitud del eje del conducto), y particularmente de la impedancia normalizada del elemento en donde se encuentran las perforaciones.

## 3.4 Aplicación del MEF

En este capítulo se va a explicar como el procedimiento que se sigue para aplicar el método de elementos finitos (MEF) a la ecuación de ondas para obtener el sistema de ecuaciones algebraico cuya resolución permite conocer de forma aproximada los campos de presiones y velocidades acústicos. Se considera la ecuación de ondas deducida en el capítulo anterior, como se comentó no se incluye el efecto convectivo debido al flujo medio. Esto implica que el medio (aire) es estacionario y las partículas vibran respecto a su posición de equilibrio con movimiento neto nulo. En silenciadores con componentes perforados y materiales absorbentes, el papel del flujo medio es fundamental y no puede excluirse del análisis. En este caso, sin embargo, se supone que la propagación se produce sin flujo medio, es decir, se considera que el medio de propagación está en reposo, de modo que el único movimiento de las partículas está asociado a la perturbación acústica, con lo que se puede aplicar el método unidimiensional calculado en el apartado anterior.

Lo primero que se desarrolla es el planteamiento de elementos finitos aplicado a la ecuación de ondas para más adelante comentar los aspectos fundamentales asociados, como son las matrices resultantes, el sistema de ecuaciones obtenido y las posibles condiciones de contorno.

### Planteamiento matemático

Las ecuaciones que definen el problema acústico no tienen solución analítica para problemas con geometrías complejas y condiciones de contorno generales. Si las ecuaciones diferenciales son difíciles de resolver, se puede buscar una solución aproximada que satisfaga algunas de las condiciones de contorno en los grados de libertad exactamente y de forma aproximada las ecuaciones diferenciales de comportamiento.

Si el problema se plantea en base a un principio variacional y no es fácil obtener la solución exacta, es posible intentar buscar una solución que minimice de forma aproximada el funcional correspondiente.

Las ecuaciones de elementos finitos pueden obtenerse bien partiendo de la formulación diferencial o bien de un principio variacional. En el primer caso el método de elementos finitos puede considerarse como un método de residuos ponderados (Galerkin) que es una técnica que se utiliza para una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales. En el segundo caso, el método de elementos finitos puede considerarse como un método variacional (Rayleigh-Ritz).

Para resolver el problema acústico se ha planteado el método de elementos finitos mediante la técnica de residuos ponderados. Con dicho planteamiento, se quiere llegar a la obtención de aquellos resultados necesarios para entender cómo se propaga la onda en el interior del silenciador y cuáles son sus características más importantes.

La ecuación de ondas, deducida en el capítulo anterior, resulta ser

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \qquad [3.10]$$

Cuando se considera comportamiento armónico, como ya se indicó, la ecuación anterior es la conocida ecuación de Helmholtz. Esta expresión gobierna el comportamiento del campo de presiones acústicas en el seno del fluido durante el movimiento asociado al avance de la onda de presión.

A continuación se aplica el procedimiento matemático que da lugar a las ecuaciones de elementos finitos. Para ello, se considera la formulación de Galerkin. Multiplicando la ecuación de ondas por la presión e integrando en todo el volumen del fluido $V$ se obtiene [3]:

$$\iiint_V P \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \mathrm{d}V - \iiint_V P \nabla \nabla P \,\mathrm{d}V = 0 \qquad [3.11]$$

Aplicando el teorema de Green a la segunda integral, queda:

$$\iiint_V P \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \mathrm{d}V - \iint_{\vec{A}} P \nabla P \,\mathrm{d}\vec{A} + \iiint_V \nabla P \nabla P \,\mathrm{d}V = 0 \qquad [3.12]$$

o lo que es lo mismo:

$$\iiint_V P \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \mathrm{d}V + \iiint_V \nabla P \nabla P \,\mathrm{d}V = \iint_{\vec{A}} P \nabla P \,\mathrm{d}\vec{A} \qquad [3.13]$$

Se define el operador diferencial $\{L\}$ del siguiente modo:

$$\nabla P = \{L\} P \qquad [3.14]$$

Si se discretiza el volumen de fluido en $n_e$ elementos, considerando la presión $P$ como el único grado de libertad por nodo, dicha presión $P$ en un punto interior a un elemento dado podrá expresarse, en función de la matriz de funciones de forma $\left[\,N\,\right]$, de la forma siguiente:

$$P=\left[\,N\,\right]\left\{\,P^e\,\right\} \tag{3.15}$$

siendo $\left\{\,P^e\,\right\}$ el vector de presiones en cada nodo del elemento.

