ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
UNVERSIDAD DE SEVILLA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS II

PROYECTO FIN DE CARRERA:

ESTUDIO DE LA FRONTERA DE ESTABILIDAD GIROSCÓPICA DE UN SISTEMA MECÁNIC0 ARO-BARRA CON LIGADURAS NO HOLÓNOMAS

PRESENTADO POR D. JUAN ANTONIO MARTÍN HERVÁS
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO INDUSTRIAL

DIRECTOR DEL PROYECTO:

D. EMILIO FREIRE MACÍAS

Sevilla ,Junio de 2011

Contenido

A mis pequeñas Lorena y Natalia, por ser mi sonrisa y mi alegría,
a mi esposa Sonia, mi apoyo incondicional,
a mi padre Rafael, por su constante motivación,
a mi madre Manuela, por ayudarme a ser quien soy,
y por supuesto a mi suegro Juan Antonio, mi otro padre.

1.- INTRODUCCIÓN

La dinámica es la rama de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas cuya iniciación se atribuye a Galileo (1564-1642) quien realizó cuidadosas observaciones sobre la caída libre de los cuerpos, el movimiento sobre planos inclinados y los péndulos. Fué la inexistencia de medios para medir el tiempo con precisión lo que retrasó los avances en este campo hasta que Huygens (1629-1695) inventara el reloj de péndulo en 1657.

Guiado por los trabajos de Galileo, Newton (1642-1727) formuló las leyes del movimiento y asentó la dinámica sobre una base sólida. Posteriormente, Euler (1707-1793) extendió los trabajos de Newton de partículas o puntos materiales a los sistemas de cuerpos rígido, D'Alembert (1717-1783) introdujo el concepto de fuerza de inercia, Lagrange (1736-1813) dedujo analíticamente las ecuaciones generalizadas del movimiento utilizando conceptos energéticos y Coriolis (1792-1843) extendió la aplicación de las leyes de Newton a sistemas de referencia en rotación con la incorporación de términos adicionales.

Son las ecuaciones obtenidas por Lagrange las que permiten obtener fórmulas generales a partir de las cuales poder extraer resultados de casos particulares y que serán utilizadas en el desarrollo de este estudio.

El estudio del movimiento de un disco sobre una superficie en el que este gira o rueda sin deslizar ha sido realizado en innumerables ocasiones y cuya observación a través de artilugios como el disco de Euler, para el caso del giro, hace aún más fascinante el reto matemático de su resolución, permitiendo contemplar el movimiento de rotación de un disco y percibir de una forma más evidente el proceso de disipación de la energía cinética que inicialmente fue aplicada al mismo hasta alcanzar un nuevo estado de reposo sobre la superficie de contacto. Para el caso de la rodadura, no hay mejor ejemplo que el de la moneda rodando sobre una superficie plana. Puede observarse en este caso, que su movimiento evoluciona desde una rodadura más o menos pura, con una dirección aproximadamente recta, hacia una trayectoria curva cuyo radio de giro desciende paulatinamente hasta finalizar con un movimiento similar al que se produce en el disco girando. Este cambio de comportamiento se debe a pequeñas perturbaciones en el sistema que producen, en este caso, la inestabilidad del mismo y su evolución hasta el reposo, mostrando que existe por tanto, algún factor o factores que dependiendo de su valor en cada instante, repercuten en la estabilidad del desplazamiento.

A partir del proyecto realizado por D. Juan de Dios Rey Morillo, "Estudio de la estabilidad de un sistema mecánico aro-barra con ligaduras no holónomas", de cuyos resultados se basa este proyecto, se realiza el análisis de las ecuaciones de movimiento dirigido a la obtención de la frontera de estabilidad para el caso particular del movimiento de rodadura sin deslizar para el mismo sólido y cuyas ecuaciones serán comparadas con las que se obtendrían para el aro simple.

Dada la complejidad del sistema de ecuaciones que se espera obtener, la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales se abordará a través del programa de cálculo numérico DINAMICS SOLVER para extraer un muestreo periódico de la señal de salida del mismo y su posterior representación gráfica.

2.- DEFINICIÓN DEL SISTEMA MECÁNICO

El sistema mecánico objeto de estudio consiste en un aro rígido unido solidariamente a una barra diametral como se muestra en la figura 1. Este sistema se desplaza sobre una superficie horizontal que permite la rodadura sin deslizamiento.

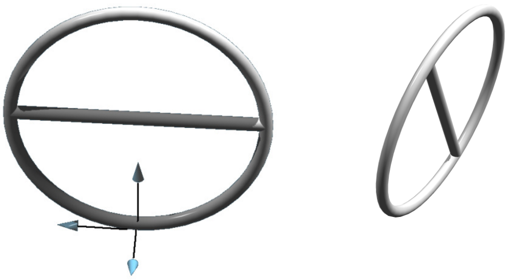


Fig.1 – Sistema mecánico aro-barra.

Si en el caso del disco homogéneo o del aro simple, la inercia del sólido respecto a cualquier eje con origen en su centro geométrico y de masas y contenido en el plano descrito por el mismo presenta el mismo valor, la barra diametral provoca la desaparición de esta propiedad y la modificación de las ecuaciones de movimiento. A lo largo del desarrollo del estudio se mantendrán identificados los términos dependientes de la barra diametral y del aro para posibilitar la identificación directa con el caso simple sin barra.

Para la descripción de su movimiento sobre una superficie plana con respecto a un sistema de referencia inercial y por tanto para la determinación de sus ecuaciones de movimiento, se requiere la definición de una serie de sistemas de referencia y ángulos para el posicionamiento unívoco del sistema mecánico objeto del análisis. Si esta elección se realiza adecuadamente, la descripción de la mecánica del sólido se simplifica. A continuación, en la figura 2, se define el sistema de referencia inercial o sólido 0, los sistemas no inerciales de referencia 1, 2 y 3 y los ángulos necesarios para la determinación unívoca de la posición del sistema.

ϕ: ángulo de guiñada.
θ: ángulo de caída.
ψ: ángulo de rotación.

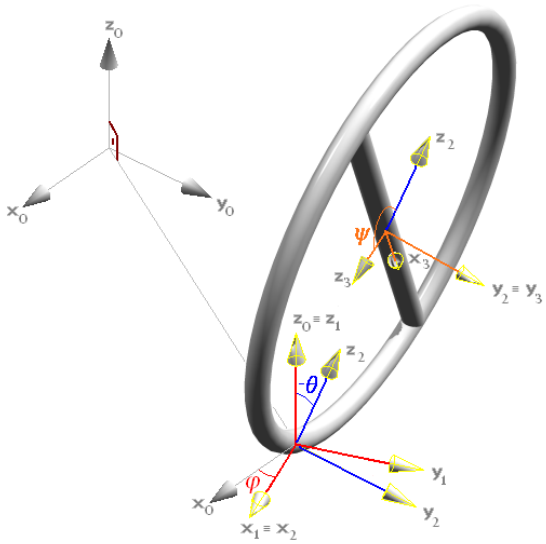


Fig.2 – Definición de los sistemas de referencia y ángulos.

- El sistema de referencia 0, es el sistema de coordenadas global sobre el que se definirán los movimientos absolutos.

- El sistema de referencia 1, es el sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el punto de contacto del sistema aro-barra con la superficie plana horizontal de apoyo. El eje z_1 es paralelo al correspondiente del sistema de referencia 0 y representa el eje de giro que describe el ángulo de guiñada, φ.

- El sistema de referencia 2, es el sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el punto de contacto del sistema aro-barra con la superficie plana horizontal de apoyo y cuyo eje z_2 pasa por el centro de gravedad del sistema. El giro alrededor del eje x_3 define el ángulo de caída, θ.

- El sistema de referencia 3, es el sistema de coordenadas cuyo origen coincide con el centro geométrico y de masas del sistema aro-barra. Su eje x_3 sigue la directriz de la barra diametral mientras que el giro a través de su eje y_3 define el ángulo de rotación, ψ.

Para la definición de la posición del sistema mecánico se utilizarán, además de los ángulos definidos, las coordenadas del punto de contacto respecto al sólido 0. De este modo, se puede definir el vector de coordenadas generalizadas:

$$q = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ r \end{pmatrix} \quad \text{siendo} \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad ; \quad r = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Se obtendrán las ecuaciones de movimiento generales y se particularizarán para distintas opciones de movimiento. Se analizará si las expresiones obtenidas soportan dicho movimiento o si por el contrario, este no es posible y en el/los caso/s que corresponda, se identificarán las ecuaciones de movimiento para el caso de aro sin barra. Finalmente se estudiará la influencia de los parámetros del sistema en la estabilidad del movimiento de rodadura ante pequeñas perturbaciones.

3.- EL TENSOR DE INERCIA

El tensor de inercia de un sólido rígido es un tensor simétrico de segundo orden, que expresado en una base ortonormal viene dado por una matriz simétrica, por lo que se denominan ejes principales y las direcciones de los mismos direcciones principales de inercia. Dicho tensor se forma a partir de los momentos de inercia según tres ejes perpendiculares y tres productos de inercia.

El tensor de inercia del sistema mecánico se encontrará constituido por la suma de términos inerciales procedentes del aro y de la barra.

ARO

La inercia del aro respecto al eje "y" del sólido 3 es:

$$I_{yy,3} = \int (x^2 + y^2) dm = \int R^2 dm = \int R^2 \rho R d\psi = \rho R^3 \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi \rho R^3 = M_a R^2$$

Siendo: $dm = \rho R d\psi$

Por otro lado, la inercia del aro respecto al eje "y" del sólido 3 se puede expresar como la suma de las inercias respecto a los planos "x=0" (plano yz) y a "z=0" (plano xy) del mismo sólido:

$$I_{yy,3} = I_x + I_z = 2I_x = 2I_z \quad \text{por tanto: } I_x = I_z = M_a \frac{R^2}{2} \;\; ; \;\; I_y = 0$$

Por último, la inercia del aro respecto a los ejes "x"y "z" del sólido 3:

$$I_{xx,3} = I_{zz,3} = M_a \frac{R^2}{2}$$

BARRA

La inercia de la barra respecto al plano "x=0" del sólido 3:

$$I_x = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho \, dx = 2\rho \int_0^{L/2} x^2 \, dx = 2\rho (x^3/3|_0^{L/2} = 2\rho/3 \left({L^3}/{8} \right) = \frac{M_b L^2}{12}$$

Respecto los planos "y=0" y "z=0" del sólido 3:

$$I_y = I_z = \int y^2 dm = \int z^2 dm = 0$$

Por tanto, las inercias de la barra respecto a los ejes "x", "y" y "z" del sólido 3 serán:

$$I_{xx} = I_y + I_z = 0 + 0 = 0$$

$$I_{yy} = I_x + I_z = \frac{M_b L^2}{12} + 0 = \frac{M_b 4R^2}{12} = \frac{M_b R^2}{3}$$

$$I_{zz} = I_x + I_y = \frac{M_b L^2}{12} + 0 = \frac{M_b 4R^2}{12} = \frac{M_b R^2}{3}$$

Por otro lado, se definen los parámetros adimensionales:

$$\alpha = \frac{m_a/2}{(m_a + m_b)} \;\; ; \;\; \beta = \frac{m_b/3}{(m_a + m_b)}$$

$m_a = M_a \;\; masa\ del\ aro.$

$m_b = M_b \;\; masa\ de\ la\ barra.$

Nótese que: $2\alpha + 3\beta = 1$ (1)

El tensor de inercia, por tanto, adopta la siguiente forma:

$$I_T = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}_3 (m_a + m_b)R^2$$

Expresión que puede presentarse diferenciando los términos debidos al aro y a la barra:

$$I_T = I_{T1} + I_{T2} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}_3 (m_a + m_b)R^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}_3 (m_a + m_b)R^2$$

4.- OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RESTRICCIÓN

A continuación se desarrolla la condición impuesta de rodar sin deslizar del sistema mecánico que se traduce en velocidad nula del punto de contacto.

$$\overrightarrow{v^C} = \overrightarrow{v^G} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} = 0 \qquad (2)$$

Para la evaluación de esta igualdad se debe obtener las expresiones de los términos que intervienen.

La posición del centro de gravedad del sistema respecto al sólido inercial de referencia o sólido 0 resulta:

$$\overrightarrow{r^G} = \overrightarrow{r^C} + \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \end{pmatrix}_0 + R \begin{pmatrix} \sin\varphi \sin\theta \\ -\cos\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_0$$

La velocidad del centro de gravedad del sistema respecto al sólido inercial de referencia o sólido 0 puede expresarse a partir de la anterior:

$$\overrightarrow{v^G} = \frac{d\overrightarrow{r^G}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ 0 \end{pmatrix}_0 + R \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta & \sin\varphi \cos\theta & 0 \\ \sin\varphi \sin\theta & -\cos\varphi \cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}_0 \dot{\tilde{q}}$$

$$\text{donde} \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \;;\; \dot{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

La velocidad angular respecto a los ejes globales:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{\imath'} + \dot{\psi}\vec{\jmath''}$$

Para su evaluación se necesitan las matrices de giro de los sistemas de referencia asociados a los sólidos del sistema con respecto al sistema global de coordenadas:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ siendo } A_\varphi \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ siendo } A_\theta \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \text{ siendo } A_\psi \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Por tanto, respecto al sistema inercial de referencia:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix} + \dot{\psi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\theta\\\cos\varphi\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

donde:

$$\vec{\imath'} = A_{\varphi}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\jmath''} = A_{\varphi}A_{\theta}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A_{\varphi}\begin{pmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\theta\\\cos\varphi\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

Pudiéndose escribir:

$$\vec{\omega} = G\dot{\tilde{q}} \quad \text{donde} \quad G = \begin{pmatrix}0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta\\0 & \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta\\1 & 0 & \sin\theta\end{pmatrix}_0 \ ; \ \tilde{q} = \begin{pmatrix}\varphi\\\theta\\\psi\end{pmatrix} \ ; \ \dot{\tilde{q}} = \begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{pmatrix}$$

Por otro lado, para expresar la velocidad angular en ejes locales se debe encontrar:

$$A_{-\varphi} = {A_{\varphi}}^{T}$$

$$A_{-\theta} = {A_{\theta}}^{T}$$

$$A_{-\psi} = {A_{\psi}}^{T}$$

Así, conocidas las matrices de giro que pasan de ejes locales a globales, se puede realizar la transformación inversa como a continuación se muestra:

$$\vec{k} = A_{-\psi}A_{-\theta}A_{-\varphi}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\0 & 1 & 0\\\sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\theta\\\cos\varphi\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{\imath'} = A_{-\psi}A_{-\theta}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\0 & 1 & 0\\\sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi\\0\\\sin\varphi\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{\imath'} + \dot{\psi}\vec{\jmath''} = \dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\psi\cos\theta\\\sin\theta\\\cos\psi\cos\theta\end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\psi\\0\\\sin\psi\end{pmatrix} + \dot{\psi}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\psi\cos\theta & \sin\psi & 0 \end{pmatrix}_3 \dot{\vec{q}} = \bar{G}\dot{\vec{q}}$$

La velocidad angular en el sistema local será de utilidad en el cálculo del término inercial de la energía cinética T.

Resta por obtener el término $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC}$:

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} = R \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \\ 1 & 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge (-1) \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= -R \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta \\ \dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\cos\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta & \dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\cos\theta & \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = -R\big[&\big(\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta + \dot{\psi}\cos\varphi\cos^2\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\psi}\cos\varphi\sin^2\theta\big)\vec{\imath} \\ &+ \big(-\dot{\theta}\cos^2\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin^2\varphi\sin\theta\big)\vec{k} \\ &+ \big(\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\psi}\sin\varphi\sin^2\theta - \dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta + \dot{\psi}\sin\varphi\cos^2\theta\big)\vec{\jmath}\big] \end{aligned}$$

Ordenando términos:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} = -R\big[&\big(\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\psi}\cos\varphi\big)\vec{\imath} \\ &+ \big(\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta + \dot{\psi}\sin\varphi\big)\vec{\jmath} + \big(-\dot{\theta}\sin\theta\big)\vec{k}\big] \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC} = R\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + R\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + R\dot{\psi} \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \dot{\vec{q}}$$

Por tanto, retomando la expresión (2):

$$\vec{v^c} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ 0 \end{pmatrix}_0 + R \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}_0 \dot{\vec{q}} +$$

$$+R\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}_0 \dot{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ 0 \end{pmatrix}_0 + R\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_0 \dot{\tilde{q}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R\sin\varphi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{r}_c \end{pmatrix}$$

De esta expresión se define la matriz de restricción:

$$B^T(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R\sin\varphi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_0 \qquad (3)$$

5.- CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE LAGRANGE

La función de Lagrange, L, de un sistema dinámico resume la dinámica del mismo y su expresión es:

$$L = T - U$$

Donde T es la energía cinética y U la energía potencial, la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}(m_a + m_b)\left|\overrightarrow{v^G}\right|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{I}(G)\vec{\omega}$$

Así:

$$L = \frac{1}{2}(m_a + m_b)\left|\overrightarrow{v^G}\right|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{I}(G)\vec{\omega} - (m_a + m_b)gR\cos\theta$$

Siendo, como ya se dedujo anteriormente:

$$\overrightarrow{v^G} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ 0 \end{pmatrix}_0 + R\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}_0 \dot{\tilde{q}} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right)\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{r_c} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right)\dot{q}$$

Por tanto:

$$\left|\overrightarrow{v^G}\right|^2 = \overrightarrow{v^G}^T \cdot \overrightarrow{v^G} =$$

$$= \dot{q}^T \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ R\sin\varphi\cos\theta & -R\cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ R\sin\varphi\sin\theta & -R\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & -R\sin\theta & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right)\dot{q}$$

$$= \dot{q}^T \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta & 0 & 0 & R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & R\sin\varphi\cos\theta & -R\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\sin\theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R\sin\varphi\cos\theta & -R\cos\varphi\cos\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{q} =$$

$$= \dot{q}^T M\ \dot{q} = \dot{q}^T \begin{pmatrix} M_{3x3} & N_{3x3} \\ N_{3x3} & I'_{3x3} \end{pmatrix}$$

Para obtener el segundo término de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{I}(G)\vec{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \cos\psi & 0 & 1 \\ \cos\psi\cos\theta & \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\psi\cos\theta & \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}} =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \cos\psi & 0 & 1 \\ \cos\psi\cos\theta & \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_{x_3}\sin\psi\cos\theta & I_{x_3}\cos\psi & 0 \\ I_{y_3}\sin\theta & 0 & I_{y_3} \\ I_{z_3}\cos\psi\cos\theta & I_{z_3}\sin\psi & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}} =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \begin{pmatrix} I_{x_3}\sin^2\psi\cos^2\theta + I_{y_3}\sin^2\theta + I_{z_3}\cos^2\psi\cos^2\theta & (I_{z_3} - I_{x_3})\cos\psi\sin\psi\cos\theta & I_{y_3}\sin\theta \\ (I_{z_3} - I_{x_3})\cos\psi\sin\psi\cos\theta & I_{x_3}\cos^2\psi + I_{z_3}\sin^2\psi & 0 \\ I_{y_3}\sin\theta & 0 & I_{y_3} \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}}$$

Si el sistema mecánico no dispusiera de la barra diametral se podría realizar una simplificación importante, $I = I_{x_3} = I_{z_3}$; $I_{y_3} = 2I$, obteniéndose:

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{I}(G)\vec{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T \begin{pmatrix} I(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) & & 2I\sin\theta \\ 0 & I & 0 \\ 2I\sin\theta & & 2I \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}}$$

Por el contrario, el sistema mecánico que se desarrolla presenta la particularidad de la desigualdad de las inercias respecto a los planos ortogonales resultantes de hacer $x_3 = 0\ (I_{x_3})$ y $z_3 = 0\ (I_{z_3})$, es decir, $I_{x_3} \neq I_{z_3}$ debido a la barra diametral. Por tanto, para la obtención del segundo término de la energía cinética se debe sustituir las inercias por sus expresiones.

→ $I_{x_3}\sin^2\psi\cos^2\theta + I_{y_3}\sin^2\theta + I_{z_3}\cos^2\psi\cos^2\theta =$

$$= (m_a + m_b)R^2(\alpha\sin^2\psi\cos^2\theta + (2\alpha+\beta)\sin^2\theta + (\alpha+\beta)\cos^2\psi\cos^2\theta) =$$

$$= (m_a + m_b)R^2\big(\alpha(\sin^2\psi\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta) + \beta(\sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta)\big) =$$

$$= (m_a + m_b)R^2\big(\alpha(1 + \sin^2\theta) + \beta(\sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta)\big)$$

→ $-I_{x_3}\cos\psi\sin\psi\cos\theta + I_{z_3}\cos\psi\sin\psi\cos\theta =$

$$= (m_a + m_b)R^2\big(-\alpha(\cos\psi\sin\psi\cos\theta) + (\alpha+\beta)(\cos\psi\sin\psi\cos\theta)\big) =$$

$$= (m_a + m_b)R^2(\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta)$$

→ $-I_{y_3}\sin\theta = (m_a + m_b)\,R^2\big((2\alpha+\beta)\sin\theta\big) = (m_a + m_b)\,R^2(2\alpha\sin\theta + \beta\sin\theta)$

→ $I_{x_3}\cos^2\psi + I_{z_3}\sin^2\psi = (\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{R}^2(\alpha\cos^2\psi + (\alpha + \beta)\sin^2\psi) = (\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{R}^2(\alpha + \beta\sin^2\psi)$

→ $I_{y_3} = (\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{R}^2(2\alpha + \beta)$

Sustituyendo las expresiones en la matriz, sacando factor común a $(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{R}^2$ y dividiendo las contribuciones de α y β en dos matrices, resulta:

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{I}(G)\vec{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{R}^2\left\{\alpha\begin{pmatrix}1+\sin^2\theta & 0 & 2\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ 2\sin\theta & 0 & 2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta & \cos\psi\sin\psi\cos\theta & \sin\theta\\ \cos\psi\sin\psi\cos\theta & \sin^2\psi & 0\\ \sin\theta & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\dot{\vec{q}} =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{R}^2(\alpha\mathrm{k'}_1 + \beta\mathrm{k'}_2)\dot{\vec{q}}$$

Si se define:

$$\mathrm{k}_1 = \alpha\mathrm{R}^2\mathrm{k'}_1$$

$$\mathrm{k}_2 = \beta\mathrm{R}^2\mathrm{k'}_2$$

Obteniéndose el término de la energía cinética en su término inercial:

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{I}(G)\vec{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2)\dot{\vec{q}}$$

Por tanto, la expresión de la función de Lagrange resulta:

$$L = \frac{1}{2}(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\left(\dot{\mathrm{q}}^\mathrm{T}\mathrm{M}\dot{\mathrm{q}} + \dot{\vec{q}}^T(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2)\dot{\vec{q}}\right) - (\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{gR}\cos\theta$$

A continuación se pueden sumar las matrices M_{3x3} (que corresponde a parte de la matriz M) y k_1 pues ambas multiplican por las mismas coordenadas generalizadas.

$$\mathrm{M}^{\mathrm{sum}} = \begin{pmatrix}\mathrm{M}_{3x3}{}^{\mathrm{sum}} & \mathrm{N}_{3x3}\\ \mathrm{N}_{3x3}{}^{\mathrm{T}} & \mathrm{I}_{3x3}\end{pmatrix}$$

Siendo:

$$\mathrm{M_{3x3}}^{\mathrm{sum}} = \mathrm{R}^2 \begin{pmatrix} \alpha + (1+\alpha)\sin^2\theta & 0 & 2\alpha\sin\theta \\ 0 & 1+\alpha & 0 \\ 2\alpha\sin\theta & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Pudiéndose escribir:

$$L = \frac{1}{2}(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\left(\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}^{\mathrm{sum}}\dot{\mathrm{q}} + \dot{\tilde{q}}^{T}\mathrm{k}_2\dot{\tilde{q}}\right) - (\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\mathrm{g}\mathrm{R}\cos\theta$$

6.- ADIMENSIONALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE LAGRANGE

La función obtenida en el apartado anterior es objeto de su adimensionalización como paso previo al cálculo de las ecuaciones de movimiento.

Escalando los parámetros x_c e y_c por R y considerando:

$$(\mathrm{m_a} + \mathrm{m_b})\Omega^2\mathrm{R}^2 = 1$$

$$\tau = \Omega \mathrm{t} \quad \text{donde} \quad \Omega^2 = {}^{\mathrm{g}}/_{\mathrm{R}}$$

se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}^{\mathrm{sum}}\dot{\mathrm{q}} + \dot{\tilde{q}}^{T}\mathrm{k}_2\dot{\tilde{q}}\right) - \cos\theta$$

A partir de ahora y en adelante, todas las expresiones se consideran adimensionalizadas, manteniéndose las designaciones presentadas para cada uno de los vectores y matrices.

7.- ECUACIONES LAGRANGIANAS DE MOVIMIENTO. FORMA MATRICIAL.

Las ecuaciones de movimiento según el principio de D'Alembert-Lagrange para el caso con restricciones no holónomas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} + B(q)\lambda \quad \text{con} \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \ \epsilon \mathbb{R}^2$$

Siendo λ el vector de multiplicadores de Lagrange del sistema.