Utilizando las tres últimas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n_e}\iiint_{V^e}\frac{1}{c_0^2}\left\{\,P^e\,\right\}^t\left[\,N\,\right]^t\left[\,N\,\right]\left\{\,\ddot{P}^e\,\right\}\mathrm{d}V^e+\\&+\sum_{i=1}^{n_e}\iiint_{V^e}\left\{\,P^e\,\right\}^t\left[\,N\,\right]^t\left\{\,L\,\right\}^t\left\{\,L\,\right\}\left[\,N\,\right]\left\{\,P^e\,\right\}\mathrm{d}V^e=\\&=\sum_{i=1}^{n_e}\iint_{A^e}\left\{\,P^e\,\right\}^t\left[\,N\,\right]^t\left\{\,n\,\right\}^t\nabla P\,\mathrm{d}\,A^e\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde {n} es el vector normal a la superficie de contorno en cada punto.

Dado que se está considerando un problema axisimétrico, sólo intervienen dos variables espaciales, que son la coordenada del eje de revolución $z$ y la coordenada radial $r$. De esta forma, las integrales en el volumen son en realidad integrales de área (puesto que no hay variación circunferencial y la integral asociada a la coordenada circunferencial da como resultado $2\pi$). Si se define la matriz [$B$] del siguiente modo:

$$\left[\,B\,\right]=\left\{\,L\,\right\}\left[\,N\,\right]=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial\, r}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial\, z}\end{matrix}\right\}\left[\,N_1\quad ....\quad N_n\,\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_n}{\partial r}\\[2ex]\dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_n}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{3.17}$$

la anterior ecuación se puede escribir como sigue:

$$\left( \sum_{i=1}^{n_e} \iiint_{V^e} \frac{1}{c_0^2} [\, N \,]^t [\, N \,] \mathrm{d} V^e \right) \left\{ \ddot{P}^e \right\} + \left( \sum_{i=1}^{n_e} \iiint_{V^e} [\, B \,]^t [\, B \,] \mathrm{d} V^e \right) \left\{ P^e \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_e} \iint_{A^e} [\, N \,]^t \{\, n \,\}^t \nabla P \,\mathrm{d}\, A^e \qquad [3.18]$$

Por último, introduciendo la nomenclatura:

$$[M\,] = \sum_{i=1}^{n_e} \iiint_{V^e} \frac{1}{c_0^2} [\, N \,]^t [\, N \,] \mathrm{d} V^e$$

$$[\, K \,] = \sum_{i=1}^{n_e} \iiint_{V^e} [\, B \,]^t [\, B \,] \mathrm{d} V^e$$

$$\{\, F \,\} = \sum_{i=1}^{n_e} \iint_{A^e} [\, N \,]^t \{\, n \,\}^t \nabla P \,\mathrm{d}\, A^e \qquad [3.19]$$

la ecuación puede expresarse como:

$$[\, M \,] \left\{ \ddot{P}^e \right\} + [\, K \,] \left\{ P^e \right\} = \{\, F \,\} \qquad [3.20]$$

que no es más que un sistema de ecuaciones diferenciales similar al que se obtiene en problemas de vibraciones. En general, se considera excitación armónica, de manera que la solución de dicha ecuación proporciona el valor de la presión en los nodos de la malla de elementos finitos para cada frecuencia de excitación.

Desarrollo de matrices integrales

El planteamiento del problema de elementos finitos puede hacerse con las ecuaciones que se desarrollan a continuación. La presión *P* en un punto del elemento *e* se obtiene a partir de la ecuación 3.21:

$$P = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi, \eta) P_i^e \qquad [3.21]$$

donde:

- $P_i^e$ es la presión en el nodo *i* del elemento *e*.

- $N_i(\xi,\eta)$ es el valor de la función de forma asociada al nodo *i* del elemento *e* en el punto de coordenadas locales $\xi$ y $\eta$.

- *n* es el número de nodos por elemento.