Se procede a obtener las ecuaciones de movimiento mediante la sustitución de las restricciones de movimiento tras desarrollar las expresiones diferenciales.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M_T{}^{sum}\dot{\mathrm{q}} + k_2\dot{\tilde{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = M_T{}^{sum}\ddot{\mathrm{q}} + k_2\ddot{\tilde{\mathrm{q}}} + \mathrm{D}_1(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}})\dot{\mathrm{q}} + \mathrm{D}_2(\tilde{\mathrm{q}},\dot{\tilde{\mathrm{q}}})\dot{\tilde{\mathrm{q}}}$$

A continuación se muestra las expresiones que definen a las nuevas matrices $\mathrm{D}_1(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}})$ y $\mathrm{D}_2(\tilde{\mathrm{q}},\dot{\tilde{\mathrm{q}}})$:

$$\mathrm{D}_1(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}}) = \frac{d}{dt}M_T{}^{sum} =$$

$$= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha + (1+\alpha)\sin^2\theta & 0 & 2\alpha\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 2\alpha\sin\theta & 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\cos\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(M_{T,\varphi}{}^{sum}\dot{q} \quad ; \quad M_{T,\theta}{}^{sum}\dot{q} \quad ; \quad M_{T,\psi}{}^{sum}\dot{q} \quad ; \quad M_{T,x_c}{}^{sum}\dot{q} \quad ; \quad M_{T,y_c}{}^{sum}\dot{q}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & N_\varphi \\ N_\varphi{}^T & 0 \end{pmatrix}\dot{q} \quad ; \quad \begin{pmatrix} M_\theta{}^{sum} & N_\theta \\ N_\theta{}^T & 0 \end{pmatrix}\dot{q} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{q} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{q} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{q}\right) =$$

Donde:

$$N_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_\theta{}^{sum} = \begin{pmatrix} 2(1+\alpha)\sin\theta\cos\theta & 0 & 2\alpha\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha\cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$\mathrm{D}_2(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}}) = \frac{d}{dt}k_2 = \frac{d}{dt}\beta\begin{pmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta & \cos\psi\sin\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\psi\sin\psi\cos\theta & \sin^2\psi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (k_{2,\varphi}\dot{q} \quad ; \quad k_{2,\theta}\dot{q} \quad ; \quad k_{2,\psi}\dot{q})$$

Donde:

$$k_{2,\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{2,\theta} = \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\psi\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\psi\sin\psi\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\psi\sin\psi\sin\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi & -\cos\psi\sin\psi\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\psi\sin\psi\sin\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_{2,\psi} = \begin{pmatrix} -2\cos\psi\sin\psi\cos^2\theta & -\sin\psi\sin\psi\cos\theta + \cos\psi\cos\psi\cos\theta & 0 \\ -\sin\psi\sin\psi\cos\theta + \cos\psi\cos\psi\cos\theta & 2\sin\psi\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cos\psi\sin\psi\cos^2\theta & \cos\theta\,(\cos^2\psi - \sin^2\psi) & 0 \\ \cos\theta\,(\cos^2\psi - \sin^2\psi) & 2\sin\psi\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El segundo término de las ecuaciones de movimiento viene dado por:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(\dot{q}^T M^{sum}\dot{q} + \dot{\tilde{q}}^T k_2\dot{\tilde{q}} - 2\cos\theta\right) = \frac{1}{2}\left(D_1{}^T(q,\dot{q})\dot{q} + D_2{}^T(\tilde{q},\dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

La matriz $B(q)$ de restricciones fue definida en páginas anteriores y su expresión adimensional es:

$$B(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_0$$

Por tanto, sustituyendo los términos calculados resulta:

$$M_T{}^{sum}\ddot{q} + k_2\ddot{\tilde{q}} + D_1(q,\dot{q})\dot{q} + D_2(\tilde{q},\dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(D_1{}^T(q,\dot{q})\dot{q} + D_2{}^T(\tilde{q},\dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right) + B(q)\lambda$$

Obteniéndose un conjunto de cinco ecuaciones adimensionales.

Estas ecuaciones se pueden expresar en dos subgrupos sin más que considerar los elementos angulares $\tilde{q}$ por un lado y los cartesianos r_c por otro, de este modo resulta:

1) $M_T{}^{sum}\ddot{q} + N\,\ddot{r}_c + k_2\ddot{\tilde{q}} + N_\varphi\dot{r}_c\dot{\varphi} + \left(M_\theta{}^{sum}\dot{\tilde{q}} + N_\theta\dot{r}_c\right)\dot{\theta} + \begin{pmatrix} 0 & k_{2,\theta}\dot{\tilde{q}} & k_{2,\psi}\dot{\tilde{q}} \end{pmatrix}\dot{\tilde{q}} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \dot{r}_c{}^T N_\varphi{}^T\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T N_\varphi\dot{r}_c \\ \dot{\tilde{q}}^T M_\theta{}^{sum,T}\dot{\tilde{q}} + \dot{r}_c{}^T N_\theta{}^T\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T N_\theta\dot{r}_c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\tilde{q}}^T k_{2,\theta}{}^T\dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}}^T k_{2,\psi}{}^T\dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_1\cos\varphi - \lambda_2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

2) $N^T\ddot{\tilde{q}} + \ddot{r}_c + N_\varphi{}^T\dot{\tilde{q}}\dot{\varphi} + N_\theta{}^T\dot{\tilde{q}}\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

A continuación se incorporan las restricciones en velocidad en ambos subconjuntos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 1 \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{r}_c \end{pmatrix} = 0$$

Y se definen:

$$\dot{r}_c = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\dot{\psi}$$

$$\ddot{r}_c = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ddot{\psi} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi}$$

$$N\ddot{r}_c = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\psi} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi}$$

$$N_\varphi \dot{r}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\psi}$$

$$N_\theta \dot{r}_c = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\psi}$$

Si se sustituyen en las expresiones 1) y 2) se obtiene:

1) $$M^{sum}\ddot{\tilde{q}} + \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\psi} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi} + k_2\ddot{\tilde{q}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi} + M_\theta{}^{sum}\dot{\tilde{q}}\dot{\theta} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi} + \begin{pmatrix} 0 & k_{2,\theta}\dot{\tilde{q}} & k_{2,\psi}\dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\tilde{q}}^T M_\theta{}^{sum,T}\dot{\tilde{q}} + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\tilde{q}}^T \begin{pmatrix} 0 \\ k_{2,\theta}{}^T \\ k_{2,\psi}{}^T \end{pmatrix} \dot{\tilde{q}} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_1\cos\varphi - \lambda_2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

2) $$N^T\ddot{\tilde{q}} + \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ddot{\psi} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi} + N_\varphi{}^T\dot{\tilde{q}}\dot{\varphi} + N_\theta{}^T\dot{\tilde{q}}\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Solo resta eliminar los multiplicadores de Lagrange, λ. Esto se consigue operando a través de las ecuaciones obtenidas. Sumando a la tercera expresión del grupo de ecuaciones 1), el segundo grupo multiplicado por el vector $(\cos\varphi \quad \sin\varphi)$ y simplificando se llega a:

$$M^{sum}\ddot{\tilde{q}} + \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ddot{\psi} + k_2\ddot{\tilde{q}} + M_\theta{}^{sum}\dot{\tilde{q}}\dot{\theta} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}\dot{\psi} + D_2(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\tilde{q}}^T M_\theta{}^{sum,T}\dot{\tilde{q}} + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + D_2{}^T(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\ddot{\varphi}\sin\theta - 2\ddot{\psi} - 4\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix} \right]$$

8.- ECUACIONES LAGRANGIANAS DE MOVIMIENTO. FORMA NO MATRICIAL.

Se han obtenido tres ecuaciones de movimiento en notación matricial. A continuación se desarrollan dichas expresiones buscando obtener cada una de las aceleraciones aisladas en cada ecuación.

Por tanto:

$$M^{sum}\ddot{\vec{q}} + \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ddot{\psi} + k_2\ddot{\vec{q}} + M_\theta{}^{sum}\dot{\vec{q}}\dot{\theta} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\dot{\theta}\dot{\psi} + \begin{pmatrix} 0 & k_{2,\theta}\dot{\vec{q}} & k_{2,\psi}\dot{\vec{q}} \end{pmatrix}\dot{\vec{q}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{\vec{q}}^T M_\theta{}^{sum,T}\dot{\vec{q}} + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\vec{q}}^T\begin{pmatrix} 0 \\ k_{2,\theta}{}^T \\ k_{2,\psi}{}^T \end{pmatrix}\dot{\vec{q}} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\ddot{\varphi}\sin\theta - 2\ddot{\psi} - 4\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}\right]$$

A continuación se muestran las expresiones de los términos que intervienen en la expresión anterior:

$$M^{sum}\ddot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \alpha + (1+\alpha)\sin^2\theta & 0 & 2\alpha\sin\theta \\ 0 & 1+\alpha & 0 \\ 2\alpha\sin\theta & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha + (1+\alpha)\sin^2\theta)\ddot{\varphi} + 2\alpha\ddot{\psi}\sin\theta \\ (1+\alpha)\ddot{\theta} \\ 2\alpha\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\alpha\ddot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$k_2\ddot{\vec{q}} = \beta\begin{pmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta & \cos\psi\sin\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\psi\sin\psi\cos\theta & \sin^2\psi & 0 \\ \sin\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \beta\begin{pmatrix} (\sin^2\theta + \cos^2\psi\cos^2\theta)\ddot{\varphi} + (\cos\psi\sin\psi\cos\theta)\ddot{\theta} + \ddot{\psi}\sin\theta \\ (\cos\psi\sin\psi\cos\theta)\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\sin^2\psi \\ \ddot{\varphi}\sin\theta + \ddot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$M_{\theta}{}^{sum}\dot{\tilde{q}}\dot{\theta}=\begin{pmatrix}2(1+\alpha)\sin\theta\cos\theta & 0 & 2\alpha\cos\theta\\ 0 & 0 & 0\\ 2\alpha\cos\theta & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}\dot{\theta}=$$

$$=\begin{pmatrix}2(1+\alpha)\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta+2\alpha\dot{\psi}\cos\theta\\ 0\\ 2\alpha\dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix}\dot{\theta}$$

$$k_{2,\theta}\dot{\tilde{q}}=\beta\begin{pmatrix}2\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi & -\cos\psi\sin\psi\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\psi\sin\psi\sin\theta & 0 & 0\\ \cos\theta & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}=$$

$$=\beta\begin{pmatrix}2\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi-\dot{\theta}\cos\psi\sin\psi\sin\theta+\dot{\psi}\cos\theta\\ -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\psi\sin\theta\\ \dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$k_{2,\psi}\dot{\tilde{q}}=\beta\begin{pmatrix}-2\cos\psi\sin\psi\cos^2\theta & \cos\theta\,(\cos^2\psi-\sin^2\psi) & 0\\ \cos\theta\,(\cos^2\psi-\sin^2\psi) & 2\sin\psi\cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}=$$

$$=\beta\begin{pmatrix}-2\dot{\varphi}\cos\psi\sin\psi\cos^2\theta+\dot{\theta}\cos\theta\,(\cos^2\psi-\sin^2\psi)\\ \dot{\varphi}\cos\theta\,(\cos^2\psi-\sin^2\psi)+2\dot{\theta}\sin\psi\cos\psi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{q}}^T M_{\theta}{}^{sum,T}\dot{\tilde{q}}=\begin{pmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\theta} & \dot{\psi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2(1+\alpha)\sin\theta\cos\theta & 0 & 2\alpha\cos\theta\\ 0 & 0 & 0\\ 2\alpha\cos\theta & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\theta} & \dot{\psi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2(1+\alpha)\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta+2\alpha\dot{\psi}\cos\theta\\ 0\\ 2\alpha\dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix}=$$

$$=2(1+\alpha)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+2\alpha\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta+2\alpha\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta=$$

$$=2(1+\alpha)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+4\alpha\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta$$

Si se realiza la sustitución de estas expresiones, se obtienen las ecuaciones en forma matricial, pudiéndose expresar las ecuaciones de forma separada como se indica a continuación:

Ec.1)

$$\ddot{\varphi}\big(\alpha + (1+\alpha)\sin^2\theta + \beta(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2\psi)\big) +$$

$$+\ddot{\theta}\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta + \ddot{\psi}\sin\theta\,(2\alpha+\beta+1) + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\,(1+\alpha+\beta\sin^2\psi) +$$

$$+2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\,(\alpha+\beta cos^2\psi) - \dot{\theta}^2\beta\cos\psi\sin\psi\sin\theta - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\beta\cos\psi\sin\psi\cos^2\theta = 0$$

Ec.2)

$$\beta\ddot{\varphi}\cos\psi\sin\psi\cos\theta + \ddot{\theta}(1+\alpha+\beta\sin^2\psi) - \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta\,(1+2\beta\sin^2\psi+2\alpha) +$$

$$+2\beta\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,(\beta\sin^2\psi+1+\alpha) - \sin\theta = 0$$

Ec.3)

$$\ddot{\varphi}\sin\theta\,(2\alpha+\beta+1) + \ddot{\psi}(2\alpha+\beta+1) + \dot{\varphi}\dot{\theta}\alpha\cos\theta\,(\alpha+\beta\sin^2\psi+1) +$$

$$+\dot{\varphi}^2\beta\cos\psi\sin\psi\cos^2 - \dot{\theta}^2\beta\sin\psi\cos\psi = 0$$

Dado que en las tres ecuaciones aparecen acopladas las aceleraciones, se opera para conseguir tres ecuaciones en las que solo aparezca una aceleración en cada una de ellas.

Ec.4) = Ec.1) - Ec.3) sin $\boldsymbol{\theta}$

$$\ddot{\varphi}(\alpha+\beta\cos^2\psi)\cos^2\theta + \ddot{\theta}\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta + 2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\,(\alpha+\beta\cos^2\psi) -$$

$$-2\dot{\varphi}\dot{\psi}\beta\cos\psi\sin\psi\cos^2\theta - \dot{\varphi}^2\beta\cos\psi\sin\psi\sin\theta\cos^2\theta = 0$$

Ec.5) = Ec.2) $\boldsymbol{cos^2\theta\big(\alpha+\beta\cos^2\psi\big) - \beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta}$ Ec.4)

$$\ddot{\theta}\cos^2\theta(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi) - \dot{\varphi}\dot{\psi}\cos^3\theta(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\psi) -$$

$$-\dot{\varphi}^2\cos^3\theta[\sin\theta\,(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)]$$

Ec.6) = Se sustituye $\boldsymbol{\ddot{\theta}}$ en Ec.4) y Ec.5):

$$\ddot{\varphi}\cos\theta\,(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi) + 2\dot{\theta}\dot{\psi}(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi) -$$

$$-\dot{\varphi}\dot{\psi}\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta + \beta\sin\theta\cos\psi\sin\psi = 0$$

Ec.7)

$$\ddot{\psi}\cos\theta\,(2\alpha+\beta+1)(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi) +$$

$$+2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos^2\theta(1+\alpha+\beta\sin^2\psi)(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi) +$$

$$+\dot{\varphi}^2\beta cos^3\theta(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\cos\psi\sin\psi -$$

$$-\dot{\theta}^2\beta\cos\theta\sin\psi\cos\psi\,(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)-$$

$$-2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\,(2\alpha+\beta+1)(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)+$$

$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}\beta\cos\theta\sin\theta\cos\psi\sin\psi\,(2\alpha+\beta+1)-\beta\sin^2\theta\cos\psi\sin\psi\,(2\alpha+\beta+1)=0$$

De este modo se alcanzan las siguientes expresiones que representan las ecuaciones generales de movimiento del sistema mecánico aro-barra para la condición del punto de contacto de rodar sin deslizar:

A) $\ddot{\varphi}(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\cos\theta-\dot{\varphi}\dot{\psi}\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta+$

$$+2\dot{\theta}\dot{\psi}(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)+\beta\sin\theta\cos\psi\sin\psi=0$$

B) $\ddot{\theta}(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)-\dot{\varphi}\dot{\psi}(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\psi)\cos\theta-$

$$-\dot{\varphi}^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\sin\theta\cos\theta-(\alpha+\beta cos^2\psi)\sin\theta=0$$

C) $\ddot{\psi}(1+2\alpha+\beta)(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\cos\theta+$

$$+2\dot{\varphi}\dot{\theta}(1+\alpha+\beta\sin^2\psi)(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\cos^2\theta+$$

$$+\dot{\varphi}^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\beta\cos\psi\sin\psi\cos^3\theta-$$

$$-\dot{\theta}^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta-$$

$$-2\dot{\theta}\dot{\psi}(1+2\alpha+\beta)(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\sin\theta+$$

$$+\dot{\varphi}\dot{\psi}(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta\sin\theta-$$

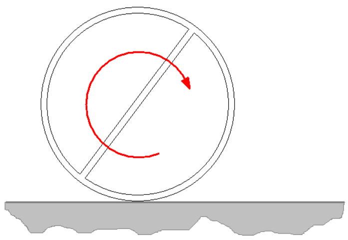
$$-(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\psi\sin\psi\sin^2\theta=0$$

Durante el proceso de obtención de las ecuaciones anteriores, se ha realizado una simplificación de las mismas consistente en la división entre el factor $cos^3\theta$. Esta operación se debe recordar cuando se analice los valores que convierten en identidades las ecuaciones obtenidas.

9.- ESTABILIDAD DE LAS ECUACIONES

Como paso previo a la linealización de las ecuaciones de movimiento y del estudio de la estabilidad de los equilibrios, se van a identificar y analizar tres movimientos del sistema aro-barra particularizando las ecuaciones obtenidas para los valores característicos de las variables que los definen.

RODADURA (ROD)



"Giro en torno a un eje perpendicular al plano del conjunto aro-barra sin presencia de inclinación (θ) alguna".

Este movimiento queda definido mediante los siguientes valores:

$\varphi_0 = cte$; $\theta_0 = 0$; $\psi_0 = \Omega t$

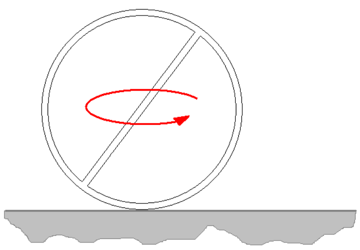
$\dot{\varphi}_0 = 0$; $\dot{\theta}_0 = 0$; $\dot{\psi}_0 = \Omega = cte$

$\ddot{\varphi}_0 = 0$; $\ddot{\theta}_0 = 0$; $\ddot{\psi}_0 = 0$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de movimiento obtenidas:

ROD.A) $0 = 0$
ROD.B) $0 = 0$
ROD.C) $0 = 0$

ROTACIÓN (ROT)



"Giro en torno a un eje perpendicular a la superficie sobre la que se apoya el sistema aro-barra y que a su vez es coplanario con el".

Este movimiento queda definido mediante los siguientes valores:

$\varphi_0 = \omega t$; $\theta_0 = 0$; $\psi_0 = cte$

$\dot{\varphi}_0 = \omega = cte$; $\dot{\theta}_0 = 0$; $\dot{\psi}_0 = 0$

$\ddot{\varphi}_0 = 0$; $\ddot{\theta}_0 = 0$; $\ddot{\psi}_0 = 0$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de movimiento obtenidas:

ROT.A) $0 = 0$

ROT.B) $0 = 0$

ROT.C) $\dot{\varphi}^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\beta\cos\psi\sin\psi\cos^3\theta = 0$

$\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi_0)\beta\cos\psi_0\sin\psi_0 = 0$

Por tanto, para que la ecuación ROT.C) se cumpla, debe ocurrir:

$$(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi_0) > 0$$

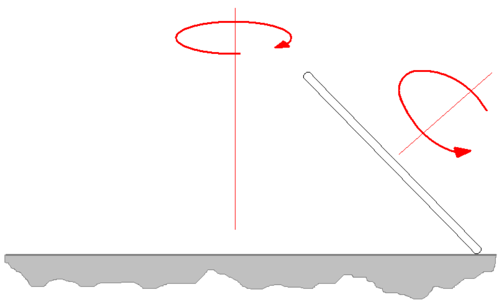
Y esto ocurre si:

ROT.C.1) $\cos\psi_0 = 0 \rightarrow \psi_0 = n\pi$; $n = 0,1,\ldots$ Giro con barra en posición horizontal.

ROT.C.2) $\sin\psi_0 = 0 \rightarrow \psi_0 = n\pi/2$; $n = 0,1,\ldots$ Giro con barra en posición vertical.

ROT.C.3) $\omega = 0$. Solución estática. El sistema no rota. Equilibrio inestable.

MIXTO



"El sistema se encuentra inclinado respecto a la superficie de contacto, girando respecto a dos ejes, uno perpendicular al plano que define el sistema aro-barra y el otro perpendicular a la superficie de contacto".

Este movimiento queda definido mediante los siguientes valores:

$\varphi_0 = \omega t$; $\theta_0 = cte$; $\psi_0 = \Omega t$

$\dot{\varphi}_0 = \omega = cte$; $\dot{\theta}_0 = 0$; $\dot{\psi}_0 = \Omega = cte$

$\ddot{\varphi}_0 = 0$; $\ddot{\theta}_0 = 0$; $\ddot{\psi}_0 = 0$

En primer lugar se analiza las ecuaciones de movimiento en función de los valores que puede tomar el ángulo θ_0:

Si $\theta_0 = {}^{\pi}/_{2}$:

Esta condición implica que el sistema aro-barra ha caído. Se debe recordar que las ecuaciones han sido divididas por el factor $\cos\theta$ por lo que en todas ellas se produciría la identidad. Al haberse realizado esta operación y eliminado estos términos, se descarta la posibilidad de caída del sistema mecánico.

Si $\theta_0 = 0$:

MIX.A) $-\beta\dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0\cos\psi_0\sin\psi_0\cos^2\theta_0 + \beta\cos\psi_0\sin\psi_0\cos\theta_0\sin\theta_0 = 0$

$\cos\psi_0\sin\psi_0\cos\theta_0\left(\sin\theta_0 - \dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0\cos\theta_0\right) = 0$

$-\dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0\cos\psi_0\sin\psi_0 = 0$

- MIX.A.1) $\cos\psi_0 = 0 \rightarrow \cos\Omega t = 0$ Condición que no se cumple permanentemente aun siendo $\Omega = 0$.
- MIX.A.2) $\sin\psi_0 = 0 \rightarrow \sin\Omega t = 0$ Condición que requiere que $\Omega = 0$.
- MIX.A.3) $\dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0 = 0$ o lo que es lo mismo, $\omega\Omega = 0$, lo que lleva a las siguientes posibilidades:
  - MIX.A.3.1) $\omega = 0, \Omega \neq 0$, el conjunto rueda.
  - MIX.A.3.2) $\Omega = 0, \omega \neq 0$, el conjunto rota.

MIX.B) $(\alpha(1+2\alpha+2\beta) + \beta\cos^2\psi_0)\dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0\cos\theta_0 = 0$

donde $(\alpha(1+2\alpha+2\beta) + \beta\cos^2\psi_0) \neq 0$ por lo que resulta:

- MIX.B.1) $\dot{\varphi}_0 = \omega = 0$ el conjunto rueda.
- MIX.B.2) $\dot{\psi}_0 = \omega = 0$ el conjunto rota.

MIX.C) $0 = 0$

Si $\theta_0 \neq 0$; $\theta_0 \neq {}^{\pi}/_{2}$:

MIX.A) $-\beta\dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0\cos\psi_0\sin\psi_0\cos\theta_0 + \beta\sin\theta_0\cos\psi_0\sin\psi_0 = 0$

$\cos\psi_0\sin\psi_0\left(\sin\theta_0 - \dot{\varphi}_0\dot{\psi}_0\cos\theta_0\right) = 0$

$\cos\Omega t\sin\Omega t\,(\sin\theta_0 - \omega\Omega\cos\theta_0) = 0$

- MIX.A.1) $\cos\Omega t\sin\Omega t = 0 \rightarrow \Omega = 0$, el conjunto rota.
- MIX.A.2) $\sin\theta_0 - \omega\Omega\cos\theta_0 = 0 \rightarrow \omega\Omega = \tan\theta_0$

MIX.B) $-\omega\Omega(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\psi)\cos\theta-$
$-\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\sin\theta\cos\theta-$
$-(\alpha+\beta\cos^2\psi)\sin\theta=0$

Siendo $(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\psi)>0$, por tanto:

MIX.B.1) $\omega=0\;\;y\;\;\alpha+\beta\cos^2\psi_0=0$, lo que implica: $\cos^2\psi_0=-{}^{\alpha}/_{\beta}<0$. No es posible.

Si se continúa el desarrollo de la ecuación:

$$-\omega\Omega(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\cos\theta_0-$$
$$-\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\sin\theta_0\cos\theta_0-$$
$$-(\alpha+\beta\cos^2\Omega t)\sin\theta_0=0$$

$$-\omega\Omega(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\Omega t)-\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\sin\theta_0-$$
$$-(\alpha+\beta\cos^2\Omega t)\tan\theta_0=0$$

Expresión a la que se le puede aplicar la condición resultante en MIX.A.2):

$$\tan\theta_0\,(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2\Omega t+\alpha+\beta\cos^2\Omega t)+$$
$$+\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\sin\theta_0=0$$

$$2\tan\theta_0\,(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)+(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\omega^2\sin\theta_0=0$$

$$\tan\theta_0=-\frac{\omega^2\sin\theta_0}{2}$$

MIX.C) $\dot\varphi^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\psi)\beta\cos\psi\sin\psi\cos^3\theta+$
$+\dot\varphi\dot\psi(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\psi\sin\psi\cos\theta\sin\theta-$
$-(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\psi\sin\psi\sin^2\theta=0$

$$\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\beta\cos\Omega t\sin\Omega t\cos^3\theta_0+$$
$$+(1+2\alpha+\beta)\beta\omega\Omega\cos\Omega t\sin\Omega t\cos\theta\sin\theta-$$
$$-(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\Omega t\sin\Omega t\sin^2\theta=0$$

Si se aplica a la expresión la condición obtenida en MIX.A.2):

$$\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\beta\cos\Omega t\sin\Omega t\cos^3\theta_0+$$
$$+(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\Omega t\sin\Omega t\sin^2\theta-(1+2\alpha+\beta)\beta\cos\Omega t\sin\Omega t\sin^2\theta=0$$

$$\omega^2(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\beta\cos\Omega t\sin\Omega t\cos^3\theta_0=0$$

De donde se extraen las siguientes condiciones, siendo $(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2\Omega t)\beta>0$:

→ MIX.C.1) $\omega = 0$ → Gira sin inclinación ya que es necesario obligatoriamente que $\theta_0 = 0$ para cumplir la condición utilizada procedente de MIX.A.2).

→ MIX.C.2) $\cos \Omega t \sin \Omega t = 0$ → $\Omega = 0$, el sistema rueda sin inclinación ya que es necesario obligatoriamente que: $\theta_0 = 0$ para cumplir la condición utilizada procedente de MIX.A.2).

Se concluye por tanto, que el movimiento mixto definido no es posible para las condiciones definidas para el mismo. Las ecuaciones que lo describen evolucionan a los otros movimientos descritos, llegándose a contradicciones.