La anterior ecuación puede expresarse de modo matricial como:

$$P = [N]\{P^e\} \qquad [3.22]$$

Siendo:

$$[N] = [N_1(\xi,\eta)......N_n(\xi,\eta)] \qquad [3.23]$$

y

$$\{P^e\}^t = \{P_1^e.....P_n^e\} \qquad [3.24]$$

Para el caso de problema axisimétrico, la transformación isoparamétrica de coordenadas puede expresarse como:

$$r = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\, r_i^e$$
$$z = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\, z_i^e \qquad [3.25]$$

donde:

- $r_i^e$ es la coordenada *r* en el sistema global cilíndrico del nodo *i* del elemento *e*.

- $z_i^e$ es la coordenada *z* en el sistema global cilíndrico del nodo *i* del elemento *e*.

La matriz jacobiana de la transformación de coordenadas se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} r_i & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} r_i & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \qquad [3.26]$$

Las derivadas parciales de las funciones de forma respecto a las coordenadas globales pueden obtenerse mediante:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial r}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

El gradiente de la presión en un punto puede expresarse del siguiente modo:

$$\nabla P = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial r} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

Utilizando la expresión de $\left[ B \right]$, el gradiente queda:

$$\nabla P = \left[ B \right] \left\{ P^e \right\} \tag{3.29}$$

Las integrales de volumen, en el caso del problema axisimétrico, pueden obtenerse mediante:

$$\iiint_{V^e} F(r,z)\,\mathrm{d}V^e = \iiint_{V^e} F(r,z)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = 2\pi \iint F(r,z)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \tag{3.30}$$

y en función de las coordenadas locales del elemento:

$$\iiint_{V^e} F(r,z)\,\mathrm{d}V^e = 2\pi \iint F(\xi,\eta) \det\left[ J \right] r(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{3.31}$$

Utilizando este resultado, es posible calcular las matrices de masa y rigidez mediante las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} \left[ M^e \right] &= \frac{1}{c_0^2} 2\pi \iint \left[ N(\xi,\eta) \right] \left[ N(\xi,\eta) \right]^t \det\left[ J \right] r(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ \left[ K^e \right] &= 2\pi \iint \left[ B(\xi,\eta) \right]^t \left[ B(\xi,\eta) \right] \det\left[ J \right] r(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \end{aligned} \tag{3.32}$$

El vector de fuerzas independientes requiere un estudio más profundo. De la ecuación usada para hallar dicho término se deduce que este vector depende del gradiente de la presión en el contorno considerado. Sin embargo, de la ecuación de Navier-Stokes se deduce que dicho gradiente de la presión esta relacionado con la velocidad del fluido en el contorno. En realidad, este término de la ecuación se utiliza para forzar un determinado campo de velocidades en un contorno cuando es necesario especificar dicha condición de contorno. Este es el motivo por el cual es preferible expresar el vector de fuerzas independientes en términos de la velocidad del fluido en el contorno en lugar de hacerlo mediante el gradiente de presiones.

Sustituyendo la ecuación de Navier en la del vector de fuerzas, se puede expresar éste como:

$$\left\{ F^e \right\} = -\iint_{A^e} \left[ N \right]^t \left\{ n \right\}^t \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \mathrm{d} A^e \qquad [3.33]$$

Si se supone que la derivada parcial de la velocidad respecto al tiempo es constante en todo el contorno y teniendo en cuenta el vector $\left\{ n \right\}$ se tiene:

$$\left\{ F^e \right\} = -\rho_0 \frac{\partial U_n}{\partial t} \iint_{A^e} \left[ N \right]^t \mathrm{d} A^e \qquad [3.34]$$

donde $\frac{\partial U_n}{\partial t}$ es la derivada temporal de la componente normal de la velocidad en el contorno. Suponiendo comportamiento armónico:

$$\nabla P_n = -\rho_0 \frac{\partial U_n}{\partial t} = -\mathrm{j} \rho_0 \omega \tilde{U}_n \qquad [3.35]$$

y tomando como positiva la velocidad saliente, queda:

$$\left\{ F^e \right\} = -\mathrm{j} \rho_0 \omega \tilde{U}_n \iint_{A^e} \left[ N \right]^t \mathrm{d} A^e \qquad [3.36]$$

y en función de las coordenadas locales axisimétricas:

$$\left\{ F^e \right\} = -2\pi \, \mathrm{j} \rho_0 \, \omega \tilde{U}_n \int_s [\, N \,]^t \, r(s) \, \mathrm{d}s \tag{3.37}$$