Una vez ha quedado demostrado que el desarrollo del denominado movimiento mixto no es posible bajo las condiciones fijadas, se hace necesario el análisis del sistema mecánico aro sin barra, $\beta = 0$, para corroborar la existencia de dicho movimiento en un caso más simple en el que se elimina todos los términos afectados por el parámetro β.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico aro sin barra son:

0.A) $\ddot{\varphi}\, \alpha(1+\alpha)\cos\theta + 2\dot{\theta}\dot{\psi}\alpha(1+\alpha) = 0$

0.B) $\ddot{\theta}\alpha(1+\alpha) - \dot{\varphi}\dot{\psi}\alpha(1+2\alpha)\cos\theta - \dot{\varphi}^2\alpha(1+\alpha)\sin\theta\cos\theta - \alpha\sin\theta = 0$

0.C) $\ddot{\psi}(1+2\alpha)\alpha(1+\alpha)\cos\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}(1+\alpha)\alpha(1+\alpha)\cos^2\theta -$

$-2\dot{\theta}\dot{\psi}(1+2\alpha)\alpha(1+\alpha)\sin\theta = 0$

Se recuerda que las condiciones del movimiento mixto son:

$\varphi_0 = \omega t \quad ; \quad \theta_0 = cte \quad ; \quad \psi_0 = \Omega t$

$\dot{\varphi}_0 = \omega = cte \; ; \quad \dot{\theta}_0 = 0 \quad ; \quad \dot{\psi}_0 = \Omega = cte$

$\ddot{\varphi}_0 = 0 \quad ; \quad \ddot{\theta}_0 = 0 \quad ; \quad \ddot{\psi}_0 = 0$

Por tanto, las ecuaciones quedan:

0.A) $0 = 0$

0.B) $-\omega\Omega\alpha(1+2\alpha)\cos\theta - \omega^2\alpha(1+\alpha)\sin\theta\cos\theta - \alpha\sin\theta = 0$

Si de la ecuación 0.B) se despeja Ω, se llega a:

$$\Omega = \left(\frac{1+\alpha}{1+2\alpha}\right)(\omega^2 - \alpha)\sin\theta_0$$

0.C) $0 = 0$

De donde se extrae, ver 0.B), una condición para que el movimiento mixto sea posible. Por tanto, en el sistema mecánico aro sin barra es posible el movimiento mixto pudiéndose concluir que la introducción de la barra diametral incluye términos en las ecuaciones de movimiento que para el caso en estudio lo imposibilitan. Quedará en este sentido abierta una línea de investigación dirigida a la determinación de la existencia de relajaciones en las condiciones de contorno que posibiliten el desarrollo del movimiento mixto.

10.- LINEALIZACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA EL MOVIMIENTO DE RODADURA

Se ha comprobado que de los tres movimientos propuestos solo los dos primeros son soportados por las ecuaciones obtenidas y aportan soluciones de equilibrio.

A continuación se realiza la linealización de las condiciones de movimiento obtenidas con el fin de estudiar el movimiento de rodadura afectado por perturbaciones durante su desarrollo. De ahora en adelante se adoptará la nomenclatura A, B y C para las ecuaciones de movimiento aunque en adelante estas se refieran al caso particular de la rodadura.

Las sustituciones que se realizarán son las siguientes:

$\tilde{\psi} = \psi - \Omega t \quad ; \quad \dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi} - \Omega \quad ; \quad \ddot{\tilde{\psi}} = \ddot{\psi}$

Por tanto:

A) $\ddot{\varphi}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega t)\right)-\dot{\varphi}\beta\,\Omega\cos(\tilde{\psi}+\Omega)\sin(\tilde{\psi}+\Omega)+2\dot{\theta}\Omega\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega t)\right)+\beta\theta\cos(\tilde{\psi}+\Omega t)\sin(\tilde{\psi}+\Omega t)=0$

B) $\ddot{\theta}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega)\right)-\dot{\varphi}\left(\dot{\tilde{\psi}}+\Omega\right)\left(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega)\right)-$
$-\left(\alpha+\beta\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega)\right)\theta=0$

C) $\ddot{\tilde{\psi}}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega)\right)=0$

Donde se han eliminado los términos de segundo orden o superior y se ha sustituido $\sin\theta \sim \theta$ y $\cos\theta \sim 1$ ya que se consideran pequeños valores de θ (ángulo de caída).

Estas expresiones toman una forma aún más simplificada si se considera el sistema aro sin barra:

A) (Sin barra) $\ddot{\varphi}\alpha(1+\alpha)+2\dot{\theta}\Omega\alpha(1+\alpha)=0$
$\ddot{\varphi}+2\dot{\theta}\Omega=0$

B) (Sin barra) $\ddot{\theta}\alpha(1+\alpha)-\dot{\varphi}\Omega\alpha(1+2\alpha)-\alpha\theta=0$ donde se ha eliminado el término $\dot{\varphi}\dot{\tilde{\psi}}$ al tratarse de un término de segundo orden.

C) (Sin barra) $\ddot{\tilde{\psi}}\alpha(1+\alpha)=0$
$\ddot{\tilde{\psi}}=0$

Acto seguido, para simplificar las expresiones se realizan una las sustituciones que a continuación se detallan:

$$\cos^2(\tilde{\psi}+\Omega t)=\frac{1+\cos\left(2(\tilde{\psi}+\Omega t)\right)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2\tilde{\psi}\cos 2\Omega t-\sin 2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right]$$

$$\sin^2(\tilde{\psi}+\Omega t)=\frac{1-\cos\left(2(\tilde{\psi}+\Omega t)\right)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2\tilde{\psi}\cos 2\Omega t-\sin 2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right]$$

$$\cos(\tilde{\psi}+\Omega t)\sin(\tilde{\psi}+\Omega t)=\left(\cos\tilde{\psi}\cos\Omega t-\sin\tilde{\psi}\sin\Omega t\right)\left(\sin\tilde{\psi}\cos\Omega t+\cos\tilde{\psi}\sin\Omega t\right)=$$

Considerando pequeñas perturbaciones: $\cos\tilde{\psi}=1$; $\sin\tilde{\psi}=\tilde{\psi}$, por lo que resulta:

$$=\left(\cos\Omega t-\tilde{\psi}\sin\Omega t\right)\left(\tilde{\psi}\cos\Omega t+\sin\Omega t\right)=$$

$$=\tilde{\psi}\cos^2\Omega t+\sin\Omega t\cos\Omega t-\tilde{\psi}^2\sin\Omega t\cos\Omega t-\tilde{\psi}\sin^2\Omega t=$$

$$=\tilde{\psi}(\cos^2\Omega t-\sin^2\Omega t)+\sin\Omega t\cos\Omega t$$

Las ecuaciones de movimiento quedan afectadas como se muestra a continación:

A) $$\ddot{\varphi}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right)\right)-$$
$$-\dot{\varphi}\beta\Omega\left(\tilde{\psi}(\cos^2\Omega t-\sin^2\Omega t)+\sin\Omega t\cos\Omega t\right)+$$
$$+2\dot{\theta}\Omega\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right)\right)+$$
$$+\beta\theta\left(\tilde{\psi}(\cos^2\Omega t-\sin^2\Omega t)+\sin\Omega t\cos\Omega t\right)=0$$

Los términos "$2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t$" y "$\tilde{\psi}(\cos^2\Omega t-\sin^2\Omega t)$" aportan términos no lineales al realizarse los productos por $\ddot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\varphi}$.

$$\ddot{\varphi}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right)-\dot{\varphi}\beta\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t+$$
$$+2\dot{\theta}\Omega\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right)+\beta\theta\sin\Omega t\cos\Omega t=0$$

B) $$\ddot{\theta}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right)\right)-$$
$$-\dot{\varphi}\Omega\left(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t\right)\right)-$$

$$-\left(\alpha+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t)\right)\theta=0$$

El término “$2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t$” aporta términos no lineales al realizarse los productos por $\ddot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ y θ.

$$\ddot{\theta}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right)-\dot{\varphi}\Omega\left(\alpha(1+2\alpha+2\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right)-$$
$$-\left(\alpha+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right)\theta=0$$

C) $\ddot{\tilde{\psi}}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t-2\tilde{\psi}\sin 2\Omega t)\right)=0$

$$\ddot{\tilde{\psi}}\left(\alpha(1+\alpha+\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right)=0$$

El siguiente paso será eliminar de las ecuaciones el parámetro α, para lo cual se utilizan sus definiciones:

$$\alpha=\frac{m_a/2}{m_a+m_b}$$

$$\beta=\frac{m_b/3}{m_a+m_b}$$

Pudiéndose extraer de ellas la relación:

$$2\alpha+3\beta=1$$

Despejando α se obtiene:

$$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\beta=\frac{1}{2}(1-3\beta)$$

Si se sustituye α en las ecuaciones, se puede realizar un estudio en función solo del parámetro β:

A) $\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\ddot{\varphi}-$

$$-\beta\Omega\dot{\varphi}\sin\Omega t\cos\Omega t+2\Omega\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\dot{\theta}+$$
$$+\beta\theta\sin\Omega t\cos\Omega t=0$$

B) $\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\ddot{\theta}-$

$$-\left[\frac{1}{2}(1-3\beta)(2-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\Omega\dot{\varphi}-$$
$$-\left[\frac{1}{2}(1-3\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\theta=0$$

C) $\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\ddot{\tilde{\psi}}=0$

Por último, dado que en las ecuaciones aparecen los argumentos Ωt y $2\Omega t$, se expresan todas ellas con el mismo mediante la aplicación de:

$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

De este modo se obtiene las ecuaciones con las que se realizará el estudio de la estabilidad giroscópica del conjunto aro-barra cuando este gira en posición vertical alrededor del eje horizontal que pasa por su centro de gravedad y centro de masas (rodadura) con la condición en el punto de contacto con la superficie de rodar sin deslizar:

A) $\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\ddot{\varphi}-\beta\Omega\dot{\varphi}\frac{1}{2}\sin(2\Omega t)+$

$$+2\Omega\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\dot{\theta}+\beta\theta\frac{1}{2}\sin(2\Omega t)=0$$

B) $\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\ddot{\theta}-\left[\frac{1}{2}(1-3\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\theta-$

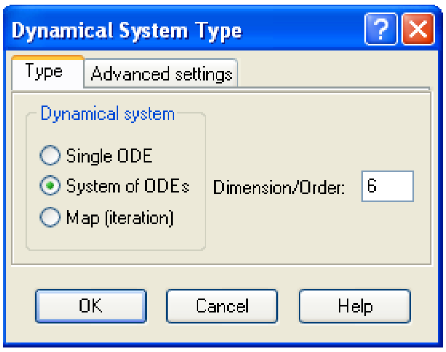
$$-\left[\frac{1}{2}(1-3\beta)(2-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\Omega\dot{\varphi}=0$$

C) $\left[\frac{1}{4}(1-3\beta)(3-\beta)+\beta\frac{1}{2}(1+\cos 2\Omega t)\right]\ddot{\tilde{\psi}}=0$

11.- ESTUDIO DE ESTABILIDAD GIROSCÓPICA

Para el estudio de la estabilidad del conjunto se hace uso del programa Dinamics solver. Este programa freeware desarrollado por Juan M. Aguirregaribia permite resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales obtenidas para la posterior representación gráfica mediante el programa Microsoft Excel.

Por tanto, se introducen en el programa el sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden obtenido mediante su conversión a un sistema de seis ecuaciones de primer orden:

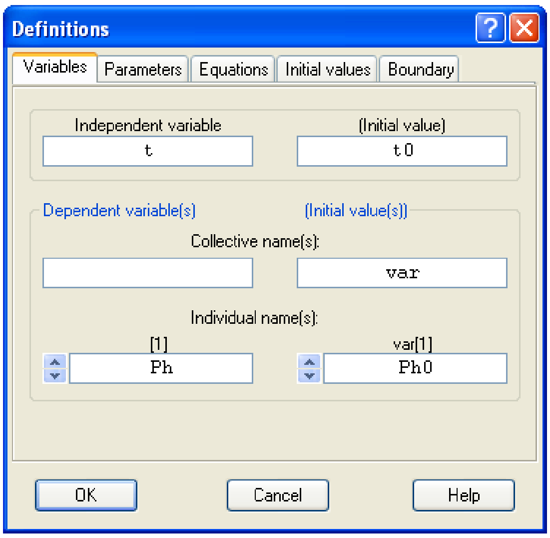


Se definen las variables de las ecuaciones como se muestran a continuación:

Ph → ϕ Phi → $\dot{\phi}$ $\frac{d}{dx}$(Phi) → $\ddot{\phi}$

Th → θ Thi → $\dot{\theta}$ $\frac{d}{dx}$(Thi) → $\ddot{\theta}$

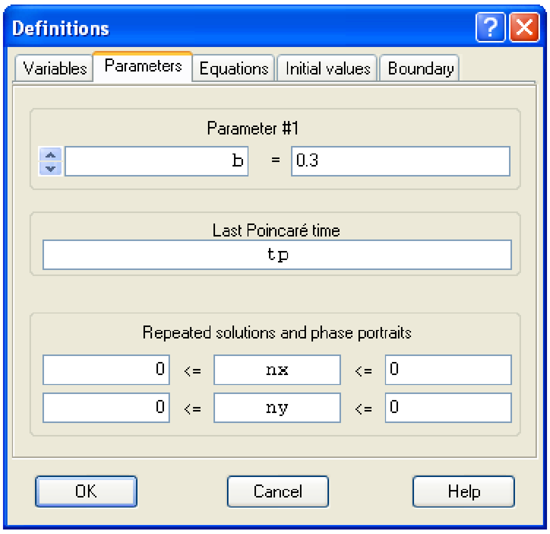
Ps → ψ Psi → $\dot{\psi}$ $\frac{d}{dx}$(Psi) → $\ddot{\psi}$



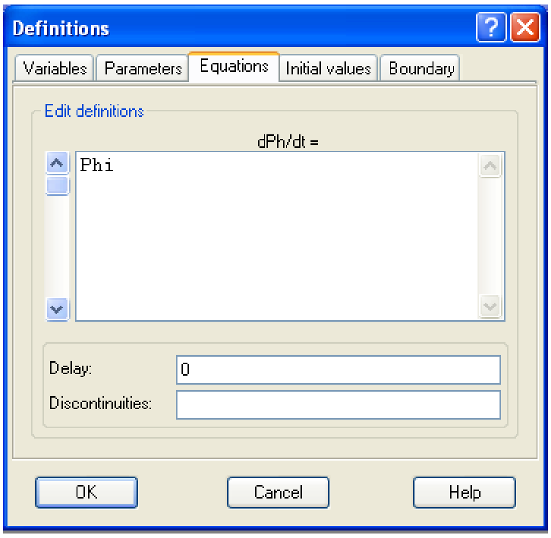
A continuación se definen los parámetros β, Ω:

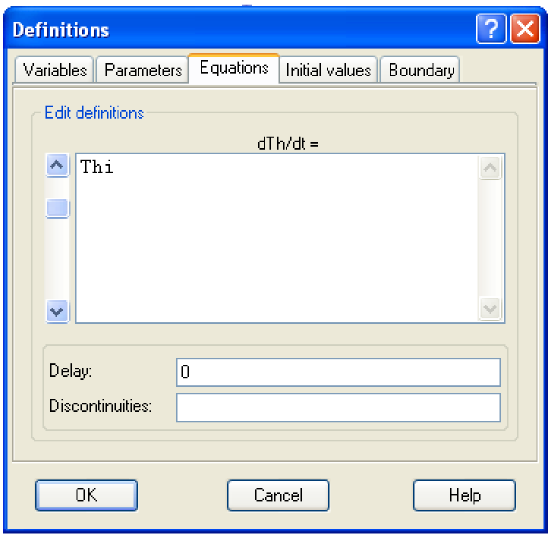
b → β

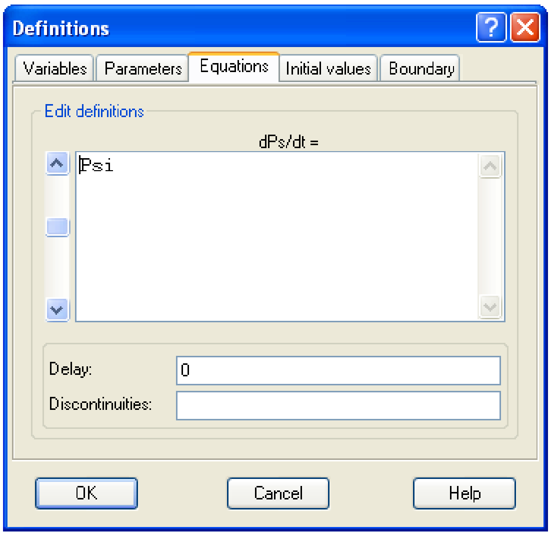
omega → Ω

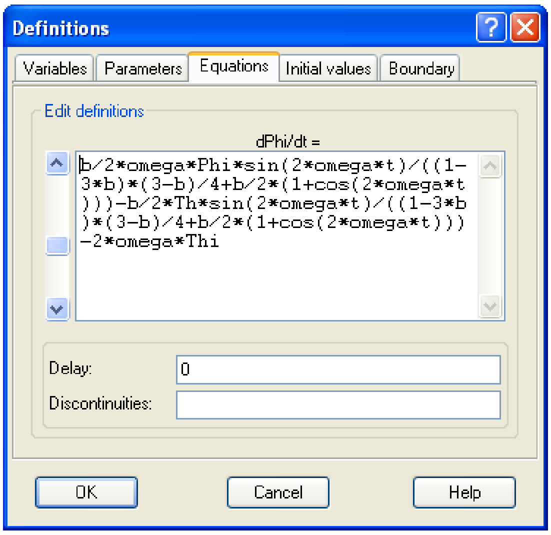


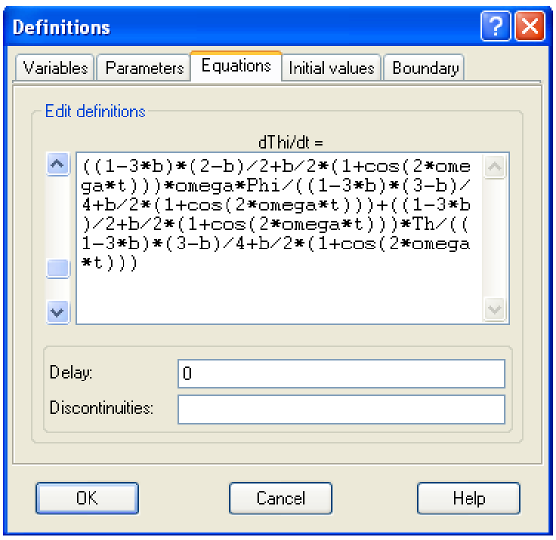
Se introducen las seis ecuaciones en las que se convierte el sistema de ecuaciones:

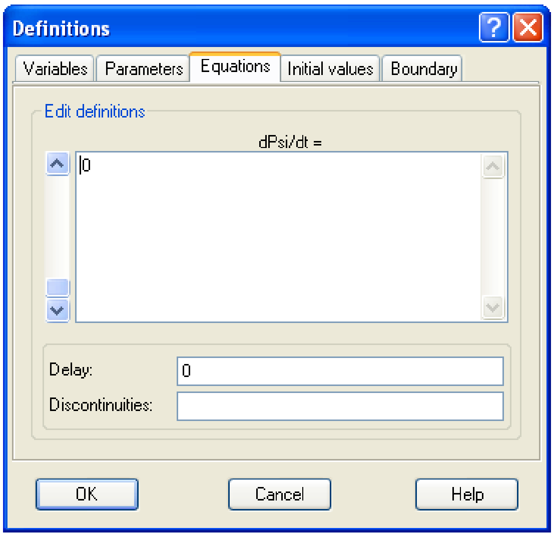




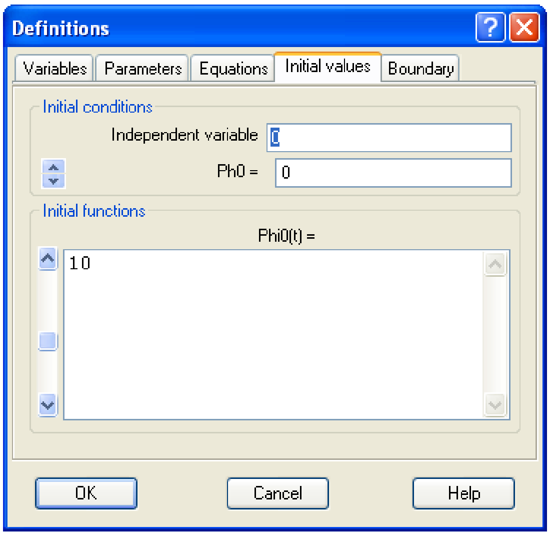

Definitions
Variables
Parameters
Equations
Initial values
Boundary
Edit definitions
dPs/dt =
Psi
Delay:
0
Discontinuities:
OK
Cancel
Help

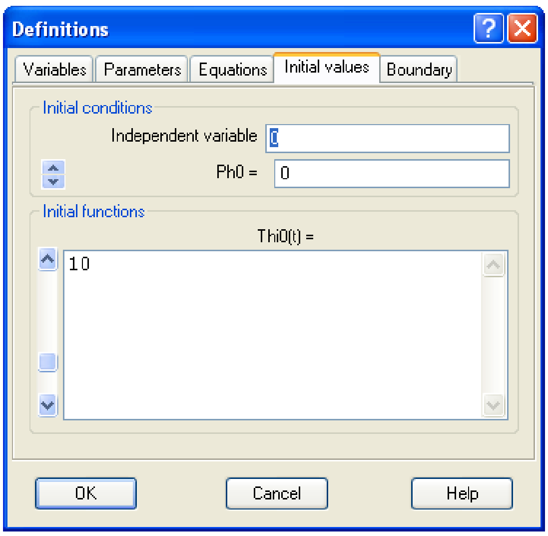

Definitions
Variables
Parameters
Equations
Initial values
Boundary
Edit definitions
dPhi/dt =
b/2*omega*Phi*sin(2*omega*t)/((1-3*b)*(3-b)/4+b/2*(1+cos(2*omega*t)))-b/2*Th*sin(2*omega*t)/((1-3*b)*(3-b)/4+b/2*(1+cos(2*omega*t)))-2*omega*Thi
Delay:
0
Discontinuities:
OK
Cancel
Help


Definitions
Variables
Parameters
Equations
Initial values
Boundary
Edit definitions
dThi/dt =
((1-3*b)*(2-b)/2+b/2*(1+cos(2*omega*t)))*omega*Phi/((1-3*b)*(3-b)/4+b/2*(1+cos(2*omega*t)))+((1-3*b)/2+b/2*(1+cos(2*omega*t)))*Th/((1-3*b)*(3-b)/4+b/2*(1+cos(2*omega*t)))
Delay:
0
Discontinuities:
OK
Cancel
Help



Las condiciones iniciales para todos los casos que se van a estudiar son:





Como ya se ha mencionado, el programa Dynamics Solver permite resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales y obtener representaciones de cualquiera de las variables involucradas. Asimismo es capaz de realizar un seguimiento discreto de la evolución de las variables que se desee mostrar mediante cualquier paso que se defina. En este estudio se decide realizar un muestreo de la evolución de las variables $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ en el tiempo para su representación, o lo que es lo mismo, un muestreo de la evolución de estas en pasos de igual valor al periodo de las funciones trigonométricas, $2\Omega t$, para distintos valores de los parámetros β, Ω. De este modo se puede obtener un fichero de datos en el que se recogen los valores de las variables seleccionadas para su representación gráfica y mejor identificación de su tendencia.

A continuación se muestra la tabla resumen en la que se recoge la evolución de la tendencia de las variables $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ para los valores de los parámetros β y Ω considerados en este estudio.

Punto	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\Omega}$	Evolución
1	**0**	0.5	**Estable**
2	**0**	0.6	**Estable**
3	**0.05**	0.4	Inestable
4	**0.05**	0.5	Inestable
5	0.05	**0.6**	**Estable**
6	**0.1**	0.4	Inestable
7	**0.1**	0.7	Inestable
8	0.1	**0.8**	**Estable**
9	0.1	**0.9**	**Estable**
10	**0.15**	0.7	Inestable
11	**0.15**	0.8	Inestable
12	0.15	**0.9**	**Estable**
13	0.15	**1**	**Estable**
14	**0.25**	1.1	Inestable
15	0.25	**1.2**	**Estable**
16	**0.3**	1.2	Inestable
17	**0.3**	1.5	Inestable
18	0.3	**1.7**	**Estable**
19	**0.33**	3	Inestable
20	0.33	**4.5**	**Estable**
21	**0.3333**	4.4	Inestable
22	0.3333	**50**	**Estable**

El punto 1 se obtiene de hacer nulo el parámetro β, o lo que es lo mismo, a partir del caso del aro sin barra diametral. Si se realiza esta simplificación de l sistema mecánico se obtiene:

A) $\frac{3}{4}\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\Omega\dot{\theta} = 0$

B) $\frac{3}{4}\ddot{\theta} - \Omega\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\theta = 0$

C) $\frac{1}{4}\ddot{\psi} = 0$

De estas, la última carece de interés en este desarrollo.

Para la obtención del valor de Ω para β nulo, se prueba con las siguientes soluciones:

$\varphi = e^{\lambda t} u$

$\theta = e^{\lambda t} v$

Resultando:

$$\frac{3}{4}\lambda^2 u + \frac{3}{2}\Omega\lambda v = 0$$

$$\frac{3}{4}\lambda^2 v - \Omega\lambda u - \frac{1}{2}v = 0$$

Que se puede representar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4}\lambda^2 & \frac{3}{2}\Omega\lambda \\ -\Omega\lambda & \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \binom{u}{v} = \binom{0}{0}$$

Sistema de ecuaciones que tendrá solución si el determinante de la matriz es nula:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}\lambda^2 & \frac{3}{2}\Omega\lambda \\ -\Omega\lambda & \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{16}\lambda^4 - \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{3}{2}\Omega^2\lambda^2 = \lambda^2\left[\frac{9}{16}\lambda^2 + \frac{3}{2}\Omega^2 - \frac{3}{8}\right] = 0$$

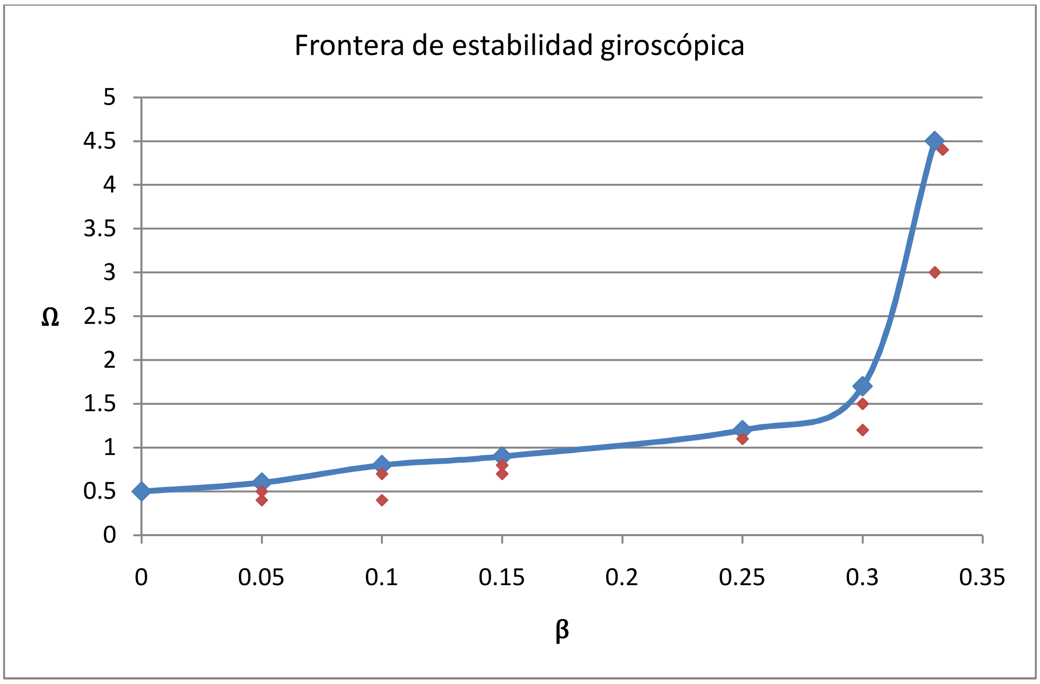
De donde se extrae la solución del sistema de ecuaciones diferenciales para el caso de aro sin barra rodando sin deslizar:

$\lambda = 0$

$$\frac{9}{16}\lambda^2 + \frac{3}{2}\Omega^2 - \frac{3}{8} = 0$$

La segunda expresión representa una elipse en el plano Ω - λ . Esta curva corta al eje Ω en los valores $\Omega = 0.5$.

Estos puntos permiten representar la frontera de la estabilidad giroscópica del sistema mecánico aro-barra ante el movimiento de rodar sin deslizar bajo la acción de pequeñas perturbaciones que afectan al equilibrio de los ángulos de guiñada, ϕ, y caída, θ, en función de los parámetros β, Ω.


Frontera de estabilidad giroscópica
5
4.5
4
3.5
3
Ω
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
β

12.- CONCLUSIONES

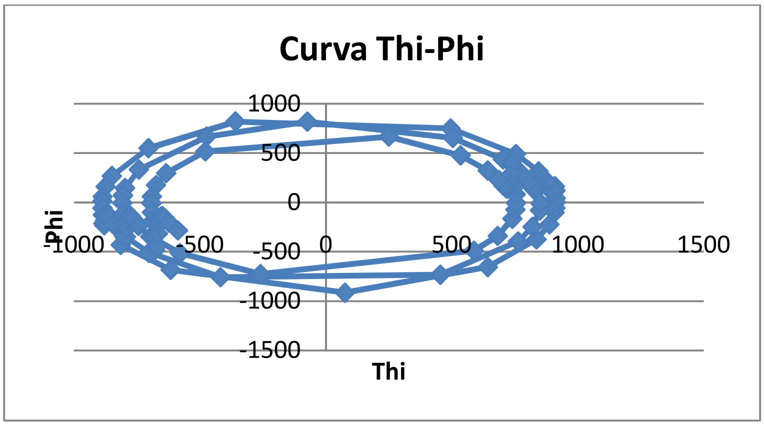
La curva obtenida evoluciona de forma ascendente, aumentando el valor de la velocidad de giro del sistema aro-barra desde el valor Ω=0.5, caso del aro sin barra, conforme aumenta el valor del parámetro β, es decir, a medida que la masa de la barra diametral tiene mayor importancia en la masa total del conjunto, se requiere de una mayor velocidad de giro para estabilizar al sistema ante una misma perturbación.

El valor del parámetro β puede aumentar hasta $\frac{1}{3}$ según se extrae de la expresión que la define y cuyo sentido físico corresponde al caso en el que el aro carezca de masa respecto a la barra diametral por lo que era de esperar una tendencia asintótica en torno a dicho valor como finalmente ha quedado reflejada.

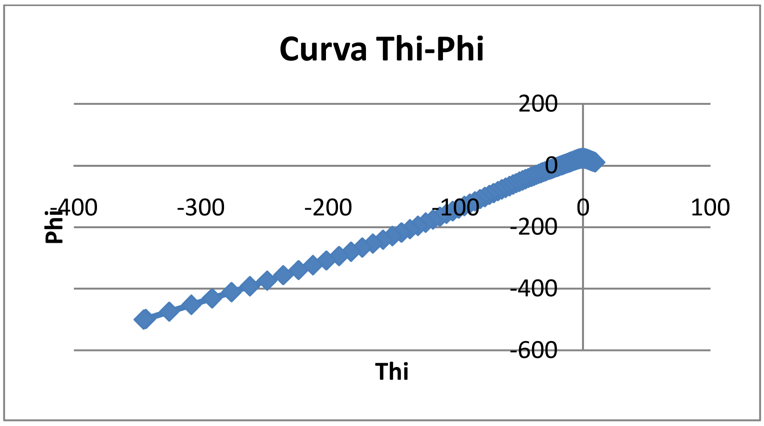
Por último y para justificar adecuadamente la tabla resumen expuesta con anterioridad, se muestran todas y cada una de las gráficas derivadas de los archivos de datos exportados por el programa para cada caso estudiado.

El primer punto se deducía de la simplificación de las ecuaciones, haciendo β=0.

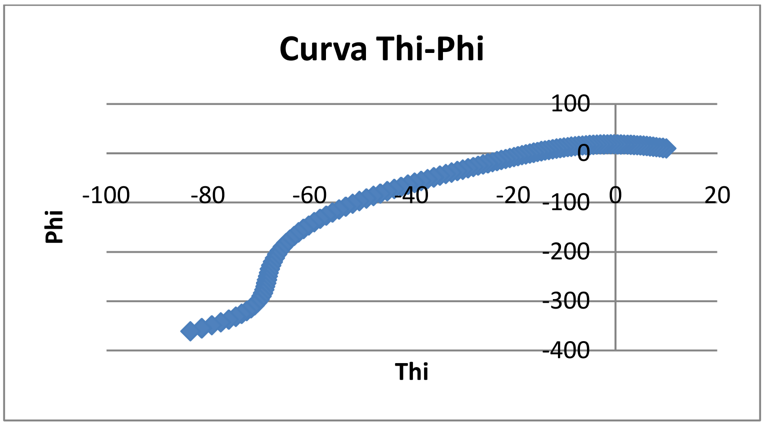
- Punto 2:



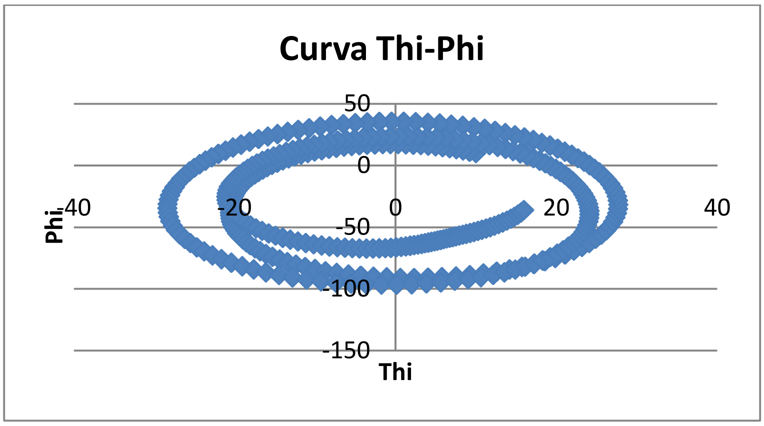
- Punto 3:



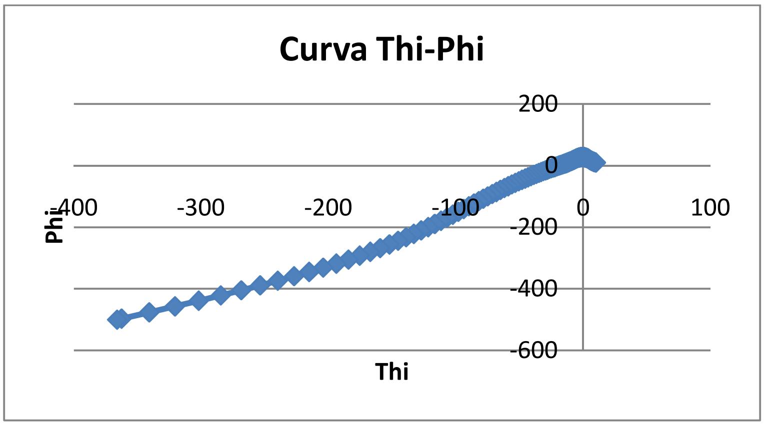
- Punto 4:



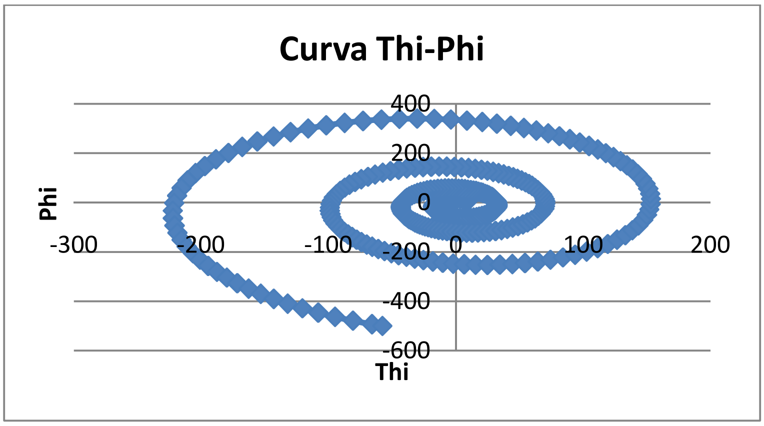
- Punto 5:



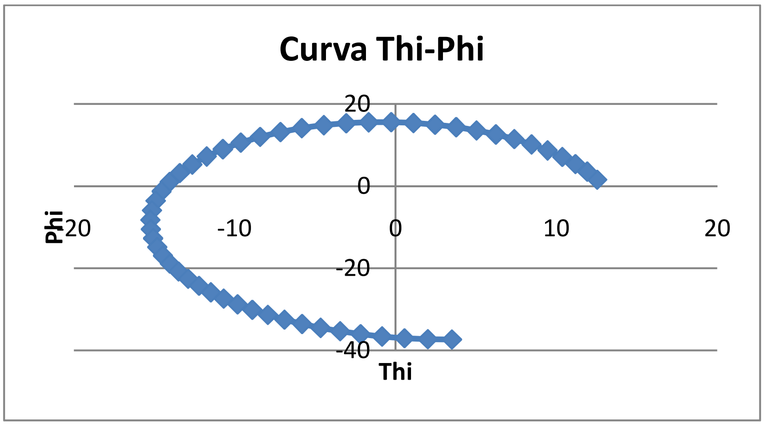
- Punto 6:



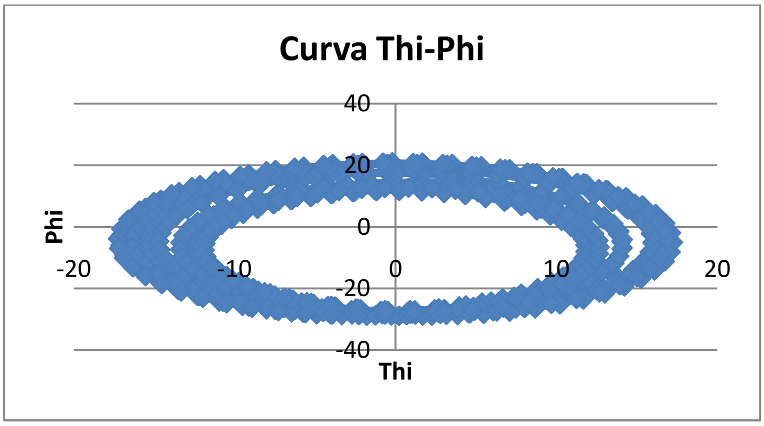
- Punto 7:



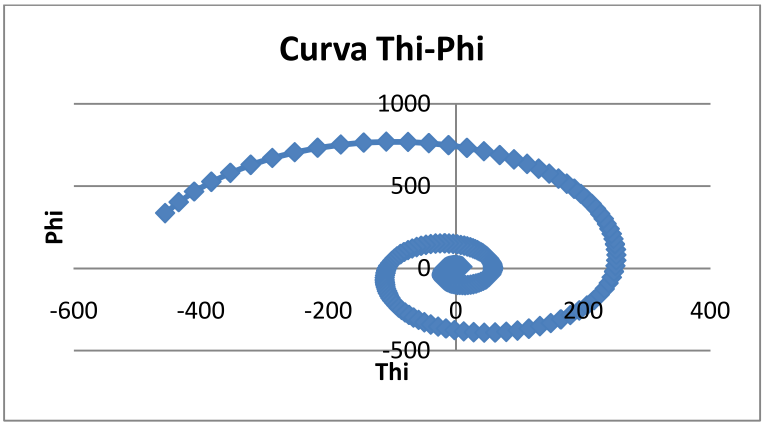
- Punto 8:



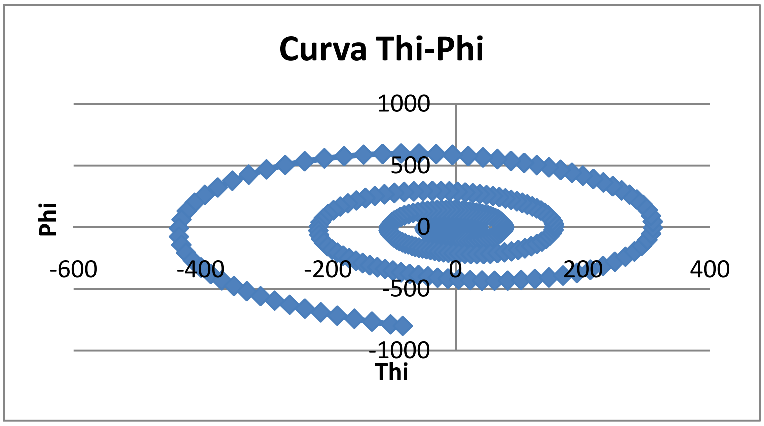
- Punto 9:



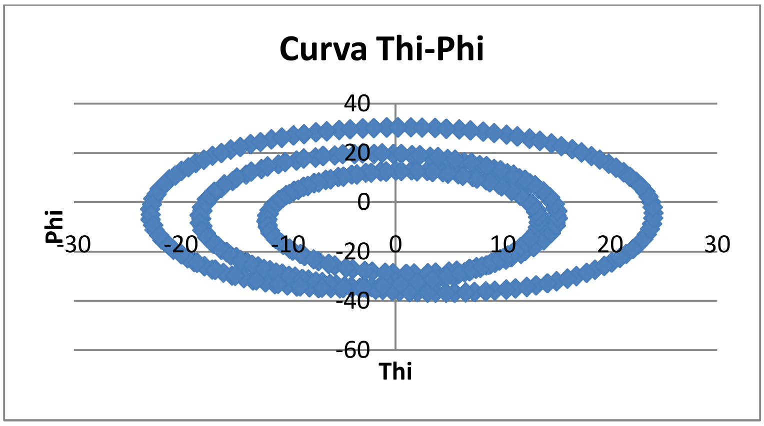
- Punto 10:



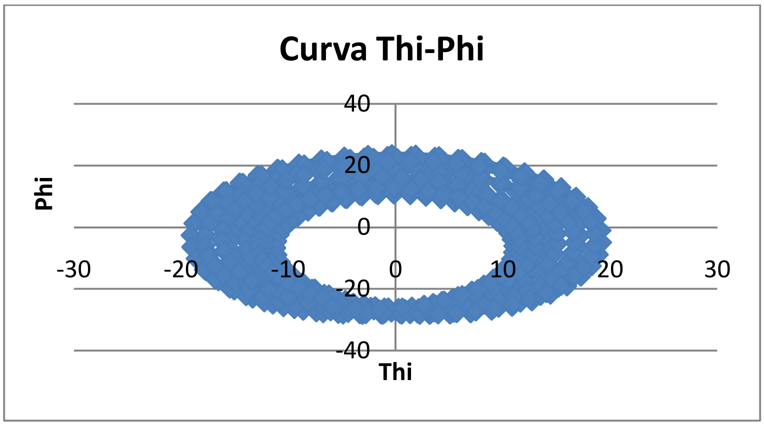
- Punto 11:



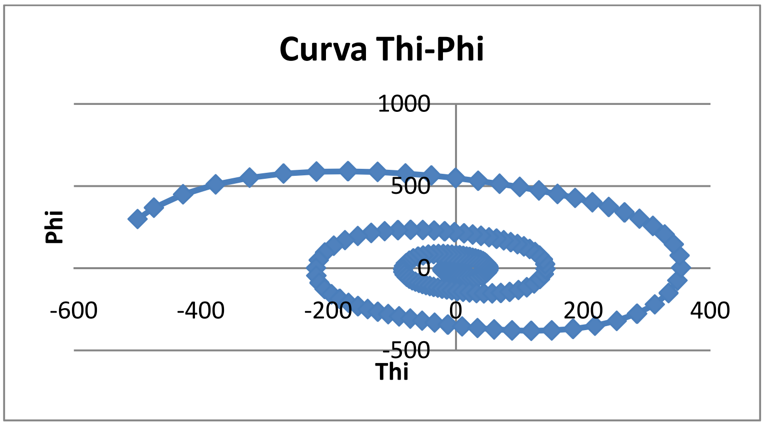
- Punto 12:



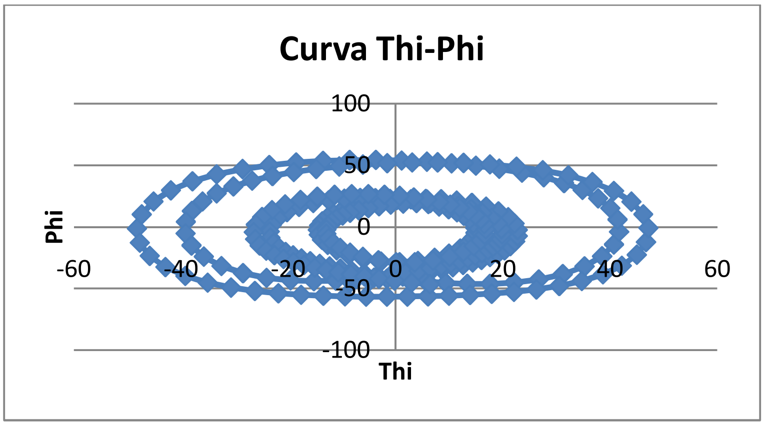
- Punto 13:



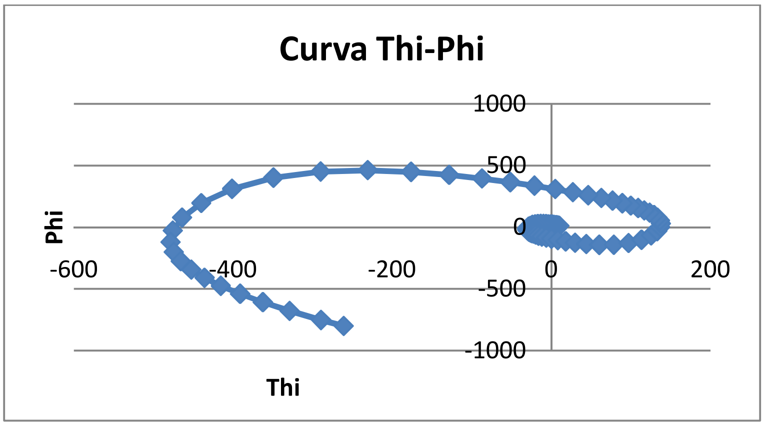
- Punto 14:



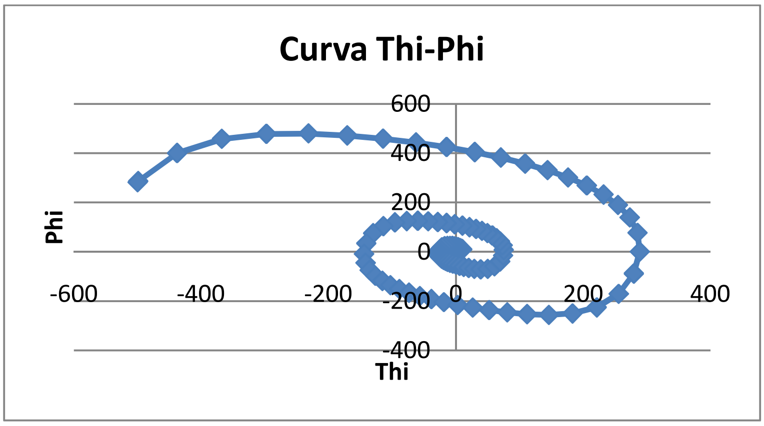
- Punto 15:



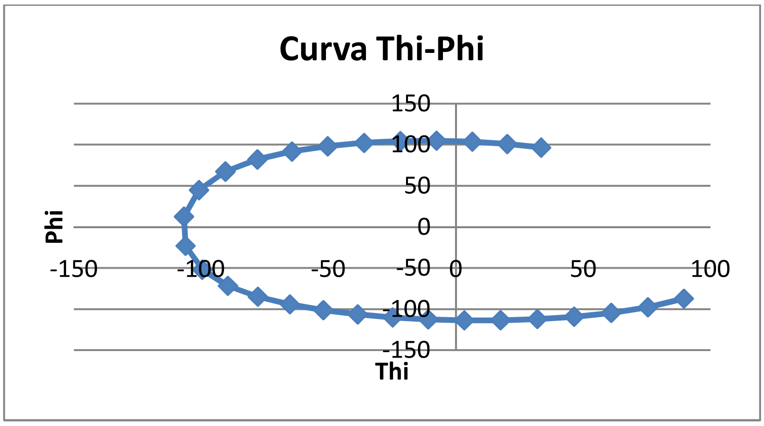
- Punto 16:



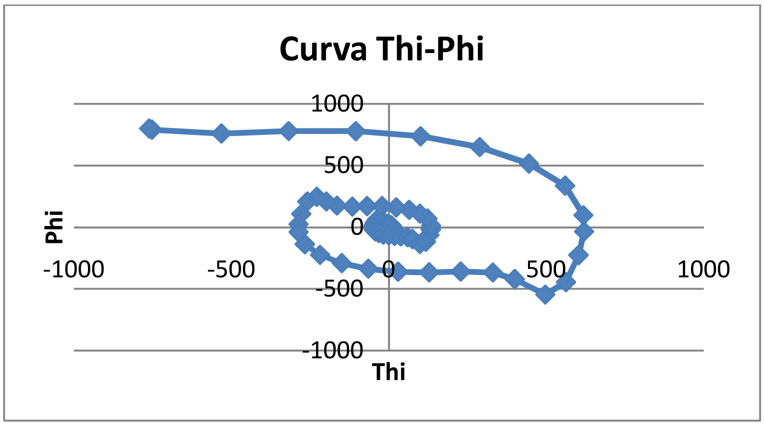
- Punto 17:



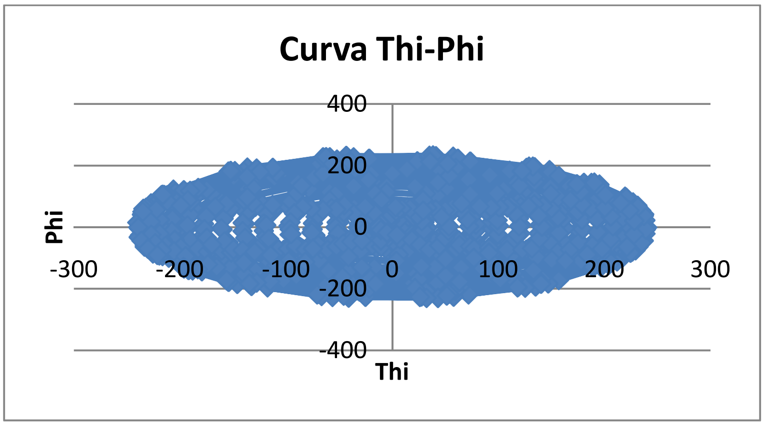
- Punto 18:



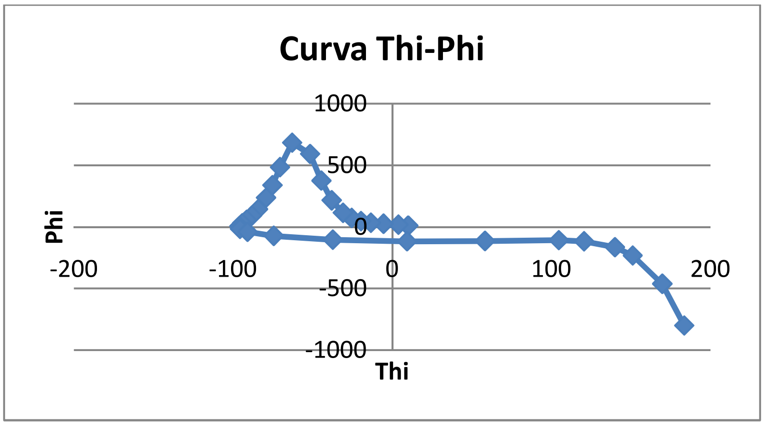
- Punto 19:



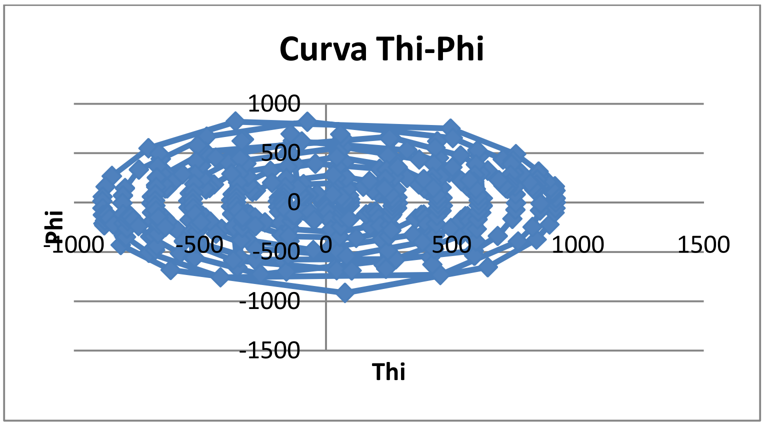
- Punto 20:



- Punto 21:



- Punto 22:


Curva Thi-Phi
1000
500
0
-500
-1000
-1500
-1000
-500
0
500
1000
1500
Phi
Thi

13.- REFERENCIAS

- Proyecto fin de carrera: “Estudio de la estabilidad de un sistema mecánico aro-barra con ligaduras no holónomas” de D. Juan de Dios Rey Morillo.

- Dinámica. J.L.Meriam-L.G.Kraige. Editorial Reverté, S.A. (2007).
- Wikipedia.
- www.lawebdefisica.com.
- www.sc.ehu.es.
- www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/plano_inclinado/plano_inclinado.htm.